Compitino parziale di EMQ - 7 Novembre 2019

Esercizio 1

Si consideri un sistema descritto dalla Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} - \alpha q^2 + \beta q^4$$

con $\alpha, \beta > 0$.

1. Si disegni un grafico del potenziale;
2. si determinino le posizioni e i valori del minimo del potenziale in funzione di α e β;
3. si calcoli il commutatore $[H, p]$;
4. si calcoli il commutatore $[H, q]$.

Esercizio 2

Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale descritto dall' Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

Il sistema viene preparato in uno stato coerente normalizzato di autovalore λ:

$$|\lambda >= e^{-|\lambda|^2/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\sqrt{k!}} \; |k > \tag{1}$$

in cui $|k >$ sono gli autostati della hamiltoniana.

Si calcoli:

1. il valor medio dell' energia sullo stato considerato;
2. il "grado di eccitazione dell' oscillatore", definito come $< \lambda|(\frac{H}{\hbar\omega} - 1/2)|\lambda >$.

Esercizio 3

Si consideri una particella di massa m sottoposta ad un potenziale unidimensionale a buca finita: $V(x) = V_0$ per $|x| > x_0$, $V(x) = 0$ per $|x| < x_0$.

I valori delle costanti m, V_0, x_0 sono tali che $\frac{2mV_0x_0^2}{\hbar^2} = \pi^2/4$. In tali condizioni una radice, calcolata numericamente, dell' equazione

$$\xi \;\tan \xi = \sqrt{\frac{2mV_0x_0^2}{\hbar^2} - \xi^2} = \sqrt{\pi^2/4 - \xi^2} \tag{2}$$

vale $\xi_0 \approx 0.934014$.

1. Si dica quanti sono gli stati legati del sistema;

2. si calcoli E/V_0 per lo stato di minima energia;

3. si scriva la autofunzione $\psi_0(x)$ dell' equazione di Schrödinger corrispondente allo stato di minima energia e tale che $\psi_0(0) = 1$, per ogni valore di $x \geq 0$ [Suggerimento: si consiglia di scrivere $\psi_0(x)$ come funzione della variabile adimensionale x/x_0];

4. si impostino, senza necessariamente svolgere tutti i calcoli, le equazioni necessarie per ottenere il fattore di normalizzazione di $\psi_0(x)$ [Suggerimento: si consiglia di eseguire negli integrali il cambiamento di variabile $x \to y = x/x_0$];

5. sulla base del risultato del punto precedente, si dica se la probabilità di trovare nella zona classicamente "proibita" ($|x| > x_0$) una particella nello stato descritto da $\psi_0(x)$ dipende da x_0.