1) Si consideri l'equazione $ax^2+bx+c=0$, con $a,b,c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Dimostrare con la teoria delle forme quadratiche, che, se $b^2-4ac<0 \Rightarrow$ l'equazione non ha soluzione in $\mathbb{R}$ (si può supporre $a>0$).

2) Sia data su $\mathbb{R}^3$ la forma quadratica
$q(x,y,z) = \alpha x^2 + (\alpha-\beta)y^2 - 2\alpha xy - \beta z^2 + 2\beta yz$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, strettamente positivi.

i) Trovare il rango e la segnatura di q

ii) Determinare $(\mathbb{R}^3)^\perp$

3) Sia data la forma quadratica su $\mathbb{R}^2$: $q(x,y) = -3y^2+2xy$

i) Determinarne la forma canonica, mediante il metodo di riduzione di Gauss

ii) Determinarne la segnatura

iii) La sua polare

iv) La matrice associata nella base canonica

v) La base di $\mathbb{R}^2$, rispetto alla quale la matrice ha la forma data dal teorema di Sylvester.

4) Dare 1 esempio in $\mathbb{R}^3$ di una forma quadratica definita positiva e darne una giustificazione

Dare esempio di una forma quadratica definita negativa e darne una giustificazione

Dimostrare che si può ridurre la matrice associata alla forma $I_{3\times3}$, nel primo caso e dare la base B di $\mathbb{R}^3$ in cui $[q]_B = I_{3\times3}$.

1) Dimostrare che l'applicazione $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ così definita
$F(X,Y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \dots + x_n y_n$ è una forma bilineare simmetrica, definita positiva

2) Sia $V = \mathcal{C}^0_{[a,b]} = \{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua} \}$ e $F: \mathcal{C}^0_{[a,b]} \times \mathcal{C}^0_{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}$
$(f,g) \longmapsto \int_a^b (f \cdot g)(x)\,dx$
è una forma bilineare simmetrica definita positiva.

3) Per ogni forma quadratica sotto riportata determinare:
i) Matrice A associata relativamente alla base canonica,
ii) La forma polare
iii) La forma canonica con il metodo di riduzione ai quadrati di Gauss
iv) il cambiamento di coordinate effettuato
v) La base dello spazio rispetto alla quale la matrice associata alla forma quadratica è diagonale, D.
vi) determinare il rango e gli indici d'inerzia.
vii) la matrice invertibile S tale che $D = S^T A S$:

a) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$

b) $x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$

c) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$

d) $x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + x_2^2 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4 + x_3^2 - 2x_4^2$

e) $x_1^2 + x_1x_2 + x_3x_4$

4) Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} -4 & 2/3 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix}$

Determinare la forma quadratica q tale che $[q]_e = A$ (B, C risp.)
Quali di esse sono definite positive?