

Università degli Studi di Ferrara
Facoltà di Scienze MM.FF.NN.
CdL in Tecnologie Fisiche Innovative

Progettazione CAD/CAM II

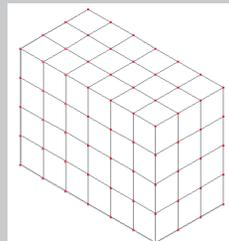
Prof. Nicola Baldanza
Prof. Michele Benedetti

Modulo II parte 1 Metodo degli elementi finiti (FEM)

Principio astrologico

Secondo l'astrologia, la vita degli uomini e, più in generale, tutti gli eventi dell'universo, sono prevedibili conoscendo il comportamento di poche stelle.

Secondo il metodo degli elementi finiti il comportamento di un continuo si può capire conoscendo cosa avviene in una serie discreta di punti.



Principali campi di applicazione

• Analisi delle strutture

- equazioni di congruenza, di legame e di equilibrio
- statiche, dinamiche, lineari, non lineari, in campo elastico e plastico,



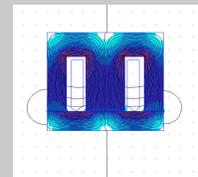
• Analisi fluidodinamiche

- equazioni di Navier-Stokes
- fluidi comprimibili ed incompressibili, analisi di velocità pressione e temperatura, simulazione combustione e stampaggio,



• Analisi elettromagnetiche

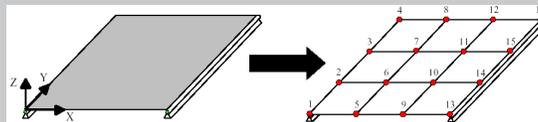
- equazioni di Maxwell
- campi elettromagnetici, ottica,



Interpretazione fisica e matematica

Interpretazione fisica

Il continuo è troppo complesso per essere studiato: lo si scompone in elementi semplici ed il comportamento complessivo è ottenuto tramite assemblaggio



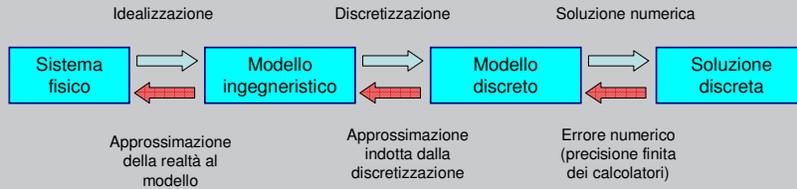
Interpretazione matematica

Le grandezze incognite (che sono campi, funzione della posizione) vengono considerate solo in un numero finito di punti (nodi). I valori nei punti intermedi si ottengono tramite funzioni interpolanti (funzioni di forma), definite all'interno degli "elementi" in cui il continuo risulta suddiviso. Le equazioni differenziali che caratterizzano il problema vengono così riscritte in forma algebrica e risolte con metodi matriciali.

$$\cancel{\gamma_{12} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)} \quad \longrightarrow \quad [f] = [K][u]$$

Potenzialità e rischi

Idealizzazione: costruzione di un modello matematico in grado di simulare alcuni aspetti della realtà



Condizioni indispensabile per identificare errori:

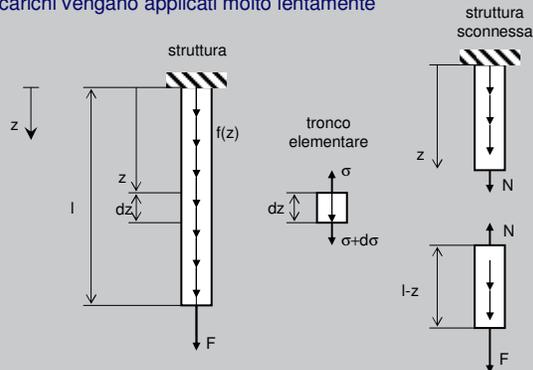
- conoscere la teoria alla base del fenomeno fisico
- conoscere le basi del metodo degli elementi finiti

Richiami di teoria dell'elasticità

Analizzeremo l'applicazione degli elementi finiti per l'analisi di strutture in campo:

- lineare: proporzionalità tra sollecitazioni e deformazioni
- elastico: le deformazioni si annullano all'annullarsi dei carichi
- statico: si ipotizza che i carichi vengano applicati molto lentamente

Esempio: **trazione**



Richiami di teoria dell'elasticità

1) Equilibrio

$$\frac{d\sigma}{dz} + f = 0$$

σ = tensione
 f = forza unitaria

2) Congruenza

$$\varepsilon = \frac{dw}{dz}$$

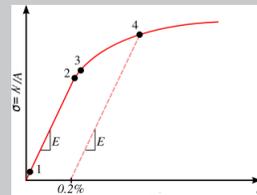
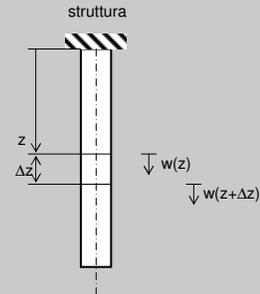
ε = deformazione
 w = spostamento

