Prova scritta di EMQ - 19 Febbraio 2019

Esercizio 1

Una particella di massa m è soggetta ad un potenziale a buca infinita: $V(x) = 0$ per $0 < x < a$, $V(x) \to \infty$ all' esterno di tale intervallo. Al tempo t_0 la particella è nello stato:

$$|S_0 >= \sqrt{\frac{4}{9}}|1 > + i\sqrt{\frac{5}{9}}|2 > \tag{1}$$

($|1 >$ è l'autostato di H di minima energia e $|2 >$ il primo eccitato).

1. Si calcoli il valor medio dell' energia del sistema al tempo t_0;
2. si scriva la funzione d'onda normalizzata $\psi_S(x,t)$ della particella a un generico istante $t > t_0$;
3. si calcoli, in funzione del tempo, la probabilità $P(t)$ di trovare la particella nella metà sinistra della buca (cioè per $x \leq a/2$).

Esercizio 2

L' elettrone di un atomo di idrogeno è descritto dalla seguente funzione d'onda:

$$\psi(r,\theta,\phi) \; = \sqrt{\frac{4}{6}}\, R_{31}(r)Y_{11}(\theta,\phi) + \sqrt{\frac{1}{6}}\, R_{32}(r)Y_{21}(\theta,\phi) - \; i\sqrt{\frac{1}{6}}\, R_{21}(r)Y_{11}(\theta,\phi) \tag{2}$$

($R_{nl}(r)$ e $Y_{lm}(\theta,\phi)$ sono rispettivamente la componente radiale delle autofunzioni dell' hamiltoniana e le armoniche sferiche, entrambe normalizzate).

1. Si dica se lo stato dell' elettrone è un autostato di uno o più dei seguenti osservabili: H, L^2, L_z;
2. si elenchino i possibili valori ottenibili dalla misura degli osservabili del punto precedente;
3. si calcoli il valor medio dell' energia del sistema.

Esercizio 3

Si consideri una particella di massa m ed energia $E > 0$ che interagisce con una barriera di potenziale schematizzata da un potenziale a delta di Dirac:

$$V(x) = \lambda\, \delta(x), \quad \lambda > 0 \tag{3}$$

Cerchiamo le soluzioni dell' equazione di Schrödinger corrispondenti ad una particella che arriva da sinistra e che viene parzialmente trasmessa e riflessa dalla barriera:

$$\psi(x) = e^{ikx} + A\, e^{-ikx} \qquad x \leq 0 \tag{4}$$

$$\psi(x) = B\, e^{ikx} \qquad x > 0 \quad , \tag{5}$$

con A e B opportune costanti e $k = \sqrt{2mE}/\hbar$.

1. Si indichi la dimensione del parametro λ che appare nell' espressione del potenziale;
2. si calcolino A e B (si consiglia di esprimere tali quantità in funzione del parametro adimensionale $\alpha = \frac{m\lambda}{k\hbar^2}$);
3. si calcolino i coefficienti di riflessione ($|A|^2$) e di trasmissione ($|B|^2$);
4. si calcoli il valore limite dei due coefficienti per α (o equivalentemente λ) che va all' infinito e se ne dia una interpretazione fisica.