1) Considerata in $\mathbb{R}^3$ la base canonica, sia $U = \langle\langle (1,1,1) \rangle\rangle$ ed $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare

$$F\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

i) Verificarne la simmetria e l'assenza di vettori F-isotropi

ii) Completare $v_1 = (1,1,1)$ ad una base F-ortogonale di $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$

iii) Determinare $U^\perp$, dandone l'equazione ed una base.

iv) Disegnare U ed $U^\perp$

2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare

$$F\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 - x_2y_3 - x_3y_2$$

i) è simmetrica?

ii) determinare $[F]_{\mathcal{E}}$, con $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3\}$ base canonica

iii) calcolare il rango di F

iv) determinare $(\mathbb{R}^3)^\perp$

v) determinare $(e_3)^\perp$

3) Dimostrare che se i vettori $v_1, v_2, \dots, v_k$ sono coniugati al vettore w rispetto ad una forma bilineare simmetrica F, $\Rightarrow$ ogni vettore del sottospazio generato da $v_1, v_2, \dots, v_k$, è coniugato a w.

4) Dimostrare che se X è un sottoinsieme di uno spazio vettoriale V su cui è definita una forma bilineare simmetrica F, $X^\perp$ è un sottospazio di V, dove $X^\perp$ è l'insieme dei vettori ortogonali ad ogni elemento di V.