1) Sia $V = \ll (1,2,3)^T, (1,0,1)^T \gg \subset \mathbb{R}^3$. Mostrare che V è un piano e determinarne l'equazione

2) Dati $v_1 = (2,3,1)^T$, $v_2 = (-4,-6,-2)^T$, $v_3 = (0,1,0)^T$, $v_4 = (1,3,2)^T$, $v_5 = (8,5,3)^T$

Determinare:
1) se il sistema dei 5 vettori è lin. dipendente
2) le relazioni di dipendenza lineare
3) i sottoinsiemi linearmente indipendenti

3) Siano $U = \ll f_1, f_2 \gg$, con $f_1 = (1,1,0)$ e $f_2 = (0,1,1)$, e $V = \ll e_1, e_3 \gg$, sottospazi di $\mathbb{R}^3$

i) Determinare $U + V$ e $U \cap V$

ii) Trovare l'equazione di U, l'equazione di V e l'equazione di $U \cap V$

iii) rappresentare f_1 in $\mathbb{R}^3$ e dedurre geometricamente che $U + V = \mathbb{R}^3$

4) Completare ad una base di $\mathbb{R}^5$ il sistema di vettori $\{(1,-2,1,0,0)^T, (1,-2,0,1,0)^T\}$.

5) Determinare la base e la dimensione dell'intersezione e della somma degli spazi generati dai vettori:

$\ll (1,2,-1,-2)^T, (3,1,1,1)^T, (-1,0,1,-1)^T \gg$ e

$\ll (2,5,-6,-5)^T, (-1,2,-7,-3)^T \gg$

1. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$V = \ll \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \gg \qquad W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \}.$$

(i) Calcolare l'intersezione $V \cap W$.
(ii) Calcolare $\dim V$, $\dim W$ e $\dim V \cap W$.
(iii) Calcolare $\dim(V + W)$.

2. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$V = \ll \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \gg \qquad W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 + x_3 = 0 \}.$$

(i) Calcolare l'intersezione $V \cap W$.
(ii) Calcolare le dimensioni $\dim V$, $\dim W$ e $\dim V \cap W$.
(iii) Calcolare $\dim(V + W)$.

3. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^3$

$$U = \ll \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \gg; \quad W = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \}.$$

(i) È vero che $\mathbb{R}^3 = U \oplus W$?
(ii) Determinare sottospazi Z e V di $\mathbb{R}^3$ tali che

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus Z, \qquad \mathbb{R}^3 = W \oplus V.$$

4. Siano dati i sottospazi di $\mathbb{R}^4$

$$U = \ll \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \gg; \quad V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases} \}.$$

(i) Calcolare $U + V$ e $\dim(U + V)$.
(ii) Calcolare $\dim U$, $\dim V$, e $\dim(U \cap V)$.

5. Siano

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3;$$

(i) Far vedere che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ sono vettori indipendenti.
(ii) Completarli ad una base di $\mathbb{R}^3$ in tre modi diversi.
(iii) Esibire un complemento per ognuno dei sottospazi: $\ll\{\mathbf{v}_1\}\gg$, $\ll\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}\gg$ e $\ll\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}\gg$.

6. Determinare due sottospazi U e W di $\mathbb{R}^4$ tali che $\mathbb{R}^4 = U + W$, senza che la somma sia diretta.