

### MATRICI INVERSE E DETERMINANTI

#### ESERCIZI

**Esercizio 1.** Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcolare il determinante delle matrici  $A$ ,  $B$ ,  $AB^2$ ,  $A + B$ ,  $AB + A^2$ ,  $A + BB^{-1}$  con la regola di Laplace.

**Esercizio 2.** Calcolare il determinante delle matrici dell'esercizio precedente con la regola di Sarrus.

**Esercizio 3.** Calcolare il determinante delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \sqrt{29} & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & -18 \\ 1 & 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -7/8 & 0 & -3 \\ 123 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 18 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 4.** Calcolare i seguenti determinanti:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & -t \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & -3 \\ 4 & 1+i & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}.$$

**Esercizio 5.** Ridurre le seguenti matrici per righe e calcolare i loro determinanti:

$$\begin{pmatrix} 1 & t+2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2t & 2-2t & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 6.** Ridurre le seguenti matrici per righe e calcolare i loro determinanti:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3-t & 2t \\ t & -5 & -3 \\ 1 & 2t & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 7.** Quali delle seguenti matrici sono invertibili?

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 0 & 24 \\ 0 & 25 & 0 \\ 24 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 6 & -5 \\ 2 & -5 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio 8.** La matrice  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  soddisfa  $A^2 = I_n$ . Dedurre che  $\det(A)$  è uguale a 1 o -1.

Esiste una matrice  $B \in \mathbb{R}^{2,2}$  per cui  $B^2 = -I_2$ ? Esiste una matrice  $C \in \mathbb{R}^{3,3}$  per cui  $C^t C = -I_3$ ?

**Esercizio 9.** Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare  $A^{-1}$  con il metodo di Laplace e con il metodo delle operazioni elementari.

**Esercizio 10.** Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Risolvere il sistema  $AX = B$  con il metodo di Cramer.

## QUIZ

**Quiz 1.** Siano  $A, B \in \mathbb{R}^{2,2}$ . Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a) Se  $AB$  è invertibile allora entrambe le matrici  $A$  e  $B$  sono invertibili.
- b) Se  $AB = 0$  allora o  $A = 0$  o  $B = 0$ .
- c) Se  $A^2 + I_2 = 0$  allora  $A$  non è invertibile.
- d) Nessuna delle affermazioni precedenti è vera.

**Quiz 2.** Siano  $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ . Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a)  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ .
- b)  $\det({}^t(AB)) = \det(AB)$ .
- c)  $\det(3A) = 3 \det(A)$  per  $n \in \mathbb{N}$ .
- d) Se  $AB$  non è invertibile allora tali sono sia  $A$  che  $B$ .

**Quiz 3.** Sia data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- a)  $\det(A) = 2$ .
- b)  $A$  è invertibile.
- c)  $\det({}^tA) = \det(A)$ .
- d) Non è possibile calcolare il determinante di  $A$ .