Prova scritta di Analisi I
Corso di Laurea Triennale in Chimica

24 gennaio 2018

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:
$$\frac{x+1}{2\,x-1} + \frac{x-2}{3\,x+1} \leq 1;$$

2. Sia
$$A = \left\{ \sqrt{n^2 + 2\,n + 3} - n,\ n \in \mathcal{N} = \{1, 2, 3, \cdots\} \right\}$$
Calcolare sup A ed inf A e dire se sono massimo e minimo elementi di A;

3. Studiare la funzione:
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 4\,x + 4},$$
e disegnarne il grafico;

4. Calcolare i seguenti integrali:
$$\int_0^1 x^2 \, \log(x^2 + 5)\, dx, \quad \int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx;$$

5. Dire se la seguente serie numerica:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{n^2 + 3}$$
è convergente.

Correzione

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza:

$$\frac{x+1}{2\,x-1} + \frac{x-2}{3\,x+1} \leq 1;$$

Risulta:

$$\frac{x+1}{2\,x-1} + \frac{x-2}{3\,x+1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(3\,x+1)+(2\,x-1)(x-2)-(2\,x-1)(3\,x+1)}{(2\,x-1)(3\,x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{(2\,x-1)(3\,x+1)} \geq 0$$

Ne deriva quindi che la diseguaglianza vale se e solo se

$$x \in (-\infty, -2] \cup \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup [2, +\infty)$$

2. Sia

$$A = \left\{\sqrt{n^2+2\,n+3} - n,\ n \in \mathcal{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}\right\}$$

Calcolare $\sup A$ ed $\inf A$ e dire se sono massimo e minimo elementi di A;

Ricordiamo che $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante dell'insieme A se e solo se

$$\sqrt{n^2+2\,n+3} - n \leq b \ \forall n \in \mathcal{N}$$

Ora, supponendo $b > 0$:

$$\sqrt{n^2+2\,n+3} - n \leq b \Leftrightarrow \sqrt{n^2+2\,n+3} \leq n+b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2+2\,n+3 \leq n^2+2\,n\,b+b^2 \Leftrightarrow 2(1-b)n \leq b^2-3$$

Ora se $b = 1$ l'ultima diseguaglianza diventa $0 \leq -2$ che è falsa, deve quindi essere $b > 1$ e la diseguaglianza diventa, tenendo conto che $1 - b < 0$:

$$n \geq \frac{b^2-3}{2(1-b)}$$

Possiamo concludere quindi che $b \in \mathcal{R}$ è maggiorante se e solo se $b > 1$ e

$$1 \geq \frac{b^2-3}{2(1-b)} \Leftrightarrow 2 - 2\,b \leq b^2 - 3 \Leftrightarrow b^2 + 2\,b - 5 \geq 0 \Leftrightarrow b \geq -1 + \sqrt{6}$$

Allora $\sup A = \sqrt{6} - 1 = a_1 = \max A$.

D'altra parte $d \in \mathcal{R}$ è un minorante dell'insieme A se e solo se

$$\sqrt{n^2+2\,n+3} - n \geq d \ \forall n \in \mathcal{N}$$

È chiaro che deve essere $d \leq 1$. Quindi, supponendo sempre $d > 0$ si ha:

$$\sqrt{n^2+2\,n+3} - n \geq d \Leftrightarrow \sqrt{n^2+2\,n+3} \geq n+d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 2\,n + 3 \geq n^2 + 2\,n\,d + d^2 \Leftrightarrow 2(1-d)n \geq d^2 - 3$$

Ora se $d = 1$ l'ultima diseguaglianza diventa $0 \geq -2$ che è vera e quindi $d = 1$ è un minorante. Infine se $d > 1$ e la diseguaglianza diventa, tenendo conto che $1 - d < 0$:

$$n \leq \frac{d^2 - 3}{2(1-d)}$$

Pertanto se $d > 1$, d non è minorante. Possiamo quindi concludere che $\inf A = 1 \notin A$. Siccome $1 \notin A$, l'insieme A non ha minimo.

3. Studiare la funzione:
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 4\,x + 4},$$
e disegnarne il grafico;

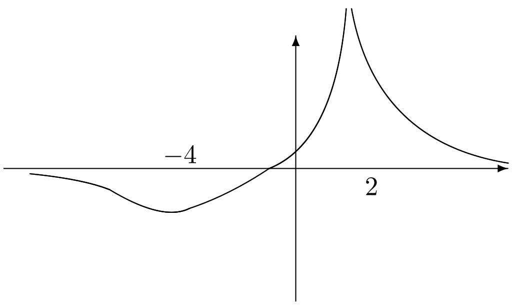
   La funzione è definita $\forall x \in \mathcal{R},\ x \neq 2$ ed è positiva per $x > 1$.

   Risulta inoltre:
$$\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

   Derivando, si ottiene:
$$f'(x) = \frac{(x-2)^2 - 2(x+1)(x-2)}{(x-2)^4} = -\frac{x+4}{(x-2)^3}$$

   La derivata è quindi positiva se e solo se $x \in (-4, 2)$. Il punto $x = -4$ è un punto di minimo relativo. Passando alla derivata seconda, si ottiene:
$$f''(x) = -\frac{(x-2)^3 - 3(x+1)(x-2)^2}{(x-2)^6} = 2\,\frac{x+7}{(x-2)^4}$$

   Pertanto $f''(x) > 0$ se e solo se $x > -7$ e quindi $x = -7$ è un flesso per f. Il grafico è pertanto del tipo:



4. Calcolare i seguenti integrali:
$$\int_0^1 x^2\,\log(x^2+5)\,dx, \quad \int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx;$$

Integrando per parti, si ottiene:

$$\int_0^1 x^2 \log(x^2+5)\,dx = \frac{x^3}{3}\log(x^2+5)\Big|_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+5}\,dx$$

D'altra parte

$$\frac{x^4}{x^2+5} = x^2 - 5 + \frac{25}{x^2+5} = x^2 - 5 + 5\,\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

In conclusione

$$\int_0^1 x^2 \log(x^2+5)\,dx = \frac{x^3}{3}\log(x^2+5)\Big|_0^1 - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3} - 5\,x + 5\sqrt{5}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)\right)\Big|_0^1$$

Usando la sostituzione $x = 2\sin t$, si ottiene:

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} 4\sin^2 t\sqrt{4-4\sin^2 t}\,2\cos t\,dt = 16\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,\cos^2 t\,dt$$

Usando infine la formula trigonometrica

$$\sin^2 t\,\cos^2 t = \left(\frac{\sin(2\,t)}{2}\right)^2 = \frac{1}{8}\,(1-\cos(4\,t))$$

si può concludere che

$$\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,dx = 2\left(t - \frac{\sin(4\,t)}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \pi.$$

5. Dire se la seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sqrt{n}}{n^2+3}$$

è convergente.

Posto

$$a_n = \frac{n+\sqrt{n}}{n^2+3}$$

si ottiene

$$\lim_{n\to\infty} n\,a_n = 1$$

Pertanto la serie di termine generale a_n si comporta come la serie di termine generale $1/n$, ossia diverge.