

ANALISI I

Note del corso tenuto dal Prof. Umberto Massari

Corso di Laurea Triennale in Chimica.
Anno Accademico 2017-2018

1 I NUMERI REALI

L'argomento centrale di questo corso di Analisi I è lo studio delle principali proprietà dei numeri reali e di alcune proprietà elementari delle funzioni reali di variabile reale.

Seguendo la linea dei più recenti libri che trattano questo argomento, anche in questo corso, l'insieme dei numeri reali verrà introdotto in via assiomatica. Verrà supposto cioè che esista un insieme, che indicheremo con la lettera $\mathcal{R}$ e che chiameremo l'insieme dei numeri reali, con tutte le proprietà che verranno elencate con sufficiente precisione e che sono, in fondo, le proprietà dei numeri che già in parte sono note.

La costruzione di $\mathcal{R}$ a partire dall'insieme dei numeri razionali, che può essere fatta in diversi modi e che forse qualche studente può aver già visto nella scuola media superiore, è, in ogni caso, lunga e laboriosa e richiederebbe troppo tempo. Pertanto in questo corso non verrà fatta. Noi supporremo quindi che i numeri reali esistano. Quello che faremo ora è fare un elenco abbastanza dettagliato delle loro principali proprietà.

1.1 Le proprietà dei numeri reali

Elencheremo in questo paragrafo le principali proprietà dell'insieme dei numeri reali, suddividendo tale elenco in tre parti:

- i) Proprietà delle operazioni,
- ii) Proprietà dell'ordinamento,
- iii) Proprietà di completezza.

i) - Proprietà delle operazioni

Sono definite in $\mathcal{R}$ due operazioni $+$ (più) e $\cdot$ (per) che hanno le seguenti proprietà:

- a) Proprietà commutativa:

$$\forall a, b \in \mathcal{R} \quad a + b = b + a ; a \cdot b = b \cdot a ;$$

- b) Proprietà associativa:

$$\forall a, b, c \in \mathcal{R} \quad (a + b) + c = a + (b + c) ; (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) ;$$

- c) Proprietà distributiva:

$$\forall a, b, c \in \mathcal{R} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c ;$$

- d) Esistenza degli elementi neutri:
esistono in $\mathcal{R}$ due numeri 0 e 1 tali che

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathcal{R};$$

- e) Esistenza dell'opposto e dell'inverso:

$$\forall a \in \mathcal{R} \quad \exists -a \in \mathcal{R} \text{ tale che } a + (-a) = 0,$$

$$\forall a \in \mathcal{R} \quad a \neq 0 \quad \exists \frac{1}{a} \in \mathcal{R} \text{ tale che } a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

ii) - Proprietà dell'ordinamento

Esiste in $\mathcal{R}$ una relazione di ordine totale che indicheremo con $\leq$ e chiameremo **relazione di minore o uguale** con le seguenti proprietà:

- a) Dicotomia:

$$\forall a, b \in \mathcal{R} \text{ risulta } o \quad a \leq b \quad o \quad b \leq a;$$

- b) Proprietà antisimmetrica:

$$\forall a, b \in \mathcal{R} \text{ se } a \leq b \text{ e } b \leq a \quad \Rightarrow \quad a = b;$$

- c) Proprietà transitiva:

$$\forall a, b, c \in \mathcal{R} \text{ se } a \leq b \text{ e } b \leq c \quad \Rightarrow \quad a \leq c;$$

- d) Legame tra $\leq$ e $+$ (più):

$$\forall a, b, c \in \mathcal{R} \text{ se } a \leq b \quad \Rightarrow \quad a + c \leq b + c;$$

- e) Legame tra $\leq$ e $\cdot$ (per):

$$\forall a, b, c \in \mathcal{R} \text{ se } a \leq b \text{ e } 0 \leq c \quad \Rightarrow \quad a \cdot c \leq b \cdot c.$$

iii) - Proprietà di completezza

Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathcal{R}$. Diremo che A e B formano una **coppia di insiemi separati** se

$$\forall a \in A \text{ e } \forall b \in B \text{ risulta } a \leq b$$

La proprietà di completezza di $\mathcal{R}$ afferma che se A e B è una coppia di insiemi separati, allora esiste un numero reale c tale che:

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A \text{ e } \forall b \in B.$$

Il numero reale c viene chiamato **elemento di separazione** tra A e B .

