

1) Determinare autovetori ed autospazi delle seguenti matrici reali:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2 & a-1 \\ -3 & 5 & -2 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$,

determinare per quali valori del parametro a , la matrice A ammette l'autovettore -1

3) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & h & h \\ 1 & h^2-h & 1 \\ h-1 & 0 & h-1 \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$

i) trovare gli eventuali valori di h per cui $\text{rg}(A) < 3$;

ii) posto $h=1$ determinare autovetori e autospazi di A e disegnare gli autospazi.

A è diagonalizzabile? Se sì dare D e la matrice S tale che $D = S^{-1}AS$

4) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & h+1 \\ 6 & h & 2 \end{pmatrix}$, $h \in \mathbb{R}$,

i) Determinare il valore di h per il quale la matrice A ha un autovettore $= 3$

ii) Posto $h=-2$, provare che A è diagonalizzabile; trovare la matrice D simile ad A e la matrice S tale che $D = S^{-1}AS$.

5) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$: è diagonalizzabile?

Se sì, determinare D ed S tale che $D = S^{-1}AS$

(RICORDO CHE LA NULLITÀ DI UN AUTOVALORE È LA DIMENSIONE DEL SUO AUTOSPAZIO)

0. Calcolare autovalori, molteplicità e nullità, autospazi per le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quali sono diagonalizzabili?

1. Calcolare autovalori, molteplicità e nullità, autospazi per le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quali sono diagonalizzabili?

2. Studiare per quali valori dei parametri le seguenti matrici sono diagonalizzabili:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ a & 0 & 1-a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & a & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & a^2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}.$$

3. Studiare per quali valori del parametro la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & a^2-a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile.

4. Calcolare il polinomio caratteristico delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 1 & d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & a_0 \\ & a_1 \\ & \vdots \\ \mathbb{I}_{n-1} & \vdots \\ & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dedurre che ogni polinomio monico è polinomio caratteristico di qualche matrice.

5. Una matrice reale d'ordine 2 ha un solo autovalore (di molteplicità 2). Dire quali sono le possibili nullità, e per ciascun caso dare un esempio di matrice di tale tipo.

6. Una matrice reale d'ordine 3 ha un solo autovalore (di molteplicità 3). Dire quali sono le possibili nullità, e per ciascun caso dare un esempio di matrice di tale tipo.

7. Una matrice reale d'ordine 3 ha due autovalori distinti (uno dei quali di molteplicità 2). Dire quali sono le possibili nullità, e per ciascun caso dare un esempio di matrice di tale tipo.

8. Una matrice reale d'ordine 4 ha un solo autovalore (di molteplicità 4). Dire quali sono le possibili nullità, e per ciascun caso dare un esempio di matrice di tale tipo.

9. Una matrice reale d'ordine 4 ha due autovalori distinti (uno dei quali di molteplicità 3). Dire quali sono le possibili nullità, e per ciascun caso dare un esempio di matrice di tale tipo.

10. Una matrice reale d'ordine 4 ha due autovalori distinti (ciascuno dei quali di molteplicità 2). Dire quali sono le possibili nullità, e per ciascun caso dare un esempio di matrice di tale tipo.

11. Che relazioni vi sono tra polinomio caratteristico, autovalori, loro molteplicità e nullità per una matrice e per la matrice trasposta?

12. Calcolare polinomio caratteristico e discutere la diagonalizzabilità per le matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & c & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & c \\ c & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$$