Applicazioni Lineari e Matrici

Applicazioni Lineari

Esercizio 1. Si dica se sono lineari le seguenti funzioni:

(1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x - y, x + y + 1, 0)$;
(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (2x, x + y)$;
(3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sin(x - y)$.

Esercizio 2. Si dica per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ è lineare la seguente funzione:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y, z) \mapsto (x + ty, tyz).$$

Esercizio 3. Si consideri la funzione tra $\mathbb{C}$-spazi vettoriali $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ data da $f({}^t(x, y)) = x + \bar{y}$, ove $\bar{y}$ indica il numero complesso coniugato di y. Si dica se f è lineare (cioè $\mathbb{C}$-lineare).

Esercizio 4. Sia $f : V \to W$ un'applicazione tra due spazi vettoriali. Si dimostri che f è lineare se e solo se il suo grafico è un sottospazio vettoriale di $V \times W$.

Esercizio 5. Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali. Siano $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base di V e $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base di W, e f sia data da $f(v_1) = 2w_1 - 3w_2 + w_4$, $f(v_2) = w_2 - 2w_3 + 3w_4$ e $f(v_3) = w_1 + w_2 + w_3 - 3w_4$. Si scriva la matrice di f nelle basi date.

Esercizio 6. Siano V e W due spazi vettoriali di basi rispettivamente $\{v_1, v_2, v_3\}$ e $\{w_1, w_2\}$, e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare di matrice (rispetto alle basi date)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

(1) Si prenda per V la nuova base $v_1' = v_2 + v_3$, $v_2' = v_1 + v_3$, $v_3' = v_1 + v_2$. Qual è la nuova matrice A' di f rispetto alle basi $\{v_1', v_2', v_3'\}$ e $\{w_1, w_2\}$?
(2) Si prenda per W la nuova base $w_1' = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ e $w_2' = \frac{1}{2}(w_1 - w_2)$. Qual è la matrice A'' di f rispetto alle basi $\{v_1', v_2', v_3'\}$ e $\{w_1', w_2'\}$?

Esercizio 7. Si consideri il sottospazio V di $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ generato dalle funzioni $f_1(x) = e^{2x} + \cos x$, $f_2(x) = \cos x + \sin x$ e $f_3(x) = \sin x$.

Si dimostri che f_1, f_2 e f_3 sono linearmente indipendenti e si determini la matrice (rispetto alla base $\{f_1, f_2, f_3\}$) dell'endomorfismo di V che ad una funzione associa la sua derivata.

Esercizio 8. Si determinino le matrici, rispetto alle basi canoniche, di tutte le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ tali che $f((1, 2, -1)) = (0, 1, 0, 1)$, $f((3, -1, 2)) = (1, 2, 0, -1)$ e $f((-1, 5, -4)) = (2, 0, 3, 2)$.

Esercizio 9. Si determinino le matrici, rispetto alle basi canoniche, di tutte le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tali che $f((0, -2, 1)) = (3, -1)$, $f((1, 1, -2)) = (1, 2)$ e $f((2, -4, -1)) = (11, 1)$.

Esercizio 10. Sia V l'insieme delle funzioni polinomiali a coefficienti reali di grado ≤ 4 che si annullano in 0 e 1, e sia W l'insieme delle funzioni polinomiali a coefficienti reali di grado ≤ 3 tali che il loro integrale tra 0 e 1 è nullo.
(1) Si dimostri che V e W sono due spazi vettoriali e se ne determinino delle basi.
(2) Sia $D : V \to W$ l'applicazione lineare che associa ad una funzione la sua derivata. Si dimostri che D è ben definita e si determini una sua matrice rispetto alle basi precedentemente trovate.

Esercizio 11. Sia $\phi_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ l'omomorfismo di matrice (rispetto alle basi canoniche)

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) È vero o falso che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, esiste un omomorfismo $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\psi \circ \phi_\lambda$ sia suriettivo?
(2) Per quali valori di λ esistono $x, y, z \in \mathbb{R}$ tali che, posto

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ -1 & z & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

si abbia $BA_\lambda = I$?

Nucleo e Immagine

Esercizio 12. Siano V e W due spazi vettoriali, con basi rispettivamente date da $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e $\{w_1, w_2, w_3\}$. Si determini la matrice, rispetto alle basi date, dell'applicazione lineare $\phi : V \to W$ definita da $\phi(v_1) = w_1 - w_2$, $\phi(v_2) = 2w_2 - 6w_3$, $\phi(v_3) = -2w_1 + 2w_2$, $\phi(v_4) = w_2 - 3w_3$. Si determinino inoltre le dimensioni di $\operatorname{Ker}\phi$ e di $\operatorname{Im}\phi$ e si scrivano delle basi di tali sottospazi. Si dica inoltre se $w_1 + w_2 + w_3 \in \operatorname{Im}\phi$.

Esercizio 13. Si dica se l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$f({}^t(x, y, z)) = {}^t(x + 2y, y + z, 2z - x)$$

è iniettivo o suriettivo. Si determinino delle basi di $\operatorname{Ker} f$ e di $\operatorname{Im} f$ e si dica se la somma del nucleo e dell'immagine di f è diretta.

Esercizio 14. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo definito ponendo

$$f({}^t(1,0,0)) = {}^t(2,-1,0)$$
$$f({}^t(0,1,0)) = {}^t(1,-1,1)$$
$$f({}^t(0,1,-1)) = {}^t(0,2,2).$$

Si determini la matrice di f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si determinino inoltre le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f e delle basi di tali sottospazi.