Compitino parziale di EMQ - 20 Dicembre 2018

Esercizio 1

Si consideri una particella in una dimensione soggetta ad un campo di forza costante (ad esempio, un campo gravitazionale), la cui Hamiltoniana è data da:

$$H = \frac{p^2}{2m} - \kappa q \quad .$$

1. Si scrivano le equazioni del moto degli operatori $p(t)$ e $q(t)$ in rappresentazione di Heisenberg;
2. si trovino le soluzioni delle equazioni del punto precedente;
3. si calcolino $\Delta q(t)$ e $\Delta p(t)$ e si confrontino con l'analogo risultato per il caso di particella libera.

Esercizio 2

Si consideri una particella in una dimensione, su cui agisce un potenziale $V(x)$, con $V(x) < 0$ e $lim_{x\to\pm\infty} V(x) = 0$. $V(x)$ è tale che è possibile definire una buca rettangolare di potenziale $V_0(x) \leq 0$ con la proprietà che $V(x) \leq V_0(x)$ per ogni x.

Sia $H = p^2/(2m) + V(x)$ e $H_0 = p^2/(2m) + V_0(x)$; sia $\psi_0(x)$ la funzione d'onda dello stato fondamentale legato di H_0 (della cui esistenza si è sicuri), di energia E_0.

1. Si mostri che il valor medio di H sullo stato rappresentato dalla funzione d'onda $\psi_0(x)$ è negativo;
2. utilizzando il risultato precedente, si mostri che H ha almeno uno stato legato;

   [SUGGERIMENTO: si considerino le conseguenze della falsità di questa ipotesi sul risultato della domanda precedente]
3. si mostri infine che lo stato legato di H di cui al punto precedente ha energia minore o uguale a E_0

Esercizio 3

Si consideri un oscillatore armonico tri-dimensionale descritto dall' Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

Si considerino gli autostati H con energia $E = \hbar\omega(2 + 3/2)$; Nel sottospazio vettoriale relativo a tali autovettori, si scrivano esplicitamente, utilizzando la base $|n_x, n_y, n_z >$,

1. l' autovettore simultaneo $|E, l = 0, m = 0 >$, di E, L^2 e L_z con gli autovalori indicati;
2. gli autovettori $|E, l = 2, m = \pm 2 >$;

3. l' autovettore $|E, l=2, m=\pm 1>$;
4. l' autovettore $|E, l=2, m=0>$;

[SUGGERIMENTO: si consiglia di rispondere ai quesiti nell' ordine indicato]

Formule utili

1. Per un oscillatore armonico unidimensionale, gli autostati $|n>$ dell' energia relativi agli autovalori $n = 0, 1, 2$ possono essere scritti in rappresentazione di Schrödinger, come ($\xi = x/a_0$):

$$
\begin{aligned}
<x|0> &= (\frac{1}{\pi a_0})^{1/4}\ e^{-\frac{\xi^2}{2}} \\
<x|1> &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\pi a_0})^{1/4}\ 2\xi\ e^{-\frac{\xi^2}{2}} \\
<x|2> &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{\pi a_0})^{1/4}\ (2\xi^2-1)\ e^{-\frac{\xi^2}{2}}
\end{aligned}
$$

2. Le armoniche sferiche di ordine 2 hanno le seguenti espressioni:

$$
\begin{aligned}
Y_{2\ \pm 2} &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\ e^{\pm 2i\phi} &&= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\ \frac{x^2-y^2\pm 2ixy}{r^2} \\
Y_{2\ \pm 1} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\ e^{\pm i\phi} &&= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\ \frac{z(x\pm iy)}{r^2} \\
Y_{2\ 0} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta-1) &&= \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\ \frac{3z^2-r^2}{r^2} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\ \frac{2z^2-x^2-y^2}{r^2}
\end{aligned}
$$