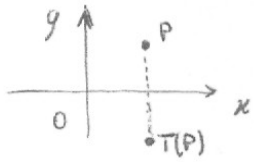
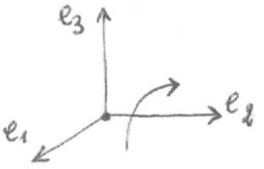
1) Dimostrare che l'applicazione $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ che dà la riflessione rispetto a $\langle\langle e_1 \rangle\rangle$ è una trasformazione isometrica. Darne la matrice



Stessa cosa per la simmetria rispetto all'origine.

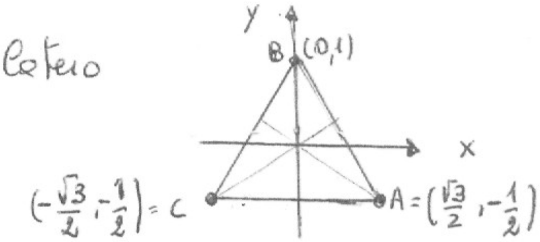
2) Sia $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la rotazione di angolo $\frac{\pi}{3}$ attorno all'asse $\langle\langle e_2 \rangle\rangle$ in senso orario



i) Trovare la matrice $[T]_e$

ii) Ridurre $[T]_e$ alla forma canonica rispetto ad una base ortonormale.

3) Sia dato il triangolo equilatero



Determinare le isometrie vettoriali di $\mathbb{R}^2$ che "conservano" il triangolo ABC, cioè che mandano vertici in vertici.

4) Descrivere la trasformazione $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita nella base canonica dalla matrice

$$A = [T]_e = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Determinare gli elementi caratteristici della trasformazione e la base ortonormale $\mathcal{B}$ tale che $[T]_{\mathcal{B}}$ è in forma canonica

1) Consideriamo le matrici ortogonali:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} ; \quad A' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad A'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare:

i) quale di esse rappresenta una rotazione

ii) quale rappresenta una rotazione seguita da una riflessione

iii) quale rappresenta una rotazione il cui asse è un vettore della base canonica

Determinare l'angolo ed il verso di ogni rotazione

2) Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione di matrice $[T]_e$

$$a) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} & 0 \\ 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad d) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

i) Verificare che T è isometrica

ii) Individuare la trasformazione e gli elementi caratteristici (piano di riflessione, asse e piano di rotazione, angolo e verso di rotazione)

iii) Dare la forma canonica A e la base ortonormale B di $\mathbb{R}^3$ tale che $[T]_B = A$.