PROVA SCRITTA DI GEOMETRIA PER FISICA - 06/07/2011

1) Discutere, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, le possibili
[7] soluzioni del sistema
$$\begin{cases} x - ky + z = k \\ kx - 2y + 3z = -1 \\ 3x + 2y + kz = 5k \end{cases}$$

Risolvere il sistema quando lo spazio delle soluzioni ha dimensione maggiore di zero

2) Siano dati i sottospazi $W_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}$ e
[7] $W_2 = \langle\langle (1,0,2,0)^T, (0,1,-1,1)^T, (3,-2,8,-2) \rangle\rangle$

Determinare: basi, dimensioni, equazioni cartesiane e parametriche

3) Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare per la quale, posta
[7] $\mathcal{C}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, $[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & h+1 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; $h \in \mathbb{R}$.

i) Per quali valori di h, T non è un isomorfismo?

ii) Determinare $\operatorname{Ker} T$ ed $\operatorname{Im} T$ per tali valori di h

iii) Determinare un valore di h per cui T ha un autovalore $\lambda = 3$: in quel caso T è diagonalizzabile?

4) Dopo aver verificato che la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ è
[7] ortogonale, studiare l'operatore isometrico ad essa associato nella base canonica.

5) In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$
[7] i) determinare l'angolo fra di essi;

ii) dare l'equazione del piano π da essi generato;

iii) dare l'equazione della retta r passante per $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e perpendicolare a π.