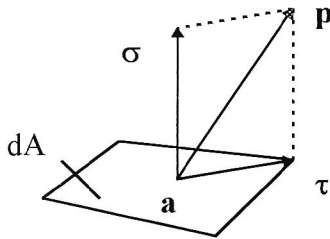


CENNI SULLA TEORIA DELL'ELASTICITA'

1.1 STATO GENERALE DI TENSIONE



Sia **a** il punto all'interno di un corpo sollecitato da forze esterne. Sia **dA** un elemento di superficie piana del corpo, idealmente sezionato. Sull'elemento di area **dA**, agisce una forza elementare **dF** che si può ritenere uniformemente distribuita sulla stessa area **dA**. Sull'unità di superficie dell'elemento **dA** viene esercitata una forza $\mathbf{p} = dF/dA$ $[N/mm^2]$ definita tensione interna nel punto **a**.

La tensione **p** risulta generalmente inclinata rispetto alla normale all'elemento **dA**. La componente di **p** normale all'elemento **dA** viene definita tensione normale σ , mentre la componente di **p** che giace sul piano di **dA** viene definita tensione tangenziale τ .

La tensione totale **p** varia al variare della giacitura dell'elemento di superficie piana **dA** attorno al punto **a** e varia al variare della posizione del punto **a** all'interno del corpo. La tensione quindi, è funzione sia del punto che della giacitura.

Attorno al punto **a** esistono tre piani tra loro ortogonali, sui quali compaiono solo tensioni normali; questi piani a tensione tangenziale nulla, vengono detti piani principali e le tensioni normali che li sollecitano vengono chiamate tensioni normali principali ed indicate in ordine crescente di grandezza algebrica con $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Le tre tensioni principali, comprendono tra loro la massima e la minima tensione nel punto **a**.

Esiste inoltre una terna di piani inclinata di 45° rispetto ai piani principali, dove le tensioni tangenziali assumono i valori massimi e vengono chiamate tensioni tangenziali principali ed indicate con i simboli $\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$.

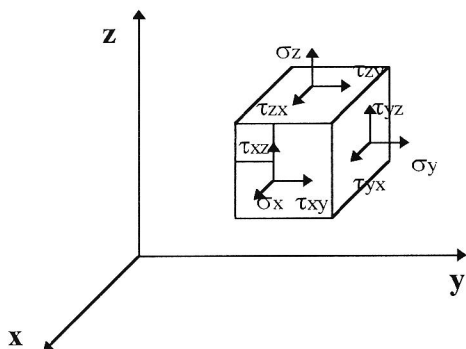
I valori di dette tensioni sono rispettivamente

$$\tau_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 ; \tau_{23} = (\sigma_2 - \sigma_3)/2 ; \tau_{31} = (\sigma_3 - \sigma_1)$$

Note quindi le tre tensioni normali principali, è noto lo stato di tensione attorno al punto **a**.

1.2 ELASTICITA' A TRE DIMENSIONI

1.2.1 Le componenti della tensione



Il cubetto elementare di figura ha i lati dx, dy, dz orientati come la terna ortogonale. Su una faccia **dA** agisce una tensione **p** generalmente inclinata rispetto alla normale a **dA**, che si può decomporre secondo i tre assi **x, y, z**. Per ogni faccia di area **dA**, esistono quindi una tensione normale e due tensioni tangenziali rispettivamente indicate con

$$\sigma_x ; \tau_{xy} ; \tau_{xz}$$

$$\sigma_y ; \tau_{yz} ; \tau_{yx}$$

$$\sigma_z ; \tau_{zx} ; \tau_{zy}$$

Sulle facce opposte a quelle di figura, le tensioni subiscono una variazione pari al differenziale parziale delle tensioni stesse, rispetto alla variabile corrispondente all'asse su cui ci si muove per passare da una faccia all'altra parallela.

Le tensioni, a meno di infinitesimi di ordine superiore, possono pensarsi uniformemente distribuite sulle facce stesse e quindi le forze agenti sulle singole facce sono uguali al prodotto delle componenti delle tensioni per l'area della corrispondente faccia.

