1) Sia $V$ uno spazio vettoriale con base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
Sia $f: V \longrightarrow V$ l'endomorfismo su $V$ con matrice

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determinare una base del nucleo.

2) Si determini la matrice rispetto alle basi canoniche dell'applicazione lineare $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tale che
$T(1,2,-1) = (0,1,0,1)$, $T(3,-1,2) = (1,2,0,1)$, $T(-1,5,-4) = (2,0,3,2)$
dopo aver verificato l'esistenza di una tale $T$.

3) Sia $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore tale che

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ dove } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ è base di } \mathbb{R}^3$$

Dare l'espressione analitica di $T$, dopo aver determinato $[T]_e$.

4) Date le basi $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ di $V$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ di $W$ sia $L: V \longrightarrow W$ il morfismo tale che

$L(v_1 + v_2) = 2w_1 + w_2 + 3w_3$;
$L(v_2 + v_3) = 2w_1 + 2w_2 + 5w_3$;
$L(v_1 + v_2 + v_3) = 4w_1 + 2w_2 + 6w_3$;
$L(v_2 + v_3 + v_4) = 4w_1 + w_2 + 4w_3$;

Se ne scriva la matrice rispetto alle basi date.

5) Si consideri la simmetria del piano rispetto alla retta di equazione $y = x$.
Determinarne i sottospazi invarianti