3) Legame:

legge di Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon$$

E = modulo di elasticità o di Young



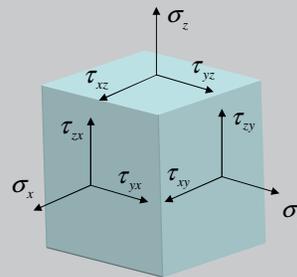
Richiami di teoria dell'elasticità

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} \quad \text{vettore delle tensioni o degli sforzi}$$

$$[f] = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{bmatrix} \quad \text{vettore delle forze unitarie}$$

$$[e] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \quad \text{vettore delle deformazioni}$$

$$[u] = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \text{vettore degli spostamenti}$$



cubo elementare
 σ_i = tensione normale
 τ_{ij} = tensione tangenziale

Richiami di teoria dell'elasticità

$$[E] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$[\sigma] = [E][\epsilon]$$

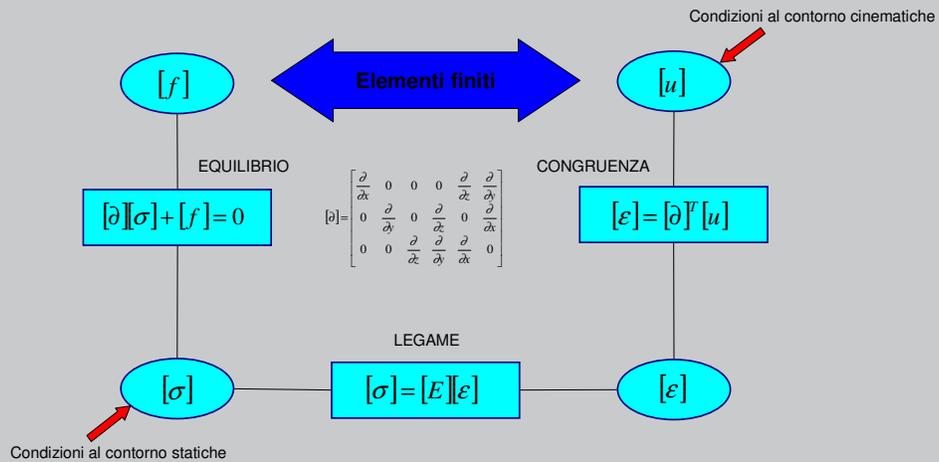
ν = coefficiente di Poisson

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad G = \text{modulo di elasticità tangenziale}$$

$$[E]^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix}$$

$$[\epsilon] = [E]^{-1}[\sigma]$$

Richiami di teoria dell'elasticità



Tappe del metodo

A. Pre-processing

1. Scelta del modello matematico più adatto per il problema in esame
2. Scelta del tipo di elemento finito più adatto per il problema in esame
3. Suddivisione della struttura in elementi finiti (meshing)
4. Attribuzione delle caratteristiche di geometria e di materiale agli elementi
5. Attribuzione dei vincoli
6. Descrizione dei carichi

B. Processing

7. Rinumerazione dei nodi e formazione dei vettori
8. Assemblaggio
9. Soluzione
10. Stress recovery

C. Post-processing

11. Elaborazione ed interpretazione dei risultati

Pre-processing: scelta del modello matematico

In letteratura sono presenti numerose trattazioni semplificate per la soluzione dei problemi strutturali.

Esempi:

- Teoria della trave
- Stato piano di sforzo o di deformazione
- Assialsimmetria
- Teoria della piastra sottile o spessa

Utilizzando il modello più corretto, non ricorrendo a quello più generale (solido, elementi *brick*) si hanno i seguenti vantaggi:

- minore quantità di calcoli e di dati da trattare
- risposta più semplice da interpretare

Pre-processing: scelta del tipo di elemento

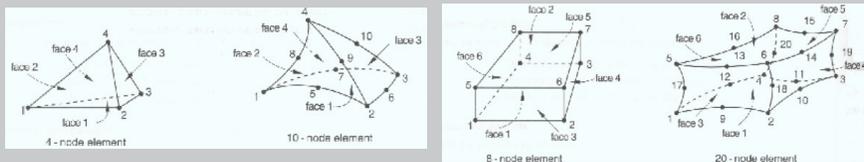
Elementi monodimensionali

- Biella (Truss): consente di riprodurre il comportamento a sforzo assiale
- Trave (Beam): consente di riprodurre anche il comportamento flessionale, torsionale e a taglio

Elementi bidimensionali (triangolari o quadrangolari)

- Elementi per stato di sforzo piano (piano xy $\rightarrow \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$)
- Elementi per stato di deformazione piana (asse z infinito $\rightarrow \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$)
- Elementi per problemi assialsimmetrici ($\tau_{\theta r} = \tau_{r\theta} = 0$)

