ESERCIZI

1) Sia $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la seguente applicazione

$$f(x,y,z) = (x-6y+4z\ ,\ 2x+3y+3z\ ,\ x+12y-2z)$$

i) è lineare?

ii) Determinare il suo nucleo, e darne una base e l'equazione

iii) Determinare la sua immagine e darne una base e l'equazione

iv) Trovare uno spazio supplementare di $\ker f$ in $\mathbb{R}^3$ (cioè un sottospazio W tale che $\ker f \oplus W = \mathbb{R}^3$)

2) Sia $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione

$$f(x,y,z) = (x+ky+z\ ,\ 2x-y+5z\ ,\ -x+y+kz)\ ,\ k \in \mathbb{R}$$

i) verificarne la linearità

ii) Determinare per ogni valore di k, una base del nucleo

iii) Discutere l'appartenenza del vettore $(\alpha, \beta, -\alpha)$ alla immagine di f.

iv) Dare la matrice associata ad f nelle basi canoniche

3) Sia $\bar{\ }: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'applicazione "CONIUGIO", che ad ogni numero complesso associa il suo coniugato

i) si dimostri che $(\mathbb{C}; +, \cdot\alpha)$ è uno spazio vettoriale sul campo dei numeri reali ($\alpha \in \mathbb{R}$)

ii) Trovare la dimensione di $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e darne una base

iii) Si dimostri che l'applicazione coniugio è lineare.

1) Dato lo spazi delle matrici $p \times n$, $M_{p\times n}$, si dimostri che le operazioni elementari riga e: $M_{p\times n} \longrightarrow M_{p\times n}$ sono lineari.

2) Sia $M_3(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici di ordine 3 ed $f: M_3(\mathbb{R}) \longrightarrow M_3(\mathbb{R})$ tale che $f(A) = A + A^T \quad \forall A \in M_3$

i) mostrare che f è un endomorfismo lineare

ii) Determinare $\ker f$

iii) Determinare $\operatorname{Im} f$ e dimostrare che $\ker f$ e $\operatorname{Im} f$ sono supplementari in $M_3(\mathbb{R})$

3) Sia $\mathcal{L}(V, W)$ lo spazio delle applicazioni lineari $L: V \longrightarrow W$, con V spazio vettoriale di dimensione p con base $\mathcal{B}_V$ e W spazio vettoriale di dimensione n con base $\mathcal{B}_W$; dimostrare che l'applicazione $\varphi: M_{n\times p} \longrightarrow \mathcal{L}(V, W)$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.

4) Siano V e W due spazi vettoriali di basi rispettivamente $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathcal{D} = \{w_1, w_2\}$ e sia $f: V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare tale che $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

i) Si prende in V la nuova base $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2', v_3'\}$ con $v_1' = v_2 + v_3$, $v_2' = v_1 + v_3$, $v_3' = v_1 + v_2$; dare $[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{D}}$

ii) Si prende in W la nuova base $\mathcal{D}' = \{w_1', w_2'\}$ con $w_1' = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ e $w_2' = \frac{1}{2}(w_1 - w_2)$; dare $[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{D}'}$

5) Sia $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'endomorfismo tale che $[T]_e^e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Posto $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, dare $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$