1) In $\mathbb{R}^4$ euclideo si scriva il vettore v come somma di due vettori: g che giace nel sottospazio generato dai b_i ed h ortogonale a tale sottospazio nei seguenti casi:

a) $v = (5, 2, -2, 2)^T$; $b_1 = (2, 1, 1, -1)^T$; $b_2 = (1, 1, 3, 0)^T$

b) $v = (-3, 5, 9, 3)^T$; $b_1 = (1, 1, 1, 1)^T$; $b_2 = (2, -1, 1, 1)^T$; $b_3 = (2, -7, -1, 1)^T$.

2) Trovare gli angoli del triangolo di $\mathbb{R}^2$ euclideo, formato dai vettori $x_1 = (2, 1)^T$, $x_2 = (3, 4)^T$; $x_2 - x_1$

3) Determinare le proiezioni ortogonali dei vettori e_1, e_2, e_3 della base canonica di $\mathbb{R}^3$ sul piano π di equazione $x + y + z = 0$

4) Determinare l'area del triangolo ABC avente per vertici i punti $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$

5) Determinare il volume del parallelepipedo avente per lati i vettori $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1)$; $v_3 = (0, 1, 1)$

6) Si consideri lo spazio vettoriale definito dall'insieme dei polinomi in una variabile, di grado al massimo 2, sul campo dei numeri reali : $\mathbb{R}[x]_2$. Sia data la forma bilineare su $\mathbb{R}[x]_2$:

$$\varphi(p, q) = \int_{-1}^{1} p(x) \cdot q(x)\, dx$$

Si dimostri che $\mathbb{R}[x]_2$ con tale forma bilineare è uno spazio euclideo.

Determinare gli angoli fra i vettori di $\mathbb{R}[x]_2$:

$v_1 = 1$, $v_2 = t$, $v_3 = 1 - t$.

1) Determinare la formula della distanza di un punto P da una retta r nel piano.

2) In $\mathbb{R}^3$ euclideo, dare l'equazione di un piano π e le coordinate di un punto P, a scelta, e determinare la distanza del punto dato P dal piano π.

3) Determinare l'equazione del piano $\pi \subset \mathbb{R}^3$, perpendicolare alla retta $r = \langle\langle (1,2,1) \rangle\rangle$ e passante per il punto di coordinate $(1,1,1)$.

4) Siano dati la retta $r := \begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ x - z = 0 \end{cases}$ ed il punto $P := (1,-1,-1)$. Si determini il punto di r "più vicino" a P, cioè a distanza minima da P

5) Dati i punti $A := (2,0,4)$ e $B := (4,4,0)$ si determinino le coordinate degli eventuali punti C tali che il triangolo ABC sia equilatero e stia su un piano parallelo al piano π di equazione $2x - 2y - z = 2$

6) Tre vertici di un parallelogramma sono: $A := (1,0,1)$, $B = (-1,1,1)$, $C = (2,-1,2)$.

a) Trovare ogni possibile quarto vertice del parallelogramma

b) Calcolare l'area del triangolo ABC

c) Determinato il piano su cui giace il parallelogramma dare un vettore ad esso perpendicolare di lunghezza unitaria

21) Orientare la retta $x = y = z$ in modo che i suoi coseni direttori siano tutti positivi.

22) Determinare i coseni direttori della retta

$$\begin{cases} x - 5 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

orientata nel verso delle z decrescenti.

23) Costruire la retta passante per il punto (a, b, c), ortogonale all'asse z, e ad esso incidente.

24) Scrivere l'equazione del piano passante per il punto $A(1, 0, -2)$ e ortogonale alla retta r che congiunge $A(1, 0, -2)$ con $B(3, -1, 5)$.

25) Determinare il piano Π passante per la retta r di equazioni

$$\begin{cases} x = \frac{7}{2} y + 4 \\ z = -5y - 4 \end{cases}$$

e formante con la retta s di equazioni $x = -y/2 = z/2$ un angolo il cui seno è 8/9. Verificare che Π è, tra i piani per r, quello che forma con s angolo massimo.

26) Scrivere le equazioni delle rette passanti per il punto $A(0, 2, 3)$, aventi dall'asse z distanza $\sqrt{2}$, e formanti col piano xy un angolo di $\Pi/4$.

27) Determinare i piani aventi distanza 1 dai due punti $A(-1, -2, -3)$ e $B(1, 2, 3)$, e paralleli all'asse y.

Qual'è il seno dell'angolo che tali piani formano con la retta AB?