Elementi tridimensionali (tetraedri o esaedri)



Corso Tecnologia Meccanica di Produzione – Tecnologie Fisiche Innovative - UNIFE

Pre-processing: scelta del tipo di elemento

La funzione di forma

Funzione che definisce gli spostamenti all'interno dell'elemento in funzione degli spostamenti nodali

$$[U] = [\Phi][u]$$

Attenzione: nelle prossime pagine [u] rappresenta gli spostamenti nodali e non il campo di spostamento all'interno del corpo o dell'elemento

Esempio: elemento biella a 2 e a 3 nodi (lineare e quadratico)



$$\Phi_1 = (1 - x/L)$$

$$\Phi_2 = x/L$$

$$u(x) = u_1 + x(u_2 - u_1)/L = u_1\Phi_1 + u_2\Phi_2$$



$$\Phi_1 = \frac{(x_2 - x)(x_3 - x)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1)}$$

$$\Phi_2 = \frac{(x_1 - x)(x_3 - x)}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)}$$

$$\Phi_3 = \frac{(x_2 - x)(x_1 - x)}{(x_2 - x_3)(x_1 - x_3)}$$

$$u(x) = \Phi_1 u_1 + \Phi_2 u_2 + \Phi_3 u_3$$

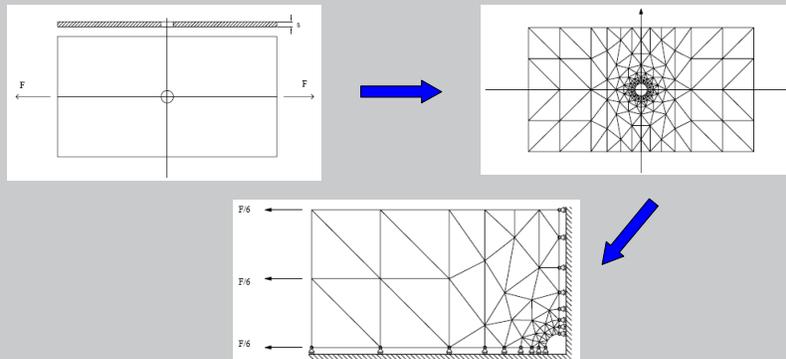
Corso Tecnologia Meccanica di Produzione – Tecnologie Fisiche Innovative - UNIFE

Pre-processing: suddivisione della struttura (meshing)

E' uno dei punti più delicati dell'intero procedimento

Regole di base

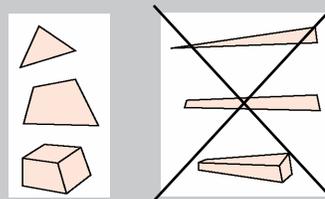
- Usare strutture semplificate sfruttando le simmetrie



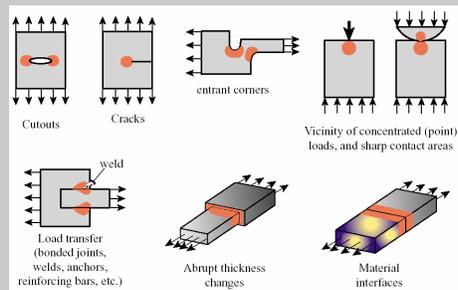
Corso Tecnologia Meccanica di Produzione – Tecnologie Fisiche Innovative - UNIFE

Pre-processing: suddivisione della struttura (meshing)

- Mantenere le proporzioni tra le dimensioni degli elementi continui (parametri distorsione e stretch)



- Raffinare la discretizzazione nei seguenti casi

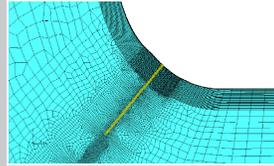


Corso Tecnologia Meccanica di Produzione – Tecnologie Fisiche Innovative - UNIFE

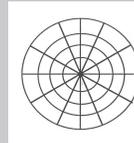
Pre-processing: suddivisione della struttura (meshing)

Tipi di Mesh

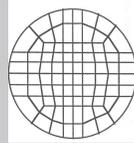
- Ibrida: composta da elementi di tipo differente (esempio triangolari e quadrangolari)



- Strutturata: i nodi vengono generati dall'intersezione di due famiglie di linee appartenenti al sistema di coordinate (cartesiane o curvilinee). Generalmente non sono ibride



- Non strutturata: sono molto più flessibili e consentono il meshing di geometrie complesse. Sono le più utilizzate



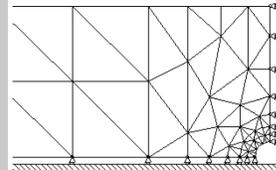
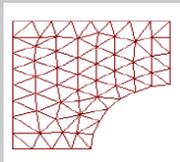
Pre-processing: suddivisione della struttura (meshing)

Legame tipo di elemento - mesh

L'utilizzo di elementi che permettono di modellare gli spostamenti con funzioni di grado più elevato rispetto al lineare riduce la necessità di remeshing e di infittimento della suddivisione nelle zone critiche