A parole potremo quindi enunciare la proprietà di completezza di $\mathcal{R}$ affermando che ogni coppia di insiemi di numeri reali, che siano separati, ammette un elemento di separazione.

Osservazione Nel seguito useremo anche i simboli

$$\geq, <, >$$

che chiameremo rispettivamente **maggiore o uguale**, **minore** e **maggiore**, intendendo rispettivamente che $\forall a, b \in \mathcal{R}$

$$\begin{aligned} a \geq b &\Leftrightarrow b \leq a, \\ a < b &\Leftrightarrow a \leq b \text{ e } a \neq b, \\ a > b &\Leftrightarrow b < a. \end{aligned}$$

Dalle proprietà delle operazioni e dell'ordinamento che abbiamo appena ricordato, si possono ricavare tutte le regole del calcolo letterale che verranno usate nella risoluzione degli esercizi. Alcune tra le più importanti sono le seguenti:

a) (Legge di cancellazione rispetto alla somma e al prodotto)

$$\forall a, b, c \in \mathcal{R} \text{ se } a + b = a + c \Rightarrow b = c ;$$

$$\forall a, b, c \in \mathcal{R} , a \neq 0 \text{ se } a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c ;$$

b) (Legge di annullamento del prodotto)

$$\forall a, b \in \mathcal{R} \text{ se } a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ o } b = 0 ;$$

c) (Unicità dell'opposto e dell'inverso di un numero reale)

– L'opposto di un numero reale è unico.

– L'inverso di un numero reale è unico.

d) $\forall a, b \in \mathcal{R}$, risulta:

$$(-a) \cdot b = -a \cdot b ;$$

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b ;$$

e) $\forall a \in \mathcal{R}$:

$$a > 0 \Leftrightarrow -a < 0 ;$$

$$a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0 ;$$

f) $\forall a \in \mathcal{R} , a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$;

g) $\forall a, b \in \mathcal{R} \Rightarrow a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$.

h) (Regola dei segni) $\forall a, b \in \mathcal{R}$, risulta

$$a \cdot b \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$$

$$\frac{a}{b} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} a \leq 0 \\ b < 0 \end{cases}$$

1.2 Alcuni esercizi

Applichiamo ora le proprietà dell'ordinamento che abbiamo ricordato sopra per studiare alcune disuguaglianze.

Vogliamo mettere prima in risalto un fatto che può causare errori negli esercizi e cioè che l'implicazione

$$a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$$

è vera soltanto se $0 \leq c$, mentre se $a \leq b$ e $c \leq 0 \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$ e non $a \cdot c \leq b \cdot c$.

1. Determinare l'insieme:

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R} ; \frac{x^2 + 2}{x - 1} > x + 2 \right\} \quad (1)$$

Risulta

$$\frac{x^2 + 2}{x - 1} > x + 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2 - x^2 + x - 2x + 2}{x - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x + 4}{x - 1} > 0$$

Ora l'ultimo quoziente è positivo se e solo se

$$\begin{cases} -x + 4 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} -x + 4 < 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases}$$

ossia se e solo se

$$\begin{cases} x < 4 \\ x > 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x > 4 \\ x < 1 \end{cases}$$

Siccome le ultime due richieste sono incompatibili, risulta:

$$A = (1, 4) = \{x \in \mathcal{R}; 1 < x < 4\}.$$

NOTA BENE Il seguente modo di risolvere questo esercizio è sbagliato.

$$\frac{x^2 + 2}{x - 1} > x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 2 > x^2 + 2x - x - 2 \Leftrightarrow x < 4$$

Nel primo passaggio ho moltiplicato la disuguaglianza da studiare per $x - 1$, mantenendo sempre tra i due membri della disuguaglianza stessa il segno di $>$, cosa sbagliata se $x - 1 < 0$.

