Prova scritta di Analisi I
Corso di Laurea Triennale in Chimica

12 febbraio 2018

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:
$$\sqrt{3 + 2\,x - x^2} \leq \frac{x-1}{3};$$

2. Sia
$$A = \left\{ \frac{n+3}{n^2 - 2\,n + 4},\ n \in \mathcal{N} = \{1, 2, 3, \cdots\} \right\}$$
Calcolare sup A ed inf A e dire se sono massimo e minimo elementi di A;

3. Studiare la funzione:
$$f(x) = (x^2 + 2\,x)e^{-x}$$
e disegnarne il grafico;

4. Calcolare i seguenti integrali:
$$\int_0^{\pi} x^2\, \sin(2\,x)\, dx, \quad \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 3\,x + 2}\, dx;$$

5. Dire se la seguente serie numerica:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n + 3}$$
è convergente.

Correzione

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:

$$\sqrt{3+2\,x-x^2} \leq \frac{x-1}{3}.$$

Deve essere $3+2\,x-x^2 \geq 0$ e quindi $x \in [-1,3]$. D'altra parte se $x-1 \leq 0$, la diseguaglianza da studiare non è verificata. Infine se $x \geq 1$, la diseguaglianza è equivalente a quella che si ottiene elevando al quadrato. Pertanto se $x \geq 1$:

$$\sqrt{3+2\,x-x^2} \leq \frac{x-1}{3} \Longleftrightarrow 3+2\,x-x^2 \leq \frac{x^2-2\,x+1}{9} \Longleftrightarrow 5\,x^2-10\,x-13 \geq =$$

Osserviamo infine che le radici dell'ultimo polinomio di secondo grado sono

$$x_{1\,2} = \frac{5 \mp \sqrt{90}}{5}$$

Siccome $x_2 < 3$, possimo concludere che la diseguaglianza iniziale è verificata se e solo se

$$x \in \left[\frac{5+\sqrt{90}}{5}, 3\right]$$

2. Sia

$$A = \left\{\frac{n+2}{n^2-2\,n+4},\ n \in \mathcal{N} = \{1,2,3,\cdots\}\right\}$$

Calcolare sup A ed inf A e dire se sono massimo e minimo elementi di A.

Posto

$$a_n = \frac{n+3}{n^2-2\,n+4},$$

Verichiamo che la successione a_n è strettamente decrescente, infatti

$$a_{n+1} < a_n \Longleftrightarrow \frac{n+4}{n^2+3} < \frac{n+3}{n^2-2\,n+4} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow n^3-2\,n^2+4\,n+4\,n^2-8\,n+16 < n^3+3\,n^2+3\,n+9 \Longleftrightarrow n^2+7\,n-7 > 0$$

Le radici dell'ultimo polinomio di secondo grado in n sono

$$n_{1\,2} = \frac{-7 \mp \sqrt{77}}{2}$$

e siccome $n_2 < 1$, possima concludere che $\forall n \in \mathcal{N},\ n^2+7\,n-7 > 0$. Possiamo allora concludere che

$$\sup A = a_1 = \frac{4}{3}$$

$$\inf A = \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \notin A$$

Pertanto l'insieme A non ha elemento minimo.

3. Studiare la funzione:

$$f(x) = (x^2 + 2\,x)e^{-x}$$

e disegnarne il grafico.

La funzione è definita $\forall x \in \mathcal{R}$ ed è positiva per $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.

Risulta inoltre:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

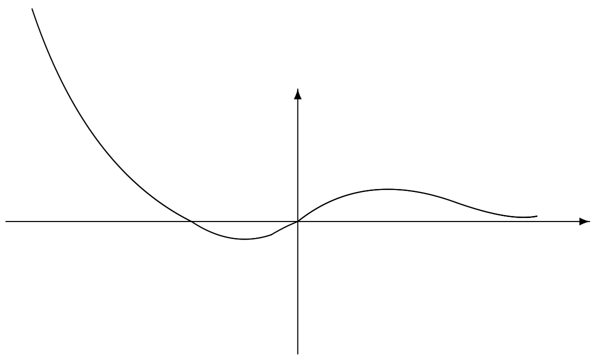
Derivando, si ottiene:

$$f'(x) = e^{-x}(-x^2 - 2\,x + 2\,x + 2) = e^{-x}(2 - x^2)$$

La derivata è quindi positiva se e solo se $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Il punto $x = -\sqrt{2}$ è un punto di minimo relativo, mentre il punto $x = \sqrt{2}$ è un punto di massimo relativo. Passando alla derivata seconda, si ottiene:

$$f''(x) = e^{-x}(-2 + x^2 - 2\,x) = e^{-x}(x^2 - 2\,x - 2)$$

Le radici del polinomio di secondo grado in parentesi tonda sono $x_{1\,2} = 1 \mp \sqrt{3}$ Pertanto $f''(x) > 0$ se e solo se $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$ e quindi x_1 ed x_2 sono flessi per f. Il grafico è pertanto del tipo:



4. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^{\pi} x^2\,\sin(2\,x)\,dx, \quad \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 3\,x + 2}\,dx;$$

Integrando per parti due volte si ottiene:

$$\int_0^{\pi} x^2\,\sin(2\,x)\,dx = -x^2\frac{\cos(2\,x)}{2}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x\,\cos(2\,x)\,dx =$$

$$= -\frac{\pi^2}{2} + \left[x\frac{\sin(2\,x)}{2}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(2\,x)\,dx\right] = -\frac{\pi^2}{2} + \left[-\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(2\,x)}{2}\Big|_0^{\pi}\right)\right] = -\frac{\pi^2}{2}.$$

Facendo la divisione tra i due polinomi, si ottiene in primo luogo che $x^3 = (x^2 + 3\,x + 2)(x - 3) + 7\,x + 6$ e quindi

$$\frac{x^3}{x^2 + 3\,x + 2} = x - 3 + \frac{7\,x + 6}{x^2 + 3\,x + 2} = x - 3 + \frac{7\,x + 6}{(x + 2)(x + 1)}$$

Usiamo infine la decomposizione

$$\frac{7\,x + 6}{(x + 2)(x + 1)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 1} = \frac{A(x + 1) + B(x + 2)}{(x + 2)(x + 1)}$$

Deve quindi essere $A + B = 7$ e $A + 2\,B = 6$ e quindi $A = 8$ e $B = -1$. Possiamo quindi concludere che:

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 3\,x + 2}\,dx = \int_0^1 \left(x - 3 + \frac{8}{x + 2} - \frac{1}{x + 1} \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - 3\,x + 8 \log|x + 2| - \log|x + 1| \right) \Bigg|_0^1$$

—

5. Dire se la seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{2^n + 3}$$

è convergente.

Posto

$$a_n = \frac{n + 1}{2^n + 3}$$

si ottiene

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n + 2}{n + 1} \; \frac{1 + 3\,2^{-n}}{2\,(1 + 3\,2^{-n-1})} = \frac{1}{2}$$

Pertanto la serie è convergente.