Utilizzo di funzioni di forma di ordine adeguato in funzione della zona in analisi



Pre-processing: attribuzione delle caratteristiche

Caratteristiche di geometria

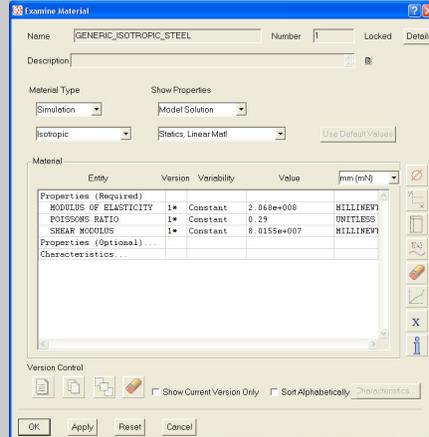
Sono generalmente dedotte dal modello CAD.

Nel caso di utilizzo di elementi mono o bidimensionali è necessario definire alcune caratteristiche geometriche (A, I, Ip, W,...)

Caratteristiche del materiale

Occorre definire:

- Modulo di Young
- Coefficiente di Poisson
- Densità (se non dedotta dal CAD)



Pre-processing: attribuzione vincoli e descrizione carichi

I vincoli ed i carichi sono applicati ai nodi

I simulatori permettono però di vincolare e caricare facce, spigoli o vertici trasportando le relazioni che ne conseguono ai nodi

Il risultato della descrizione dei carichi è il vettore dei carichi nodali [f]

L'inserimento di vincoli o spostamenti imposti (cedimenti vincolari) riduce le incognite del problema matematico, cioè del vettore degli spostamenti nodali [u]

$$[f] = [K][u]$$

Processing: numerazione di nodi ed elementi

La fase di processing ha come fine la generazione della matrice di rigidità, e la soluzione del sistema $[f]=[K][u]$

La matrice di rigidità può essere determinata sfruttando:

- Equilibrio, congruenza e legame (vedremo questo, anche se meno usato)

- Teorema dei lavori virtuali $\frac{1}{2} \int_V f u dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon dV$

Esempio: struttura di elementi biella (solo sforzo assiale)

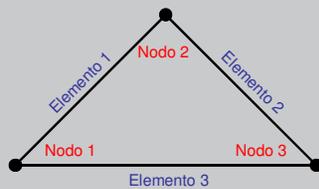
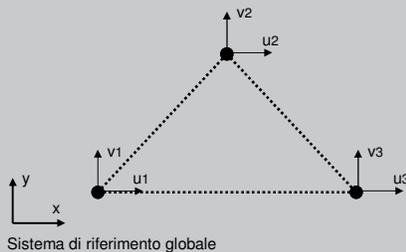


Tabella delle incidenze

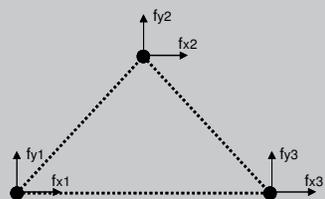
Elemento	Primo nodo	Secondo nodo
1	1	2
2	2	3
3	1	3

Processing: numerazione di nodi ed elementi



Vettore degli spostamenti nodali (gradi di libertà)

$$[u] = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$



Vettore dei carichi nodali

$$[f] = \begin{bmatrix} f_{x1} \\ f_{y1} \\ f_{x2} \\ f_{y2} \\ f_{x3} \\ f_{y3} \end{bmatrix}$$

Processing: rigidezza dell'elemento

Coordinate globali

$$[f]^{(1)} = \begin{bmatrix} f^{(1)}_{x1} \\ f^{(1)}_{y1} \\ f^{(1)}_{x2} \\ f^{(1)}_{y2} \end{bmatrix} \quad \text{Vettore dei carichi nodali dell'elemento}$$

$$[u]^{(1)} = \begin{bmatrix} u^{(1)}_1 \\ v^{(1)}_1 \\ u^{(1)}_2 \\ v^{(1)}_2 \end{bmatrix} = [D]^{(1)} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{Vettore degli spostamenti nodali dell'elemento}$$

$[D]^{(1)}$ = matrice topologica, matrice di 0 e 1

Bisogna determinare:

$$[f]^{(e)} = [K]^{(e)} [u]^{(e)} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} f^{(e)}_{x1} \\ f^{(e)}_{y1} \\ f^{(e)}_{x2} \\ f^{(e)}_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} & k_{13}^{(e)} & k_{14}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} & k_{23}^{(e)} & k_{24}^{(e)} \\ k_{31}^{(e)} & k_{32}^{(e)} & k_{33}^{(e)} & k_{34}^{(e)} \\ k_{41}^{(e)} & k_{42}^{(e)} & k_{43}^{(e)} & k_{44}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(e)}_1 \\ v^{(e)}_1 \\ u^{(e)}_2 \\ v^{(e)}_2 \end{bmatrix}$$

