PROVA SCRITTA PARZIALE (prima parte) DI

GEOMETRIA PER FISICA - 21-02-2017

1) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & \beta & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, discuterne il
[7] rango al variare di α e β. Per un opportuno valore dei parametri, determinare l'inversa di A e $A \cdot A^T$.

2) Discutere e risolvere al variare del parametro reale k, il
[7] sistema lineare:
$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = k \end{cases}$$

3) Siano $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid 2x_1 - x_2 + x_3 = x_1 + x_2 - x_4 = 0\}$
[10] e $V = \left\langle\!\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle\!\right\rangle$, sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

determinare
i) dimensione, base, equazione parametrica di W,
ii) dimensione, base, equazione cartesiana di V;
iii) stabilire se $(1,2,3,4)^T \in V$;
iv) dimensione e base di $W + V$.
v) completare una base di V ad una base di $\mathbb{R}^4$

4) Sia $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'operatore tale che $[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
($\mathcal{E}$ è base canonica)
[10] i) dare basi ed equazioni del nucleo e dell'immagine di T
ii) dire, giustificandolo, se T è un isomorfismo.
iii) giustificare, senza calcolarlo, il fatto che 0 è autovalore
iv) se esiste, determinare una base di $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B}$, tale che $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sia diagonale