1) Sia data in $\mathbb{R}^3$ la forma quadratica $q: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$q((x_1, x_2, x_3)) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$

i) dire se è definita positiva

ii) ridurla a somma di quadrati e determinare la nuova base di $\mathbb{R}^3$

iii) verificare l'esistenza di vettori isotropi.

iv) dato il sottospazio $U = \langle\langle (2, 1, -2) \rangle\rangle$ dare le equazioni di $U^\perp$, l'ortogonale relativo alla forma polare di q.

2) Determinare $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che la forma quadratica $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ sia definita positiva

3) Con il metodo di ortogonalizzazione, determinare i vettori ortogonali y_1, y_2, y_3, a partire dai vettori $x_1 = (1, 0, 1)$, $x_2 = (1, 1, 1)$; $x_3 = (2, 1, -1)$

4) Determinare una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{R}^3$ euclideo generato dai vettori $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (3, 1, 2)$, $x_3 = (2, 3, 1)$

5) Determinare una base ortonormale del sottospazio di $\mathbb{R}^4$ euclideo, $W = \langle\langle (3,1,1,1), (2,2,1,4), (0,0,0,1) \rangle\rangle \subset$

6) Determinare il complemento ortogonale in $\mathbb{R}^4$ euclideo del sottospazio $W = \langle\langle (3,1,1,1), (2,2,1,4), (0,0,0,1) \rangle\rangle$: darne una base ed equazioni cartesiane

Si calcoli la proiezione ortogonale su W e su $W^\perp$ del vettore $(6, 4, 7, 5)$

Risposte ad alcuni esercizi: 3): $y_1 = x_1$, $y_2 = (0, 1, 0)$; $y_3 = (3/2, 0, -3/2)$

6) $W^\perp = \langle\langle (1, 1, -4, 0) \rangle\rangle$, $W^\perp = \{ z = -4y,\ x = y,\ t = 0 \}$

2) $\lambda \geq 2$.

1. Sia dato lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard.
a) Determinare una base ortonormale del sottospazio W generato dai vettori:

$$e_1 + e_2, \quad 2e_2 - e_3.$$

b) Completare a una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.
c) Determinare la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale su W rispetto alla base canonica.

2. Sia dato lo spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard.
a) Trovare una base ortonormale del sottospazio generato dai vettori

$$e_1 + e_2, \quad -e_1 + 3e_2 + e_3 + e_4, \quad e_1 + 5e_2 + e_3 + e_4, \quad -3e_1 - 3e_2 - 3e_3 - e_4.$$

3. Sia dato lo spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard.
a) Determinare una base ortonormale del sottospazio W delle soluzioni delle equazioni:

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \quad 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0.$$

b) Completare a una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$.
c) Determinare la proiezione ortogonale su W del vettore $e_1 + e_2$.
d) Determinare la matrice che rappresenta la proiezione ortogonale su $W^\perp$ rispetto alla base canonica e rispetto alla base trovata nel punto b).

4. Sia dato lo spazio euclideo $\mathbb{R}^5$ con il prodotto scalare standard.
Siano dati il sottospazio W delle soluzioni delle equazioni:

$$x_1 - x_4 + x_5 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0, \quad x_2 + x_4 = 0$$

e il sottospazio U delle soluzioni delle equazioni:

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, \quad x_3 - x_4 = 0.$$

Determinare la dimensione e una base di $(W \cap U)^\perp$ e di $(W \oplus U)^\perp$.

5. Determinare la matrice, rispetto alla base canonica dello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare standard, della proiezione ortogonale su $U = \{{}^t(x, y, z, t) \,|\, x + t = 0\}$.
Determinare una base di autovettori di tale proiezione.

6. Si calcoli l'angolo tra i vettori e_1 e $e_1 + e_3$ di $\mathbb{R}^3$ nei seguenti casi:
a) rispetto al prodotto scalare standard.
b) rispetto al prodotto scalare cosi' definito: $g(X, Y) = {}^t XGY$ con $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

7. Sia dato lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare:

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

a) Verificare che g e' definito positivo
b) Trovare l'angolo tra i vettori $e_2 - e_3$ e $e_1 + e_2 - e_3$.
c) Trovare una base ortonormale del sottospazio generato da tali vettori.