Processing: rigidezza dell'elemento in coordinate locali

Coordinate locali

1) Equilibrio

$$\begin{bmatrix} \tilde{f}_{x1}^{(e)} \\ \tilde{f}_{x2}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -N \\ N \end{bmatrix}$$

2) Congruenza

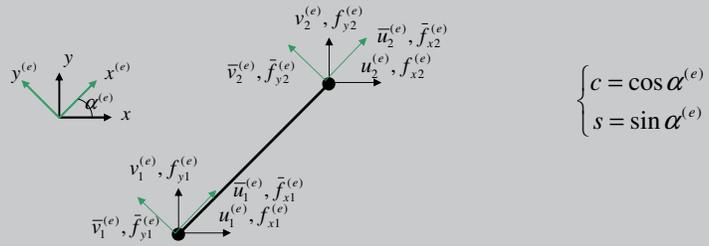
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l^{(e)}} = \frac{\bar{u}_2^{(e)} - \bar{u}_1^{(e)}}{l^{(e)}}$$

3) Legge:

$$N = E^{(e)} A^{(e)} \varepsilon$$

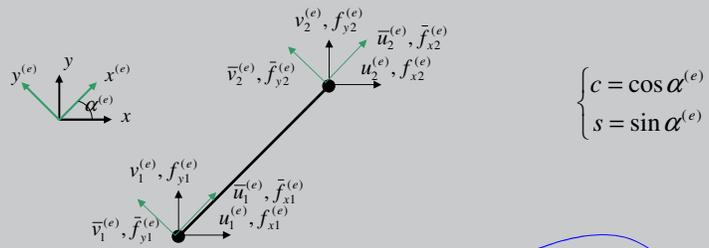
$$[f]^{(e)} = [K]^{(e)} [u]^{(e)} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \tilde{f}_{x1}^{(e)} \\ \tilde{f}_{x2}^{(e)} \end{bmatrix} = \frac{E^{(e)} A^{(e)}}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{(e)} \\ \bar{u}_2^{(e)} \end{bmatrix}$$

Processing: trasformazione degli spostamenti nodali



$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_1^{(e)} &= cu_1^{(e)} + sv_1^{(e)} \\ \bar{u}_2^{(e)} &= cu_2^{(e)} + sv_2^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad \begin{bmatrix} \bar{u}_1^{(e)} \\ \bar{u}_2^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{(e)} \\ v_1^{(e)} \\ u_2^{(e)} \\ v_2^{(e)} \end{bmatrix} \quad \bar{[u]}^{(e)} = [Q]^{(e)} [u]^{(e)}$$

Processing: trasformazione dei carichi nodali



$$\left. \begin{aligned} f_{x1}^{(e)} &= c\bar{f}_{x1}^{(e)} \\ f_{y1}^{(e)} &= s\bar{f}_{y1}^{(e)} \\ f_{x2}^{(e)} &= c\bar{f}_{x2}^{(e)} \\ f_{y2}^{(e)} &= s\bar{f}_{y2}^{(e)} \end{aligned} \right\} \quad \begin{bmatrix} f_{x1}^{(e)} \\ f_{y1}^{(e)} \\ f_{x2}^{(e)} \\ f_{y2}^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ s & 0 \\ 0 & c \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{f}_{x1}^{(e)} \\ \bar{f}_{y1}^{(e)} \\ \bar{f}_{x2}^{(e)} \\ \bar{f}_{y2}^{(e)} \end{bmatrix} \quad [f]^{(e)} = [Q]^{(e)T} \bar{[f]}^{(e)}$$

Processing: rigidezza dell'elemento in coordinate globali

$$\begin{array}{c} [f]^{(e)} = [Q]^{(e)T} [\bar{f}]^{(e)} \quad \bar{u}^{(e)} = [Q]^{(e)} [u]^{(e)} \\ \uparrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\ [\bar{f}]^{(e)} = [K]^{(e)} [\bar{u}]^{(e)} \end{array} \quad \longrightarrow \quad [f]^{(e)} = [K]^{(e)} [u]^{(e)}$$

$$[K]^{(e)} = [Q]^{(e)T} [\bar{K}]^{(e)} [Q]^{(e)}$$

$$[K]^{(e)} = \frac{E^{(e)} A^{(e)}}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix}$$

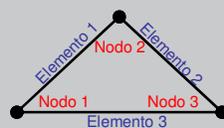
Corso Tecnologia Meccanica di Produzione – Tecnologie Fisiche Innovative - UNIFE

Processing: assemblaggio

Passaggio dalle matrici e dei vettori dei singoli elementi alla matrice ed ai vettori dell'intera struttura

Operativamente:

- si inizializza la matrice di rigidezza della struttura a 0
- per ogni elemento si scrive la matrice $[K]^{(e)}$ in coordinate globali
- ogni valore $k_{ij}^{(e)}$ della matrice di rigidezza dell'elemento viene sommato alla rigidezza della struttura nella posizione corrispondente (ricavabile dalla [tabella delle incidenze](#))