Se si considera l'equilibrio alla rotazione attorno all'asse verticale passante per il baricentro, si ha

$$\tau_{yx}dx dz (dy/2) + [\tau_{yx} + (\partial\tau_{yx}/\partial y)dy]dx dz (dy/2) = \tau_{xy}dy dz (dx/2) + [\tau_{xy} + (\partial\tau_{xy}/\partial x)dx]dy dz (dx/2)$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, si ha

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z \text{ (tensione tangenziale agente sull'elemento piano normale a } z \text{)}$$

ed analogamente

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \tau_y$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \tau_x$$

Se si considera l'equilibrio alla traslazione secondo l'asse x, si ha

$$[\sigma_x + (\partial\sigma_x/\partial x)dx]dy dz - \sigma_x dy dz + [\tau_z + (\partial\tau_z/\partial y)dz dx - \tau_z dz dx] + [\tau_y + (\partial\tau_y/\partial z)dx dy - \tau_y dx dy] = 0$$

trascurando gli infinitesimi di ordine superiore si ottiene

$$\partial\sigma_x/\partial x + \partial\tau_z/\partial y + \partial\tau_y/\partial z = 0$$

$$\partial\sigma_y/\partial y + \partial\tau_x/\partial z + \partial\tau_z/\partial x = 0$$

$$\partial\sigma_z/\partial z + \partial\tau_y/\partial x + \partial\tau_x/\partial y = 0$$

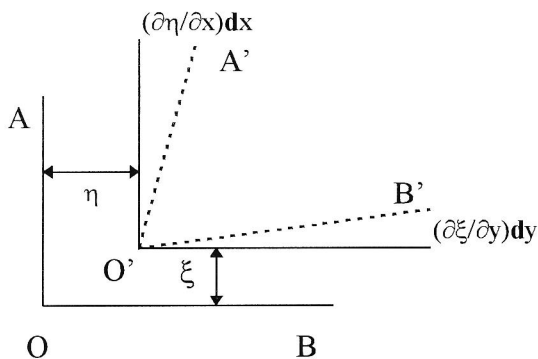
Se sono note le 6 tensioni $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ relative ad una terna di piani ortogonali intersecantisi in un dato punto, le tre tensioni normali principali sono ricavabili dalla seguente equazione di terzo grado

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_x^2 - \tau_y^2 - \tau_z^2)\sigma - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_x^2 - \sigma_y\tau_y^2 - \sigma_z\tau_z^2 + 2\tau_x\tau_y\tau_z) = 0$$

Dalla teoria delle equazioni di terzo grado risulta pure che

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

1.2.2 Le componenti della deformazione



Le estensioni e gli scorrimenti unitari relativi agli assi x, y, z, possono essere rappresentati come in figura, nella quale un punto O generico di coordinate x, y, z, dopo la deformazione dovuta alle tensioni interne, si sposta nel punto O'.

La figura AOB assume, a deformazione avvenuta, la configurazione A'O'B'.

Indichiamo con ξ, η, θ , le componenti dello spostamento del punto O secondo gli assi x, y, z. Queste componenti variano con la posizione del punto O nello spazio, altrimenti si avrebbe solo una traslazione rigida del sistema.

Le componenti ξ, η, θ , sono quindi funzioni continue di x, y, z. Se si considera il punto A situato sull'asse delle x a distanza da O, dx , il suo spostamento lungo l'asse Ox sarà

$$\zeta + (\partial\zeta/\partial x)dx$$

L'elemento dx ha quindi subito, per effetto della deformazione, una variazione di lunghezza $(\partial\zeta/\partial x)dx$.

La dilatazione unitaria in direzione dell'asse x sarà quindi

$$\epsilon_x = \partial\zeta/\partial x$$

ed analogamente si avrà

$$\epsilon_y = \partial\eta/\partial y$$

$$\epsilon_z = \partial\theta/\partial z.$$

Confondendo il valore del seno con l'angolo, la misura dell'angolo formato dai segmenti O'A' ed OA, vale $\gamma_1 = \partial\eta/\partial x$; analogamente l'angolo tra OB ed O'B' vale $\gamma_2 = \partial\xi/\partial y$.

