1) Dimostrare che esistono due matrici $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tali che $rg(A) = rg(B)$, ma A non è congruente a B

2) Dimostrare che vettori non isotropi, F-ortogonali rispetto ad una forma bilineare simmetrica F, sono lin. indipendenti

3) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3; $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ una sua base; $F: V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica tale che $[F]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

i) Mostrare che b_1 non è isotropo;

ii) determinare $\langle\langle b_1 \rangle\rangle^{\perp}$;

iii) sia $a = b_1 + b_3 \Rightarrow a \in \langle\langle b_1 \rangle\rangle^{\perp}$ e determinare $\langle\langle a \rangle\rangle^{\perp}$

4) Sia V uno spazio vettoriale reale con base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e G la forma bilineare simmetrica tale che

$$[G]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$ Si determini una base di V rispetto alla quale la matrice associata a G sia diagonale.

5) Stesso esercizio di 4) con $[G]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

6) Sia V uno spazio vettoriale reale con base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ ed F la forma bilineare simmetrica con $[F]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

i) si verifichi che F è non degenere

ii) si determini una base F-ortogonale di V

iii) si dica se esistono vettori isotropi non nulli e, se ci sono, si determini un sottospazio isotropo di dimensione massima.