PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA PER FISICA

01 – 02 – 2012

1) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della
[7] retta r passante per i punti $A = (2,1,3)$ e $B = (1,2,1)$
3 Trovare l'equazione cartesiana del piano parallelo alla
4 retta r e all'asse z e passante per l'origine.

2) Determinare lo spazio delle soluzioni del sistema
[8]

$$\Sigma = \begin{cases} -2x + y = 1 \\ x + 2y + 2z = 0 \\ -6x - 2y - 4z = 2 \end{cases}$$

4
3
1

e disegnarlo. Determinare lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo ad esso associato e descrivere la relazione esistente tra i due spazi.

3) Sia data l'applicazione $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x,y,z) \longmapsto (x+2y-z,\ 2x+4y-2z,\ 3x+6y-3z)$$

[7]
1 dopo averne verificato la linearità, scrivere la matrice
1 associata a T nelle basi canoniche.
1 T è invertibile? Giustificare la risposta
2
2 Determinare i sottospazi $\ker T$ ed $\operatorname{Im} T$, dandone equazioni cartesiane e parametriche e basi.

4) Siano dati i vettori di $\mathbb{R}^4$:
[7] $v_1 = (1,0,0,0)^T$; $v_2 = (1,1,0,0)^T$; $v_3 = (1,1,1,0)^T$
2 determinare la loro lineare dipendenza o indipendenza
3 dare l'equazione del sottospazio V generato da v_1, v_2, v_3.
2 Completare la base di V ad una base di $\mathbb{R}^4$

5) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$, determinarne
[6] il rango al variare di k e per un opportuno
4 valore del parametro, a vostra scelta, determinare A^{-1}.
2

Scritto di GEOMETRIA

FISICA - 14/02/2012

1) Discutere al variare del parametro reale k, il sistema:

$$\Sigma : \begin{cases} kx + y + kz = -1 \\ 2x - y + 2z = 1 \\ 3x + 3y + (k+2)z = 0 \end{cases}$$

Determinare lo spazio delle soluzioni $\forall\, k \in \mathbb{R}$ e disegnarlo quando questo è diverso da un punto. Che relazione c'è con lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato?

2) Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sono dati i sottospazi:

$$\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 2x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 - x_4 = 0\} \; ; \quad V = \ll \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \gg$$

Calcolare la dimensione ed una base di $\mathcal{U}$.
Calcolare la dimensione ed una base di $\mathcal{U}+V$. Si tratta di una somma diretta?

3) Sia T il morfismo di $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ definito da:

$$T(x, y, z) = (2x + 2y,\; x + z,\; x + 3y - 2z)$$

i) dire se T è iniettivo; determinare $\ker T$, disegnarlo; se T non è iniettivo dare due vettori che hanno la stessa immagine.

ii) dire se T è suriettivo; determinare $\operatorname{Im} T$, disegnarlo; se T non è suriettivo, determinare un vettore privo di controimmagine

4) Dato in $\mathbb{R}^4$ il sottospazio affine

$$X = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z = 1,\; y - z + t = 1\}$$

i) determinarne la dimensione e le equazioni parametriche,

ii) dare le equazioni di una generica retta, passante per $Q = (2, 1, 1, 1)$ e parallela ad X.

II Prova parziale scritta di GEOMETRIA
FISICA - 22/06/2012

1) In $\mathbb{R}^3$ con l'usuale prodotto scalare si determini

i) una base ortonormale $\mathcal{B}$ del piano Π_0 generato dai vettori $u=(1,-1,1)^T$ e $v=(2,0,2)^T$

ii) una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che contenga $\mathcal{B}$

iii) l'equazione del fascio di piani perpendicolari a Π_0 e passanti per $P:(1,1,0)$

2) Si consideri l'endomorfismo $T_k:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito da $T_k((x,y,z)) = (x+2y,\ y,\ kz)$ con k parametro reale

i) determinare al variare di k la dimensione e le equazioni degli autospazi dell'operatore

ii) determinare se esistono valori di k per i quali l'operatore è diagonalizzabile

3) Sia data la forma quadratica di $\mathbb{R}^3$ $q:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $q((x,y,z)) = x^2-2xy+y^2+2xz+z^2-2yz$

i) darne la matrice ad essa associata nella base canonica

ii) dire se esistono vettori di $\mathbb{R}^3$, F-ortogonali ad ogni vettore di $\mathbb{R}^3$, essendo F la forma polare di q. Dare, eventualmente, l'equazione del sottospazio che essi definiscono

iii) Determinare gli indici di inerzia di q, con un metodo a scelta.

iv) Determinare la forma canonica di q

GEOMETRIA per FISICA
23/07/2012

1) Discutere la risolubilità del seguente sistema lineare,
[8] determinandone le eventuali soluzioni, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + kz = 0 \\ x + y + z = 2k \\ kx + 2y + z = 4 \end{cases}$$

2) Si consideri la matrice incompleta associata al sistema
[6] soprascritto: basandosi sulla discussione fatta, si studi la lineare dipendenza dei vettori colonna al variare di k e si determinino le equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio da essi generato

3) Scrivere l'equazione parametrica e cartesiana della retta
[6] s passante per il punto $A = (-1, 1, 2)$ e parallela alla retta r di equazione $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -2t + 1 \\ z = -4t - 1 \end{cases}$

Se esiste, dare le equazioni cartesiana e parametrica di un piano perpendicolare ad entrambe le rette, e passante per A

4) Si scriva l'applicazione lineare $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. la cui
[6] matrice associata in base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$ Può essere un isomorfismo?

si calcoli la dimensione della sua immagine e la sua equazione; dimensione ed equazioni del Ker T

5) Dato il sottospazio $V = \langle\langle (1, -1, 3, 1) \rangle\rangle$ dello spazio
[6] vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$, dare una base ortonormale per il sottospazio $V^\perp$, suo complemento ortogonale