1) Dimostrare che in uno spazio euclideo, gli autovettori di un operatore isometrico relativi ad autovalori diversi sono ortogonali

2) Dimostrare che, in uno spazio euclideo, autovettori di un operatore simmetrico relativi ad autovalori diversi sono ortogonali

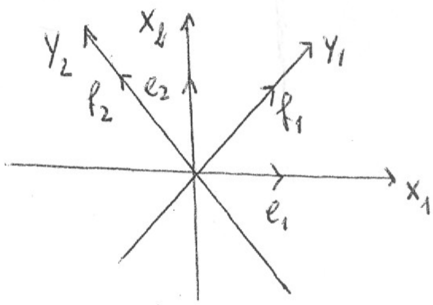
3) Dare un esempio del fatto che se la matrice A non è simmetrica, né ortogonale, allora autovettori che si riferiscono ad autovalori diversi non è detto siano ortogonali.

4) Sia $T_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'operatore associato alla matrice A_i nella base canonica di $\mathbb{R}^2$, $i = 1,2,3$

con $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Interpretare geometricamente gli operatori T_i.

5) Consideriamo $\mathbb{R}^2$ con la base canonica e le coordinate (x_1, x_2), e poi con la base $B = \{f_1, f_2\}$ con $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, con le coordinate (y_1, y_2).



Determinare l'equazione nelle coordinate x_1, x_2, della curva C che ha nelle coordinate y_1, y_2 equazione $y_1^2 + y_2^2 = 1$

951. Mediante una trasformazione ortogonale ridurre a forma canonica le forme quadratiche:

a) $2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$;

b) $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$;

c) $3x_1^2+4x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$;

d) $2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$;

e) $x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$;

f) $5x_1^2+6x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3$;

g) $3x_1^2+6x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$;

h) $7x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-8x_1x_2+8x_2x_3$;

i) $2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_4^2-4x_1x_2+2x_1x_4+2x_2x_3-4x_3x_4$;

j) $2x_1x_2+2x_3x_4$;

SOLUZIONI

951. a) $4x_1'^2+x_2'^2-2x_3'^2$),

$$x_1'=\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3,\quad x_2'=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,\quad x_3'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3;$$

b) $2x_1'^2-x_2'^2+5x_3'^2$,

$$x_1'=\frac{2}{3}x_1-\frac{1}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,\quad x_2'=\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3,\quad x_3'=\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3;$$

c) $7x_1'^2+4x_2'^2+x_3'^2$,

$$x_1'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,\quad x_2'=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3,\quad x_3'=-\frac{2}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3;$$

d) $10x_1'^2+x_2'^2+x_3'^2$,

$$x_1'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,\quad x_2'=\frac{2\sqrt{5}}{5}x_1-\frac{\sqrt{5}}{5}x_2,\quad x_3'=\frac{2\sqrt{5}}{15}x_1+\frac{4\sqrt{5}}{15}x_2+\frac{\sqrt{5}}{3}x_3;$$

e) $-7x_1'^2+2x_2'^2+2x_3'^2$.

$$x_1'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,\quad x_2'=\frac{2\sqrt{5}}{5}x_1-\frac{\sqrt{5}}{5}x_2,\quad x_3'=\frac{2\sqrt{5}}{15}x_1+\frac{4\sqrt{5}}{15}x_2+\frac{\sqrt{5}}{3}x_3;$$

f) $2x_1'^2+5x_2'^2+8x_3'^2$,

$$x_1'=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3,\quad x_2'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3,\quad x_3'=\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3;$$

g) $7x_1'^2-2x_2'^2+7x_3'^2$,

$$x_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}x_3,\quad x_2'=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3,\quad x_3'=\frac{\sqrt{2}}{6}x_1-\frac{2\sqrt{2}}{3}x_2+\frac{\sqrt{2}}{6}x_3;$$

h) $11x_1'^2+5x_2'^2-x_3'^2$,

$$x_1'=\frac{2}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3,\quad x_2'=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}x_2+\frac{2}{3}x_3,\quad x_3'=\frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2-\frac{2}{3}x_3;$$

i) $x_1'^2-x_2'^2+3x_3'^2+5x_4'^2$,

$$x_1'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4;\quad x_2'=\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,$$
$$x_3'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3-\frac{1}{2}x_4,\quad x_4'=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4;$$

j) $x_1'^2+x_2'^2-x_3'^2-x_4'^2$,

$$x_1'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+\frac{\sqrt{2}}{2}x_2,\quad x_2'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_3+\frac{\sqrt{2}}{2}x_4,$$
$$x_3'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_1-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2,\quad x_4'=\frac{\sqrt{2}}{2}x_3-\frac{\sqrt{2}}{2}x_4;$$