Prova scritta di EMQ - 19 Giugno 2019

Esercizio 1

Una particella di massa m in una dimensione è soggetta ad un potenziale a gradino $V(x)$: $V(x) = 0$, per $x \leq 0$, $V(x) = V_0$ per $x > 0$; la particella è in un autostato di energia $E > 0$, con $E < V_0$.

1. Si scriva e si risolva l' equazione di Schrödinger su tutto l' asse delle x, supponendo che, per $x < 0$, sia $\psi_E(x) = e^{ikr} + A\ e^{-ikr}$, con A opportuna costante;

2. si calcoli il rapporto tra le probabilità che la particella si trovi negli intervalli spaziali $[-x_0, 0]$ e $[0, x_0]$.

Esercizio 2

Si consideri una particella di massa m in una dimensione, la cui funzione d'onda $\psi(x)$ è diversa da 0 solo per $-x_0 < x < x_0$; in tale intervallo si ha:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{3}{2x_0}}\ (1 + x/x_0); \quad -x_0 < x < 0 \tag{1}$$
$$\psi(x) = \sqrt{\frac{3}{2x_0}}\ (1 - x/x_0); \quad 0 < x < x_0$$

1. Si scriva la funzione d'onda in rappresentazione degli impulsi $\phi(k)$ della particella;

2. si faccia un grafico di $\psi(x)$, $|\psi(x)|^2$, $|\phi(k)|^2$.

Esercizio 3

Si considerino le funzioni $\psi_x(\mathbf{x}) = x\ f(r)$, $\psi_y(\mathbf{x}) = y\ f(r)$, $\psi_z(\mathbf{x}) = z\ f(r)$.

1. Si mostri che le tre funzioni sopra definite sono autovettori rispettivamente di L_x, L_y, L_z, indicando i corrispondenti autovalori;

2. Si mostri che le tre funzioni sono anche autovettori di L^2;

3. Si costruiscano le combinazioni lineari di ψ_x, ψ_y, ψ_z che sono autovettori di L_z con autovettori rispettivamente $\hbar$ e $-\hbar$.