Elemento	Primo nodo	Secondo nodo
1	1	2
2	2	3
3	1	3

abbiamo

$$[f]^{(e)} = [K]^{(e)} [u]^{(e)}$$

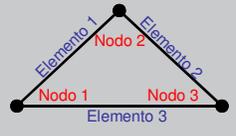
vogliamo

$$[f] = [K][u]$$

Corso Tecnologia Meccanica di Produzione – Tecnologie Fisiche Innovative - UNIFE

Processing: assemblaggio

Elemento 1



Elemento	Primo nodo	Secondo nodo
1	1	2
2	2	3
3	1	3

	nodo1	nodo2
nodo1	$k_{11}^{(1)}$ $k_{12}^{(1)}$ $k_{21}^{(1)}$ $k_{22}^{(1)}$	$k_{13}^{(1)}$ $k_{14}^{(1)}$ $k_{23}^{(1)}$ $k_{24}^{(1)}$
nodo2	$k_{31}^{(1)}$ $k_{32}^{(1)}$ $k_{41}^{(1)}$ $k_{42}^{(1)}$	$k_{33}^{(1)}$ $k_{34}^{(1)}$ $k_{43}^{(1)}$ $k_{44}^{(1)}$

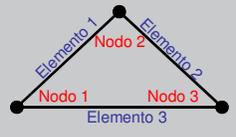
$[K]^{(1)}$

	nodo1	nodo2	nodo3
nodo1	$k_{11}^{(1)}$ $k_{12}^{(1)}$ $k_{21}^{(1)}$ $k_{22}^{(1)}$	$k_{13}^{(1)}$ $k_{14}^{(1)}$ $k_{23}^{(1)}$ $k_{24}^{(1)}$	0 0
nodo2	$k_{31}^{(1)}$ $k_{32}^{(1)}$ $k_{41}^{(1)}$ $k_{42}^{(1)}$	$k_{33}^{(1)}$ $k_{34}^{(1)}$ $k_{43}^{(1)}$ $k_{44}^{(1)}$	0 0
nodo3	0 0	0 0	0 0

$[K]$

Processing: assemblaggio

Elemento 3



Elemento	Primo nodo	Secondo nodo
1	1	2
2	2	3
3	1	3

	nodo1	nodo3
nodo1	$k_{11}^{(3)}$ $k_{12}^{(3)}$ $k_{21}^{(3)}$ $k_{22}^{(3)}$	$k_{13}^{(3)}$ $k_{14}^{(3)}$ $k_{23}^{(3)}$ $k_{24}^{(3)}$
nodo3	$k_{31}^{(3)}$ $k_{32}^{(3)}$ $k_{41}^{(3)}$ $k_{42}^{(3)}$	$k_{33}^{(3)}$ $k_{34}^{(3)}$ $k_{43}^{(3)}$ $k_{44}^{(3)}$

$[K]^{(3)}$

	nodo1	nodo2	nodo3
nodo1	$k_{11}^{(1)} + k_{11}^{(3)}$ $k_{12}^{(1)} + k_{12}^{(3)}$ $k_{21}^{(1)} + k_{21}^{(3)}$ $k_{22}^{(1)} + k_{22}^{(3)}$	$k_{13}^{(1)}$ $k_{14}^{(1)}$ $k_{23}^{(1)}$ $k_{24}^{(1)}$	$k_{13}^{(3)}$ $k_{14}^{(3)}$ $k_{23}^{(3)}$ $k_{24}^{(3)}$
nodo2	$k_{31}^{(1)}$ $k_{32}^{(1)}$ $k_{41}^{(1)}$ $k_{42}^{(1)}$	$k_{33}^{(1)} + k_{33}^{(2)}$ $k_{34}^{(1)} + k_{34}^{(2)}$ $k_{43}^{(1)} + k_{43}^{(2)}$ $k_{44}^{(1)} + k_{44}^{(2)}$	$k_{13}^{(2)}$ $k_{14}^{(2)}$ $k_{23}^{(2)}$ $k_{24}^{(2)}$
nodo3	$k_{31}^{(3)}$ $k_{32}^{(3)}$ $k_{41}^{(3)}$ $k_{42}^{(3)}$	$k_{31}^{(2)}$ $k_{32}^{(2)}$ $k_{41}^{(2)}$ $k_{42}^{(2)}$	$k_{33}^{(2)} + k_{33}^{(3)}$ $k_{34}^{(2)} + k_{34}^{(3)}$ $k_{43}^{(2)} + k_{43}^{(3)}$ $k_{44}^{(2)} + k_{44}^{(3)}$

