[1] In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{u}_2 = (2, -1, 3)$, $\mathbf{u}_3 = (3, 0, h)$; dire per quali valori di h i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ sono linearmente indipendenti.

[2] In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $\mathbf{u}_1 = (1, -1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 1, 1, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (3, 0, 1, 1)$, $\mathbf{u}_4 = (0, 1, -1, 0)$; trovare una base del sottospazio di $\mathbb{R}^4$, generato dai vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$.
Verificato che i vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$ sono linearmente indipendenti, determinare per quali valori di t il vettore $\mathbf{v} = (1, -1, 2t - 8, t + 1) \in \langle\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4 \rangle\rangle$
Per i valori di t trovati, determinare le componenti di $\mathbf{v}$ rispetto ai vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_4$.

[3] Dati i vettori: $\mathbf{u} = (1, 3, 2)$, $\mathbf{v} = (-2, 1, 1)$ in $\mathbb{R}^3$, verificare che $\mathcal{V} = \langle\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\rangle$ ha dimensione 2. Trovare per quali valori di t, il vettore $\mathbf{w} = (t, 0, -1)$ appartiene allo spazio $\mathcal{V}$ e, per tali valori, determinare le sue componenti rispetto ai vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

[4] Dire se i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^{2,2}$:

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} / 2x - y - z = x + 3y - 2t = 0 \right\},$$

$$\mathcal{K} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} / x - y + 2 = t = 0 \right\}$$

sono sottospazi vettoriali. In caso affermativo determinarne una base e la dimensione.

[5] Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono dati i sottospazi:

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / 2x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 - x_4 = 0\},$$
$$\mathcal{K} = \langle\langle (0, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 0), (2, 2, 1, 1) \rangle\rangle$$

i) Calcolare la dimensione e una base di $\mathcal{H}$.
ii) Calcolare la dimensione e una base di $\mathcal{K}$.

[6] i) Verificare che le matrici:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

costituiscono una base di $\mathbb{R}^{2,2}$ e determinare le componenti della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ rispetto a tale base.

ii) Dati i sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^{2,2}$:

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} / x_1 + 2x_2 = 0 \right\},$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} / x_1 + x_4 = x_2 + 2x_3 = 0 \right\},$$

determinare una base e la dimensione di $\mathcal{A}$ e di $\mathcal{B}$.