Compitino parziale e compito d'esame di EMQ - 17 Dicembre 2019

Compitino parziale: risolvere gli esercizi $3, 4, 5$.

Compito d'esame: risolvere gli esercizi $1, 2, 4, 5$.

Esercizio 1

Si consideri una base ortonormale in uno spazio tridimensionale costituita dai vettori $|1>$, $|2>$, $|3>$. I vettori $|1>$ e $|2>$ sono autovettori dell' operatore ξ con autovalore ξ_a, mentre $|3>$ è autovettore dello stesso operatore con autovalore ξ_b. Inoltre, $|1>$ è autovalore dell' operatore η con autovalore η_a mentre $|2>$ e $|3>$ sono autovettori dell' operatore η con autovalore η_b.

1. Si scrivano le matrici relative ai due operatori nella base considerata;
2. si dica se i due operatori sono compatibili;
3. si calcolino i possibili risultati della misura di η^2 sullo stato $|s>= 3\ |1> +2\ |2> +|3>$ e le relative probabilità.

Esercizio 2

Si consideri un sistema bidimensionale descritto dall' Hamiltoniana

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\ (5q_x^2 + 6q_xq_y + 5q_y^2)$$

1. Si definiscano nuove variabili canoniche p, P, q, Q rispetto alle quali l' hamiltoniana assume la forma di due oscillatori armonici non accoppiati;
2. si scrivano gli autovalori dell' energia del sistema.
3. si calcoli il valor medio di p_x^2 sullo stato fondamentale del sistema.

Esercizio 3

Si consideri una particella di massa m in una dimensione sottoposta ad un potenziale $V(x) = 0$ per $|x| < x_0$, $V(x) \to \infty$ per $|x| > x_0$. La particella è nell' autostato fondamentale dell' energia. Al tempo t_0 la barriera di potenziale viene "distrutta" e si procede immediatamente ad una misura della quantità di moto p della particella.

1. Si calcoli la distribuzione di probabilità della misura di p.

Esercizio 4

Si considerino gli operatori momento angolare orbitale L_i.

1. Si mostri che la funzione $\psi(x,y,z) = yf(r)$ (con $f(r)$ funzione arbitraria di $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$) è una autofunzione di L_y con autovalore 0;
2. si definisca, in analogia a quanto noto per il caso di L_z, l'operatore di salita L_{y+} e discesa L_{y-} relativo a L_y;
3. si applichi L_{y+} e L_{y-} alla funzione definita al punto 1 per ottenere autostati di L_y con autovalori $\pm\hbar$;
4. si applichi una seconda volta gli operatori di salita e discesa agli stati ottenuti al punto precedente. Sulla base del risultato ottenuto, cosa si può dire riguardo al fatto che tutti gli stati considerati siano (o non siano) autostati di L^2?

Esercizio 5

Si consideri una particella di spin 1/2. Siano $|+>$ e $|->$ gli autostati di s_z di autovalore $\pm\hbar/2$.

1. Si esprima, nella base sopra definita, l' autovettore di $\vec{s}\,\vec{n}$ con autovalore $\hbar/2$; $\vec{n} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$;
2. si calcoli il valor medio di s_x sullo stato definito al punto precedente.