2. Determinare l'insieme:

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R}; \frac{x}{x+1} > \frac{x+2}{x-1} \right\} \quad (2)$$

Risulta:

$$\frac{x}{x+1} > \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - x^2 - 2x - x - 2}{(x+1)(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{-4x-2}{(x+1)(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)} < 0$$

Studiando separatamente il segno del numeratore e del denominatore, risulta :

$\frac{\begin{array}{ccccccc} - & - & - & + & + & + & + \\ \hline -\frac{1}{2} \end{array}}{-1 \qquad \qquad \qquad 1}$	Numeratore
$\frac{\begin{array}{ccccccccccc} + & + & + & - & - & - & - & - & - & + & + & + \\ \hline -1 & & & & & & & & & 1 & & \end{array}}$	Denominatore

Ne deriva che l'insieme A contiene i punti dove il segno di numeratore e denominatore sono discordi, ossia $A = (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, 1)$.

3. Determinare l'insieme:

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R}, \frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} > 2 \right\} \quad (3)$$

Risulta:

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} > 2 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2) + (x-1)(x+2) - 2(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} > 0$$

Sviluppando il numeratore, risulta:

$$x^2 - 2x + x - 2 + x^2 + 2x - x - 2 - 2x^2 + 4x + 2x - 4 = 6x - 8$$

Si ottiene pertanto:

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} > 2 \Leftrightarrow \frac{6x-8}{(x-1)(x-2)} > 0$$

Studiando separatamente il segno del numeratore e del denominatore, risulta :

$\frac{\begin{array}{ccccccc} - & - & - & - & + & + & + \\ \hline \frac{4}{3} \end{array}}{1 \qquad \qquad \qquad 2}$	Numeratore
$\frac{\begin{array}{ccccccccccc} + & + & + & - & - & - & - & - & - & + & + & + \\ \hline 1 & & & & & & & & & 2 & & \end{array}}$	Denominatore

Ne deriva che l'insieme A contiene i punti dove il segno di numeratore e denominatore sono concordi, ossia $A = (1, 4/3) \cup (2, +\infty)$.

4. Determinare l'insieme:

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R}, \frac{x+3}{x-2} \leq \frac{x+1}{x+2} \right\} \quad (4)$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x-2} \leq \frac{x+1}{x+2} &\iff \frac{x+3}{x-2} - \frac{x+1}{x+2} = \\ &= \frac{x^2 + 2x + 3x + 6 - (x^2 - 2x + x - 2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{6x+8}{(x-2)(x+2)} \leq 0 \end{aligned}$$

Studiando separatamente il segno del numeratore e del denominatore, risulta :

$\frac{\begin{array}{ccccccc} - & - & - & - & + & + & + & + \\ \hline & & & & -\frac{4}{3} & & & \end{array}}{-2 \qquad \qquad \qquad 2}$	Numeratore
$\frac{\begin{array}{ccccccccccc} + & + & + & - & - & - & - & - & - & + & + & + \\ \hline & & & & & & & & & & & \end{array}}{-2 \qquad \qquad \qquad 2}$	Denominatore

