Prova scritta di Analisi I
Corso di Laurea Triennale in Chimica

20 giugno 2018

1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza
$$\frac{x+3}{x} - \frac{x+1}{x+2} \geq 3$$

2. Sia
$$A = \left\{ \sqrt{4\,x^2 - x + 2} - 2\,x, \;\; x \in \mathcal{R} \right\}$$
Calcolare l'estremo superiore ed inferiore di A.

3. Studiare la seguente funzione
$$f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{x+2}$$
e disegnarne il grafico.

4. Calcolare i seguenti integrali
$$\int_0^{\pi} x^2(1+\cos x)dx, \quad \int_0^1 \frac{x^3+x}{x^3+3x+2}dx$$

5. Studiare il comportamento della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+n^2}{3^n+1}$$

Correzione

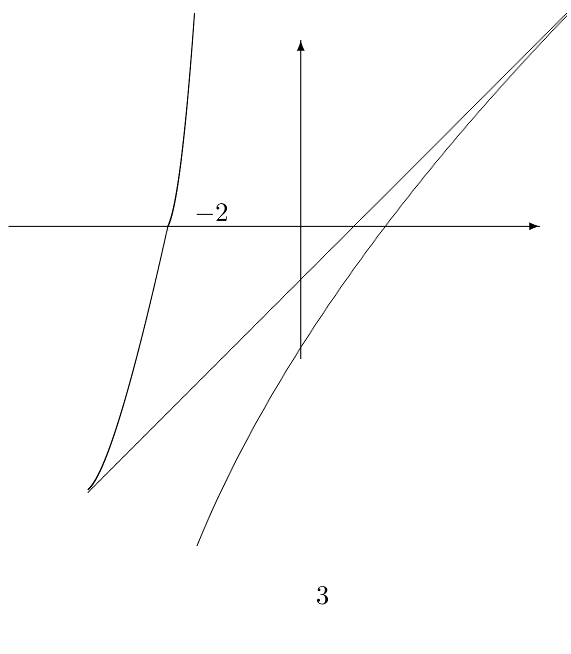
1. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la diseguaglianza
$$\frac{x+3}{x} - \frac{x+1}{x+2} \geq 3$$
Risulta:
$$\frac{x+3}{x} - \frac{x+1}{x+2} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x+2) - x(x+1) - 3\,x(x+2)}{x\,(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{3\,x^2 + 2\,x - 6}{x(x+2)} \leq 0$$
Siccome il polinomio di secondo grado a numeratore ha come soluzioni
$$x_{1\,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{19}}{3}$$
e $-2 < x_1$, ne deriva quindi che la diseguaglianza vale se e solo se
$$x \in (-2,\ x_1] \cup (0,\ x_2]$$

2. Sia
$$A = \left\{\sqrt{4\,x^2 - x + 2} - 2\,x,\ \ x \in \mathcal{R}\right\}$$
Calcolare l'estremo superiore ed inferiore di A. Siccome
$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{4\,x^2 - x + 2} - 2\,x\right) = +\infty$$
l'insieme A non è superiormente limitato, ossia $\sup\ A = +\infty$. D'altra parte $d \in \mathcal{R}$ è un minorante dell'insieme A se e solo se
$$\sqrt{4\,x^2 - x + 2} - 2\,x \geq d\ \forall x \in \mathcal{R}$$
Supposto quindi $2\,x + d \geq 0$, si ottiene:
$$\sqrt{4\,x^2 - x + 2} - 2\,x \geq d \Leftrightarrow \sqrt{4\,x^2 - x + 2} \geq 2\,x + d \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\,x^2 - x + 2 \geq 4\,x^2 + 4\,x\,d + d^2 \Leftrightarrow (1 + 4\,d)x \leq 2 - d^2$$
Ora se $d = -1/4$ l'ultima diseguaglianza diventa $0 \leq 2 - 1/16$ che è vera e quindi $d = -1/4$ è un minorante. Infine se $d > -1/4$ e la diseguaglianza diventa, tenendo conto che $1 + 4\,d > 0$:
$$x \leq \frac{2 - d^2}{1 + 4\,d}$$
Pertanto se $d > -1/4$, d non è minorante. Possiamo quindi concludere che $\inf\ A = -1/4 \notin A$. Siccome $-1/4 \notin A$, l'insieme A non ha minimo.

