•**1.** Nel piano $\mathbb{R}^2$ consideriamo i vettori $v = \binom{1}{2}$ e $w = \binom{-1}{1}$.

(a) mostrare che ogni vettore $x = \binom{x_1}{x_2}$ del piano si scrive in modo unico come combinazione lineare $x = \alpha v + \beta w$ (determinare α e β in funzione di x_1 ed x_2):

(b) disegnare e caratterizzare (tramite equazioni o disequazioni) i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ formati dagli estremi finali dei vettori del tipo $\alpha v + \beta w$ ove α e β sono numeri reali soggetti alle seguenti condizioni:
- (C) $\alpha, \beta \in [0, \infty)$
- (R) $\alpha + \beta = 1$
- (S) $\alpha + \beta = 1$ con $\alpha, \beta \in [0, 1]$
- (P) $\alpha, \beta \in [0, 1]$
- (T) $\alpha + \beta \leqslant 1$ con $\alpha, \beta \in [0, 1]$
- (X) $\alpha + \beta \leqslant 1$.

(c) specificare le relazioni di inclusione tra gli insiemi precedenti.

•**2.** Nello spazio $\mathbb{R}^3$ consideriamo i vettori $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) mostrare che un vettore $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ appartiene al piano generato da v e w se e solo se vale la relazione $4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$;

(b) descrivere i sottoinsiemi analoghi a quelli dell'esercizio precedente.

•**3.** Nello spazio $\mathbb{R}^3$ consideriamo i vettori $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) verificare che sono linearmente indipendenti e risolvere in α, β, γ la relazione $x = \alpha u + \beta v + \gamma w$ per un vettore $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ generico;

(b) disegnare e caratterizzare (tramite equazioni o disequazioni) i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ formati dagli estremi finali dei vettori del tipo $\alpha u + \beta v + \gamma w$ ove α, β e γ sono numeri reali soggetti alle seguenti condizioni:
- (C) $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \infty)$
- (Pi) $\alpha + \beta + \gamma = 1$
- (Tr) $\alpha + \beta + \gamma = 1$ con $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$
- (Pa) $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$
- (Te) $\alpha + \beta + \gamma \leqslant 1$ con $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$
- (X) $\alpha + \beta + \gamma \leqslant 1$.

(c) specificare le relazioni di inclusione tra gli insiemi precedenti.

4. Verificare che l'insieme dei vettori $u = \binom{1}{2}$, $v = \binom{1}{-1}$, $w = \binom{0}{-1}$ e $z = \binom{-2}{2}$ di $\mathbb{R}^2$ è generatore, ed estrarne tutte le basi possibili di $\mathbb{R}^2$.

5. Verificare che l'insieme dei vettori $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e $z = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ è generatore, ed estrarne tutte le basi possibili di $\mathbb{R}^3$.

•**6.** Descrivere tramite equazioni il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (sono linearmente indipendenti?), e poi completare quest'insieme ad una base di $\mathbb{R}^4$.

•**7.** Verificare che i sottinsiemi di $\mathbb{R}^4$ formati dai vettori $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ soddisfacenti alle condizioni $x_1 - x_4 = 0 = x_1 + x_2$ (sia U) e $x_3 - x_4 = 0 = x_2 + x_3$ (sia V) sono sottospazi vettoriali, trovarne la dimensione evidenziando delle basi; calcolare poi l'intersezione trovandone una base. Trovare le equazioni del più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ contenente sia U che V.

•**8.** Si determini se i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ formati dai vettori $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ soddisfacenti alle condizioni seguenti siano o meno sottospazi di $\mathbb{R}^3$:

(a) $x_1^2 + x_2^2 = x_3$

(b) $|x_1| = |x_2|$

(c) $x_1 + x_2 = x_3$

(d) $x_1 x_2 + x_2 x_3 = 0$