Compitino parziale di EMQ - 13 Novembre 2018

Esercizio 1

Si considerino due osservabili (ξ e η) in uno spazio di Hilbert di dimensione 3, rappresentate, nella base $|1>, |2>, |3>$, rispettivamente dalle matrici

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_3 \end{pmatrix}$$

con $\xi_1 \neq \xi_3$, e

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \beta^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_3 \end{pmatrix}$$

1. Si mostri che ξ ed η sono osservabili compatibili;
2. Si determini una base ortonormale rispetto alla quale ξ ed η sono simultaneamente diagonali e si scrivano le matrici che le rappresentano in tale base.

Esercizio 2

Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale descritto dall' Hamiltoniana

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

Lo stato del sistema è rappresentato, in rappresentazione di Schrödinger, dalla funzione d'onda (non normalizzata)

$$\psi_(x) = \exp\left(-\frac{1}{4}\frac{m\omega}{\hbar}x^2\right)$$

Si misura l' energia del sistema e si ottiene il valore E. Si calcoli:

1. la probabilità che sia $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$;
2. la probabilità che sia $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$.

[Suggerimento: Si ricordi che $\int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\pi/\alpha}$.]

Esercizio 3

Si consideri un sistema unidimensionale costituito da una particella di massa m sottoposta ad un potenziale attrattivo

$$V(x) = -\lambda\ [\delta(x+a) + \delta(x-a)] \quad ,$$

con $\lambda > 0$.

Si cerchi la soluzione dell' equazione di Schrödinger relativa allo stato fondamentale del sistema, con energia $E < 0$. In particolare:

1. Si ricavi una equazione implicita per E;
2. Si mostri che l' equazione del punto (1) ha soluzione per qualunque valore di $\lambda > 0$;
3. Si calcoli esplicitamente E nel limite in cui $m\lambda a/\hbar^2 \to \infty$.

[Suggerimento: Si tenga conto del fatto che per questo problema la funzione d'onda dello stato fondamentale deve avere parità definita.]