$[K]$

Processing: soluzione

Soluzione di un sistema con numero di equazioni pari al numero di incognite

$$[f] = [K][u] \rightarrow [u] = [K]^{-1}[f]$$

Si ricavano gli spostamenti nodali invertendo la matrice di rigidità

La matrice di rigidità in realtà non si inverte, ma si sfrutta la sua caratteristica di essere sparsa per risolvere il sistema con procedimenti iterativi

Processing: stress recovery

Procedimento che porta dagli spostamenti nodali agli sforzi negli elementi

E' una sorta di disassemblaggio: dai dati generali ai dati dei singoli elementi. I passi formali sono:

1. Creazione degli spostamenti nodali di ciascun elemento nel sistema di riferimento globale

$$[u]^{(e)} = [D]^{(e)}[u]$$

2. Trasformazione degli spostamenti nodali dell'elemento nel sistema di riferimento locale

$$[\bar{u}]^{(e)} = [Q]^{(e)}[u]^{(e)}$$

Processing: stress recovery

4. Utilizzo delle funzioni di forma per valutare il campo degli spostamenti all'interno dell'elemento

$$[U] = [\Phi][u]^{(e)}$$

5. Attraverso la congruenza si determinano le deformazioni

$$[\varepsilon] = [\partial]^T [U]$$

6. Tramite il legame costitutivo si passa dalle deformazioni agli sforzi

$$[\sigma] = [E][\varepsilon]$$

In realtà i programmi calcolano gli sforzi in alcuni punti notevoli poi effettuano una interpolazione delle tensioni (ulteriore semplificazione e quindi approssimazione)

Processing: stress recovery

Il campo delle tensioni all'interno di un elemento ha un andamento che dipende dal grado della funzione di forma:

- funzione di forma lineare: deformazioni e tensioni costanti nell'elemento
- funzione di forma quadratica: deformazioni e tensioni lineari nell'elemento

Le tensioni all'interno di un elemento dipendono dagli spostamenti di tutti i suoi nodi: avendo gli elementi contigui solo alcuni nodi comuni sui confini ci sono "salti" di tensione (interelement jumps) che sono tanto più piccoli quanto:

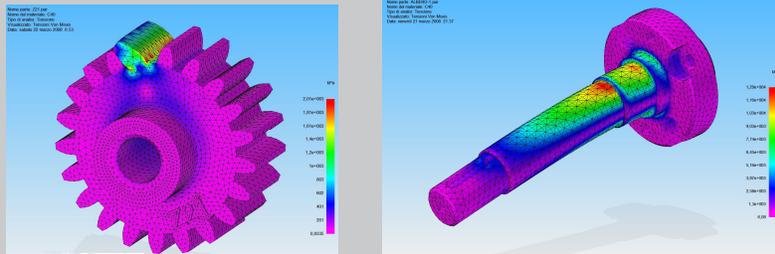
- più fine è la mesh
- più alto è grado della funzione di forma

I programmi utilizzano tecniche di smoothing per ricreare la continuità del campo delle tensioni e delle deformazioni (ulteriore approssimazione)

Post-processing: restituzione grafica

L'output (spostamenti, deformazioni, tensioni) di tutti i programmi è ovviamente in forma grafica

Gli spostamenti si possono amplificare a piacere per apprezzarne gli effetti



Post-processing: valutazione degli errori

I tipi di errori di una analisi agli elementi finiti possono essere correlati a tre fattori:

1. grado di dettaglio della mesh non sufficiente

- affinando in step successivi la mesh i programmi sono generalmente in grado di dare una risposta in merito alla affidabilità della simulazione
- si misurano i residui:

$$[r] = [K][u] - [f]$$

e si confrontano alle forze applicate al modello

Post-processing: valutazione degli errori

2. modellazione non corretta del sistema fisico

- la modellazione dei vincoli, dei carichi, delle interazioni tra corpi è complessa, ed la scelta del tipo di elemento molto importante
- occorre fare una verifica delle reazioni vincolari (equilibrio globale della struttura) o delle tensioni su un modello fortemente semplificato per capire l'attendibilità dei dati (compito principale del tecnico)

3. errori di programmazione del software

- Se il modello è stato descritto o studiato in letteratura si può fare una verifica
- Può rendersi necessaria l'analisi fatta con programmi differenti, poiché la probabilità che due programmi abbiano lo stesso errore nel software è bassissima

Post-processing: interpretazione dei risultati

Gli sforzi ricavati con gli elementi finiti rappresentano lo stato tensionale equivalente, caratterizzato dallo stesso grado di pericolosità dello stato tensionale reale

L'output è quindi l'andamento della tensione ideale: tensione che in regime monoassiale risulta pericolosa quanto lo stato tensionale reale

La tensione ideale, determinata tramite un criterio di resistenza, deve essere confrontata con la tensione ammissibile del materiale, ricavata dividendo la tensione limite (snervamento o rottura) per il coefficiente di sicurezza

Orientando opportunamente le facce del cubo elementare (direzioni principali) il vettore delle tensioni ha le tensioni tangenziali nulle, e le tensioni rimanenti si definiscono tensioni principali



