ESERCIZIO Dati i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$; $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

i) determinare v_3 e v_4 come combinazioni lineari di v_1 e v_2

ii) Scrivere la matrice C, forma a gradini canonica della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, senza calcolarla, e giustificando la risposta data

iii) Dare le equazioni del sottospazio $V = \langle\langle v_1, v_2, v_3, v_3 \rangle\rangle$ dopo aver determinato la sua dimensione ed una base.

iv) determinare la matrice $M \in \mathcal{M}_{1\times3}$ tale che
$$V = Sol(MX = 0)$$
(suggerimento: scrivere un'equazione del sistema cercato con coefficienti incogniti $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, imporre che essa sia soddisfatta dai generatori di V; risolvere il sistema che ne risulta, determinando le soluzioni fondamentali ...)

v) Determinare lo "Spazio delle relazioni" dei vettori v_1, v_2, v_3, v_4, (cioè si cerchino le relazioni del tipo $x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = 0$, si ottenga un sistema $AX = 0$ e se ne diano le soluzioni fondamentali...)

vi) Dare una base di $\mathbb{R}^3$ che contenga i vettori di una base di V.

vii) Disegnare V e disegnare un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ a scelta vostra, che abbia in comune con V solo il vettore nullo.