3. Studiare la seguente funzione
$$f(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{x+2}$$
e disegnarne il grafico.

La funzione è definita $\forall x \in \mathcal{R},\ x \neq -2$ ed è positiva se e solo se $x \in (-3,\ -2) \cup (2,\ +\infty)$.

Risulta inoltre:
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$$
Inoltre, siccome
$$\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$
$$\lim_{x\to\mp\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{-x-6}{x-2} = -1$$
si ottiene che la retta $y = x - 1$ è un asintoto alla curva sia a $+\infty$ cge a $-\infty$. Derivando, si ottiene, se $x \neq -2$
$$f'(x) = \frac{(2\,x+1)(x+2) - (x^2+x-6)}{(x+2)^2} = \frac{x^2+4\,x+8}{(x+2)^2}$$
La derivata è quindi sempre positiva in quanto il polinomio che compare a numeratore non si annulla mai. La funzione è quindi crescente nelle due semirette $(-\infty,\ -2$ e $(-2,\ +\infty)$. Passando alla derivata seconda, si ottiene:
$$f''(x) = -\frac{(2\,x+4)(x+2)^2 - 2(x+2)(x^2+4\,x+8)}{(x+2)^4} = \frac{-8}{(x+2)^3}$$
Pertanto $f''(x) > 0$ se e solo se $x < -2$ e quindi f è convessa nell'intervallo $(-\infty,\ -2)$ e concava in $(-2,\ +\infty)$. Il grafico è pertanto del tipo:



4. Calcolare i seguenti integrali

$$\int_0^{\pi} x^2(1+\cos\,x)dx, \qquad \int_0^1 \frac{x^3+x}{x^3+3x+2}dx$$

Integrando per parti, si ottiene:

$$\int_0^{\pi} x^2(1+\cos\,x)dx = (x+\sin\,x)\,x^2\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(x+\sin\,x)2\,x\,dx =$$

$$(x+\sin\,x)\,x^2\Big|_0^{\pi} - 2\left[\left(\frac{x^2}{2}-\cos\,x\right)\,x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{x^2}{2}-\cos\,x\right)dx\right] =$$

$$= \left[x^2\,(x+\sin\,x) - 2\,x\left(\frac{x^2}{2}-\cos\,x\right)\right]\Bigg|_0^{\pi} + 2\left[\frac{x^3}{6}-\sin\,x\right]\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + x^2\,\sin\,x + 2\,x\,\cos\,x - 2\,\sin\,x\right]\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3} - 2\,\pi$$

Nel secondo integrale, facendo prima la divisione tra i due polinomi, si ottiene:

$$\int_0^1 \frac{x^3+x}{x^3+3x+2}dx = \int_0^1\left(x-3+\frac{8\,x+6}{x^3+3x+2}\right)dx$$

Cerchiamo infine una decomposizione del tipo

$$\frac{8\,x+6}{x^3+3x+2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x+2)}{(x+2)(x+1)}$$

Deve quindi essere $A+B=8$ e $A+2\,B=6$, ossia $A=10;\ B=-2$. Pertanto:

$$\int_0^1 \frac{x^3+x}{x^3+3x+2}dx = \int_0^1\left(x-3+\frac{10}{x+2}-\frac{2}{x+1}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} - 3\,x + 10\,\log(|x+2|) - 2\,\log(|x+1|)\right)\Bigg|_0^1$$

5. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+n^2}{3^n+1}$$

Usiamo il criterio del rapporto. Risulta

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+(n+1)^2}{3^{n+1}+1}\cdot\frac{3^n+1}{2^n+n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{1+(n+1)^2\,2^{-n-1}}{1+n^2\,2^{-n}}\cdot\frac{1+3^{-n}}{1+3^{-n-1}} = \frac{2}{3} < 1$$

Pertanto la serie considerata è convergente.