$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

Criteri di resistenza

Criterio di Rankine

Il materiale si danneggia quando la tensione principale massima raggiunge un valore critico. E' valido per materiali fragili

$$\sigma_{id} = \max\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

Criterio di Tresca

Il materiale si danneggia quando la massima tensione tangenziale raggiunge un valore critico. E' valido per materiali duttili

$$\sigma_{id} = \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|\}$$

Criterio di Von Mises

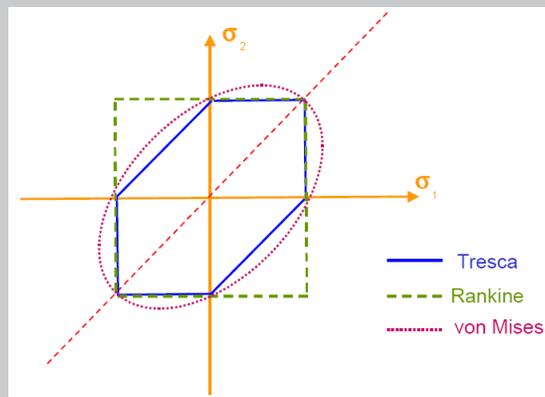
Il materiale si danneggia quando l'energia di distorsione raggiunge un valore critico. E' valido per materiali duttili

$$\sigma_{id} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}}$$

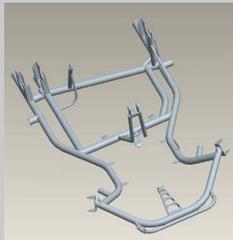
Criteri di resistenza

Confronto tra i criteri

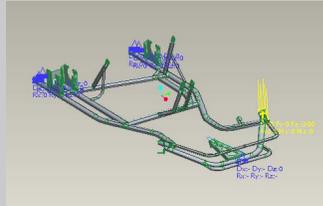
Nel caso di stato di tensione piano:



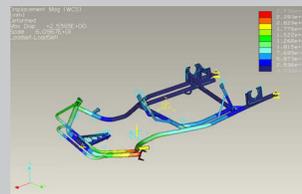
Esempio: telaio



modello CAD

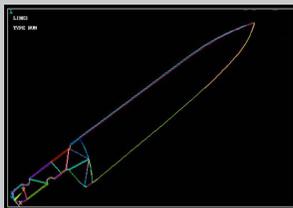


modello FEM caricato e vincolato

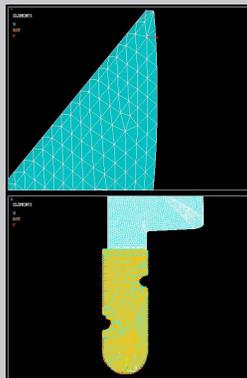


visualizzazione degli spostamenti

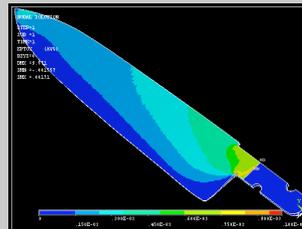
Esempio: coltello



modello CAD



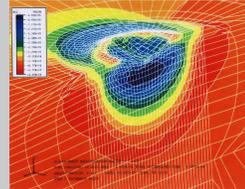
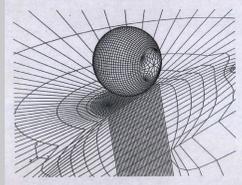
modello FEM caricato e vincolato



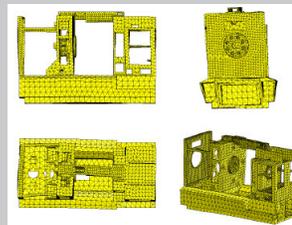
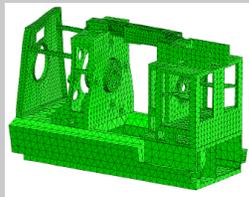
visualizzazione delle tensioni

Altri campi di applicazione

- Analisi in campo non lineare e plastico



- Analisi dinamiche e modali



Corso Tecnologia Meccanica di Produzione – Tecnologie Fisiche Innovative - UNIFE

Fasi di utilizzo e benefici del FEM

Fasi di utilizzo

Mediante i software FEM sono utilizzati nelle seguenti fasi:

- ideazione e pre-progetto (60%)
- avanzamento progetto e validazione finale (30%)
- verifiche per difettosità (10%)

Integrazione con
il CAD

Principali benefici

- incremento della qualità di prodotto (67%) → maggiori volumi o maggior prezzo
- riduzione delle difettosità e delle rotture (59%)
- riduzione del numero di prototipi necessari (56%)
- riduzione del time to market (35%)

dati Cosmos

Corso Tecnologia Meccanica di Produzione – Tecnologie Fisiche Innovative - UNIFE

Parole chiave

- Equilibrio, legame, congruenza
- Funzione di forma
- Meshing
- Vincoli e carichi
- Matrice di rigidezza
- Errori
- Integrazione