Esercizio 1 Determinare quali delle seguenti applicazioni sono lineari:

$$f_1 : R^2 \to R^3 \qquad f_1(x, y) = (x + y, 2x - y, y - x)$$

$$f_2 : R^3 \to R^2 \qquad f_2(a, b, c) = (a + 2b - c, a - b - c)$$

$$f_3 : R^2 \to R^2 \qquad f_3(a, b) = (a^2, a + b)$$

$$f_4 : R^3 \to R^3 \qquad f_4(x, y, z) = (x, y, z) + (1, 0, 1)$$

$$f_5 : R^3 \to R^3 \qquad f_5(v) = 2v$$

$$f_6 : R^2 \to R^2 \qquad f_6(x, y) = (x - y, x + y + 1)$$

Esercizio 2 Sono dati i vettori di R^3: $v_1 = (1, 1, 0)$ $v_2 = (1, 0, 1)$ $v_3 = (0, 1, 1)$.
Provare che esiste un unico endomorfismo $f : R^3 \to R^3$ tale che

$$f(v_1) = (0, 1, 1) \quad f(v_2) = (0, 2, 2) \quad \text{e} \quad v_3 \in \mathrm{Ker}(f).$$

Determinare una base di $\mathrm{Im}(f)$ e $\mathrm{Ker}(f)$ e $f(0, 0, 1)$.

Esercizio 3 Sia $F : R^3 \to R^3$ l'applicazione lineare definita da

$$F(x, y, z) = (-x + 2y + 3z, kx - 4y - 6z, x + kz)$$

Si determinino i sottospazi $\mathrm{Ker}(F)$ e $\mathrm{Im}(F)$, se ne calcoli una base e si verifichi il teorema della dimensione, al variare del parametro reale k.

Esercizio 4 Sia $F : R^4 \to R^3$ l'applicazione lineare definita da

$$F(x, y, z, w) = (x + ky + w, kx + 4y + 2w, x + z + w).$$

Si determinino i sottospazi $\mathrm{Ker}(F)$, $\mathrm{Im}(F)$, se ne calcoli una base e si verifichi il teorema della dimensione, al variare del parametro reale k.

Esercizio 5 Sia $F : R^3 \to R^2$ l'applicazione lineare definita da

$$F(x, y, z) = (k^2x + y, kx + y - (k - 1)z).$$

Trovare i valori di k per cui F non è suriettiva.
Per ogni valore di k trovare una base di $\mathrm{Im}(F)$ e calcolare la dimensione di $\mathrm{Ker}(F)$.

Esercizio 6 Trovare per quali valori del parametro reale k l'applicazione lineare $F : R^3 \to R^3$, definita da

$$F(x, y, z) = (x + 2y, 2x + ky + z, -x + 2y + kz)$$

ammette inversa e calcolare esplicitamente l'inversa per uno di tali valori.

1) L'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto (x,y)$ è la proiezione sulle prime 2 coordinate; è lineare?

2) Dimostrare che l'insieme $\{T : V \longrightarrow W \mid T \text{ è lineare}\}$ con le operazioni: somma tra applicazioni e moltiplicazione di un'applicazione per uno scalare è uno spazio vettoriale.

3) In $\mathbb{R}[x]$, polinomi in una variabile, si consideri l'applicazione di derivazione $D : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$, $p(x) \longmapsto D(p(x))$

Si dimostri che è lineare. È iniettiva?

4) Fissata una base $\mathcal{B}_V$ in uno spazio vettoriale V, n-dim, si dimostri che l'applicazione $F : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ che associa ad ogni vettore v di V, il vettore delle sue coordinate rispetto a $\mathcal{B}_V$ è un isomorfismo

5) Si costruisca l'omomorfismo $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, con basi canoniche, che ai vettori $v_1 = (1,-1,0)$; $v_2 = (1,-1,1)$; $v_3 = (2,-1,0)$ associ nell'ordine i vettori $w_1 = (-2,2,3)$; $w_2 = (-2,2,-2)$; $w_3 = (2,-1,0)$

6) Data l'applicazione $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ rappresentata dal sistema $\begin{cases} x' = x + 3z \\ y' = 3x + y + 3z \end{cases}$, determinare $\ker T$, $\operatorname{Im} T$ e l'eventuale immagine inversa del vettore $v' = (1,2) \in \mathbb{R}^2$

7) Dimostrare che la composizione di due applicazioni lineari è un'applicazione lineare

8) Date $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (3x-y, x+y)$; $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \rightarrow (2x-y, x^2+y)$; $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (2x-y, 4x-2y)$

Determinare nucleo e immagine di quelle lineari e dire se sono iniettive, suriettive, biettive.