

Prova scritta di Geometria per Fisica, 15 luglio 2020

Durata della prova: 2 ore e mezza

ESERCIZIO 1. (12 punti) Data l'applicazione lineare $T_k: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$T_k(x, y, z) = (x - y, ky - x + (1 - k)z, 2kz + (k + 1)y)$$

al variare del parametro reale k ,

- (i) scrivere la matrice A associata a T_k nelle basi canoniche;
- (ii) determinare per quali valori di k l'applicazione T_k è invertibile e per uno di tali valori di k trovare l'inversa di T_k ;
- (iii) per un valore di k tale che T_k non è invertibile, determinare la dimensione, una base ed equazioni parametriche e cartesiane del nucleo e dell'immagine di T_k ;
- (iv) per $k = 1$, determinare autovalori e autospazi di T_1 e dire se è diagonalizzabile;
- (v) determinare per quali valori di k la matrice A è associata ad una forma quadratica $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$; per uno di tali valori di k , determinare la segnatura di q .

ESERCIZIO 2. (6 punti) Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} ky + x - z = 1, \\ kz + x + y = 0, \\ (k - 1)z - y = 1, \end{cases}$$

al variare del parametro reale k . Determinare per quali valori di k il sistema è risolubile e, per tali valori di k , trovare l'insieme delle soluzioni.

ESERCIZIO 3. (8 punti) Sia V il sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^4 definito come insieme di soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x - y - z + 2w = 0, \\ 3x + z - 2w = 0, \\ x + 2y - 3w = 0. \end{cases}$$

- (i) Determinare la dimensione e una base di V .
- (ii) Trovare una base ed equazioni cartesiane del complemento ortogonale V^\perp di V .
- (iii) Determinare una base ortonormale di V^\perp .
- (iv) Determinare le proiezioni ortogonali del vettore $u = (1, 2, 1, 1)^T$ su V e su V^\perp .

ESERCIZIO 4. (8 punti) Nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 si considerino i seguenti punti: $A = (-1, 3/2, -1/2)$, $B = (-1/2, 1, 0)$, $C = (0, -2, 1)$, $D = (1, 0, 1)$, $E = (1, 3, 0)$.

- (i) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per i punti A , B e del piano π passante per i punti C , D , E .
- (ii) Determinare la posizione relativa di r e π .
- (iii) Determinare, se esiste, un piano contenente la retta r ed ortogonale al piano π .
- (iv) Fissato punto P della retta r a vostra scelta, determinare il punto Q del piano π che ha distanza minima da P .