L'angolo AOB retto, ha quindi subito per effetto della deformazione, una variazione totale

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = (\partial\eta/\partial x) + (\partial\xi/\partial y)$$

chiamata distorsione o scorrimento. Analogamente

$$\gamma_{yz} = (\partial\theta/\partial y) + (\partial\eta/\partial z)$$

$$\gamma_{zx} = (\partial\xi/\partial z) + (\partial\theta/\partial x)$$

Si sono in tal modo determinate le sei componenti della deformazione $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ in funzione delle sole ξ, η, θ .

Eliminando dalle sei equazioni che rappresentano le componenti della deformazione ξ, η, θ , si ottengono tre equazioni che legano tra loro le sei componenti della deformazione relative ad un dato punto di coordinate x, y, z del corpo sollecitato. Tenuto conto di questo e facendo le derivate parziali rispetto agli scorrimenti γ , si ottengono le seguenti espressioni, le quali esprimono che la deformazione elastica deve essere continua:

$$\partial^2 \gamma_{xy} / \partial x \partial y = \partial^2 \epsilon_x / \partial y^2 + \partial^2 \epsilon_y / \partial x^2$$

$$\partial^2 \gamma_{yz} / \partial y \partial z = \partial^2 \epsilon_y / \partial z^2 + \partial^2 \epsilon_z / \partial y^2$$

$$\partial^2 \gamma_{zx} / \partial z \partial x = \partial^2 \epsilon_z / \partial x^2 + \partial^2 \epsilon_x / \partial z^2$$

Se una sfera molto piccola ha centro nel punto O, dopo la deformazione diventa un ellissoide a tre assi; le direzioni dei tre assi principali dell'ellissoide vengono chiamate direzioni principali della deformazione e lungo queste tre direzioni si hanno solo allungamenti o contrazioni. Questi allungamenti principali vengono indicati in ordine crescente di grandezza algebrica con $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$. I valori massimo e minimo degli allungamenti che si verificano nel punto O, sono compresi fra questi valori. Si ha inoltre che

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

Questa somma ha un significato fisico importante, in quanto rappresenta la variazione di volume

$$dv/V = dv/dxdydz$$

di un cubetto elementare di lati dx, dy, dz (dilatazione cubica); si ha quindi

$$\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = \theta = dv/V$$

Per i corpi isotropi le direzioni delle tensioni normali principali coincidono con quelle degli allungamenti principali. Lungo le altre direzioni, oltre agli allungamenti possono aversi anche distorsioni. Esistono inoltre tre piani principali di scorrimento in cui le normali subiscono le distorsioni principali:

$$\gamma_{12} = (\epsilon_1 - \epsilon_2)$$

$$\gamma_{23} = (\epsilon_2 - \epsilon_3)$$

$$\gamma_{31} = (\epsilon_3 - \epsilon_1)$$

Per i corpi isotropi, questi piani coincidono con quelli a cui corrispondono le tensioni tangenziali principali.

1.2.3 Le relazioni fra le componenti della tensione e le componenti della deformazione

In base alla legge di linearità generalizzata di Hooke, per i corpi isotropi e per gli stati di tensione a tre dimensioni, si ammette che per tensioni ed allungamenti della stessa specie e relativi alla stessa direzione, vale il principio di sovrapposizione degli effetti dal quale discende che

$$\varepsilon_x = (1/E)[\sigma_x - (1/m)(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$\varepsilon_y = (1/E)[\sigma_y - (1/m)(\sigma_z + \sigma_x)]$$

$$\varepsilon_z = (1/E)[\sigma_z - (1/m)(\sigma_x + \sigma_y)]$$

$$\gamma_{xy} = \tau_{xz}/G$$

$$\gamma_{yz} = \tau_{xy}/G$$

$$\gamma_{zx} = \tau_{yz}/G$$

Sommando membro a membro le tre equazioni relative agli allungamenti si ottiene che la dilatazione cubica $\theta = dv/V$ è proporzionale alla tensione normale media (principale)

$$\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3 .$$

Si può quindi concludere che le tensioni normali principali producono una variazione di volume, mentre le tensioni di scorrimento principali producono una variazione di forma .