1) Dato l'endomorfismo $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, con $T(e_1) = e_1+e_2$ e $T(e_2) = 3e_1 - e_2$, $\{e_1, e_2\}$ base canonica di $\mathbb{R}^2$, vedere se è diagonalizzabile e se lo è dare una base di autovettori, $\mathcal{B}$, e la matrice di passaggio dalla base canonica a $\mathcal{B}$.

2) Determinare gli autospazi dei seguenti endomorfismi:

i) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $T(e_1) = e_2$, $T(e_2) = 0$ con $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$ base

ii) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tale che detta $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, $T(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3$;
$T(e_2) = e_1 + 2e_2 + e_3$; $T(e_3) = -e_1 + e_3$

iii) $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che detta $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$ si abbia:

$T(e_1) = e_1 + e_2$; $T(e_2) = e_1 + e_2 + e_3$; $T(e_3) = e_3$
$T(e_4) = e_4$

Dire se le varie applicazioni sono diagonalizzabili.
Se lo sono dare una matrice S che diagonalizza la matrice ad esse associata (cioè S tale che $D = S^{-1}[T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}} S$)
Determinare il nucleo e l'immagine di ogni endomorfismo dato, trovando una base per ognuno di essi

Risposte a 2): autospazi: per i): $x_1 = 0$; non diagonalizzabile;

ii) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} -x_3 + x_2 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = x_2 \\ 2x_1 = x_2 \end{cases}$; diagonalizzabile

iii) $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$ diagonalizzabile.

Per ognuna delle seguenti matrici

1) Dare l'endomorfismo cui è associata la matrice nelle base canonica dello spazio;
2) Determinarne il nucleo e l'immagine, dandone basi ed equazioni;
3) Disegnare nucleo ed immagine;
4) Determinare la matrice associata all'endomorfismo in una diversa base dello spazio data da voi;
5) Determinare gli eventuali autospazi e disegnarli;
6) Vedere se è possibile diagonalizzarlo , DARE LA MATRICE DIAGONALE D E LA MATRICE S | $D = S^{-1} A S$
7) Dare ,se possibile, una base di autovettori
8) Trovare lo spazio supplementare del nucleo dell'applicazione.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{c)} \begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}; \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix};$$

$$\text{e)} \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}; \quad \text{f)} \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{g)} \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{h)} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix};$$

$$\text{i)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 21 & 17 \\ 6 & -26 & -21 \end{pmatrix}; \quad \text{j)} \begin{pmatrix} 8 & 30 & -14 \\ -6 & -19 & 9 \\ -6 & -23 & 11 \end{pmatrix};$$

$$\text{k)} \begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{l)} \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{m)} \begin{pmatrix} 9 & 22 & 6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{pmatrix}; \quad \text{n)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{o)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(LE MATRICI a), b), f), g), l), n) SONO DIAGONALIZZABILI)

$$\text{p)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{q)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{r)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$