Prova scritta di Geometria per Fisica, 16 giugno 2020
Durata della prova: 2 ore e mezza

Esercizio 1. (6 punti) Si consideri il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} kx + y - z = k, \\ -x + ky + z = 1, \\ 2x + ky - 2z = 1, \end{cases}$$

al variare del parametro reale k. Determinare per quali valori di k il sistema è risolubile e, per tali valori di k, trovare l'insieme delle soluzioni.

Esercizio 2. (8 punti) Nello spazio si considerino le due rette r ed s definite da:

$$r\colon \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 - t, \\ z = 2t, \end{cases} \qquad s\colon \begin{cases} x + 2y - z - 1 = 0, \\ x - y + 1 = 0. \end{cases}$$

(i) Determinare la posizione relativa di r ed s.
(ii) Determinare, se esiste, un piano contenente r ed s.
(iii) Determinare, se esiste, un piano ortogonale ad s e passante per il punto $P = (1, -1, 0)$.
(iv) Determinare, se esiste, un piano contenente r e parallelo ad s.
(v) Determinare, se esiste, una retta ortogonale e incidente sia ad r che ad s.

Esercizio 3. (6 punti) Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = (1, -2, -1, 2)^T, \qquad v_2 = (2, 1, 1, -2)^T, \qquad v_3 = (1, -7, -4, 8)^T.$$

(i) Determinare la dimensione e una base di V.
(ii) Determinare il complemento ortogonale $V^\perp$ di V.
(iii) Determinare le proiezioni ortogonali del vettore $u = (1, 1, 1, 0)^T$ su V e su $V^\perp$.

Esercizio 4. (8 punti) Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & k \\ -1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

con k parametro reale,

(i) dire per quali valori di k l'applicazione lineare f associata ad A in base canonica non è iniettiva e perché;
(ii) per uno di tali valori di k, determinare la dimensione, una base ed equazioni del nucleo e dell'immagine dell'applicazione lineare f;
(iii) determinare per quali valori di k l'applicazione ammette l'autovalore 2 e per uno di tali valori di k determinare autovalori e autospazi di A e dire se A è diagonalizzabile.

Esercizio 5. (6 punti) Studiare l'operatore associato alla matrice

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

nella base canonica di $\mathbb{R}^3$ euclideo, determinando i suoi elementi caratteristici.