Pertanto si ha:

$$A = (-\infty, -2) \cup \left[-\frac{4}{3}, 2 \right)$$

1.3 Esercizi proposti

Determinare:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ x \in \mathcal{R}; \frac{x-3}{x+1} \leq 3 \right\}, \quad B = \left\{ x \in \mathcal{R}; \frac{x+6}{x+2} > \frac{x+1}{x-3} \right\}, \\ C &= \left\{ x \in \mathcal{R}; \frac{x^2+2}{x-2} > x-1 \right\}, \quad D = \left\{ x \in \mathcal{R}; \frac{x+3}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} \leq 2 \right\}, \\ E &= \left\{ x \in \mathcal{R}; \frac{x-1}{x+2} \leq \frac{x+4}{x-3} \right\}. \end{aligned}$$

(La soluzione si trova alla fine del Capitolo)

1.4 Una conseguenza della proprietà di completezza di $\mathcal{R}$: esistenza della radice quadrata di un numero non negativo

Una conseguenza molto importante della proprietà di completezza di $\mathcal{R}$ è l'esistenza della radice quadrata di ogni numero non negativo. Vale infatti il seguente:

Teorema 1.1 $\forall a \in \mathcal{R} \quad a \geq 0 \quad \exists \text{ unico } b \in \mathcal{R} \quad b \geq 0 \text{ tale che } b^2 = a.$

Questo unico $b \geq 0$ verrà indicato col simbolo $\sqrt{a}$ e chiamato la **radice quadrata** di a .

Dimostrazione. Supponiamo $a > 0$. Indichiamo con:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathcal{R}; x > 0, x^2 \leq a\} \\ B &= \{y \in \mathcal{R}; y > 0, a \leq y^2\} \end{aligned}$$

Verifichiamo che A e B sono separati. Infatti:

$$\text{se } x \in A \text{ e } y \in B \Rightarrow x^2 \leq a \leq y^2 \Rightarrow x^2 \leq y^2 \Rightarrow (x-y)(x+y) \leq 0.$$

Siccome $x+y > 0$, ne deriva che $x-y \leq 0$, ossia $x \leq y$. Esiste allora, per la proprietà di completezza, un numero reale b che separa A e B , cioè tale che:

$$x \leq b \leq y \quad \forall x \in A \text{ e } \forall y \in B$$

Verifichiamo che deve essere $b^2 = a$, ragionando per assurdo.

Primo caso. Supponiamo che sia $b^2 < a$. Se indichiamo con ε un numero tra 0 e 1 ($0 < \varepsilon < 1$), abbiamo:

$$(b + \varepsilon)^2 = b^2 + 2b\varepsilon + \varepsilon^2 < b^2 + 2b\varepsilon + \varepsilon$$

(Abbiamo usato il fatto che se $\varepsilon \in (0, 1)$, allora $\varepsilon^2 < \varepsilon$). Pertanto se $\varepsilon \in (0, 1)$ è scelto in modo tale che $b^2 + \varepsilon(2b + 1) \leq a$, ossia se

$$\varepsilon \leq \frac{a - b^2}{1 + 2b}, \quad (5)$$

allora risulta $(b + \varepsilon)^2 < a$ (da notare che, siccome stiamo supponendo $b^2 < a$, il quoziente a secondo membro della (5) è positivo).

Ne deriva quindi che il numero $x = b + \varepsilon \in A$, infatti $b + \varepsilon > 0$ e $(b + \varepsilon)^2 < a$. Inoltre risulta $x = b + \varepsilon > b$ e questo contrasta col fatto che b è elemento di separazione tra A e B , in particolare col fatto che deve essere $x \leq b \forall x \in A$.

Secondo caso. Supponiamo che sia $b^2 > a$. Indicando in questo caso con ε un numero tra 0 e b , si avrebbe $b - \varepsilon > 0$ e

$$(b - \varepsilon)^2 = b^2 - 2b\varepsilon + \varepsilon^2 > b^2 - 2b\varepsilon$$

Pertanto se ε è scelto in modo che $b^2 - 2b\varepsilon \geq a$, ossia se

$$\varepsilon \leq \frac{b^2 - a}{2b}, \quad (6)$$

risulta $(b - \varepsilon)^2 > a$ (da notare che anche in questo caso, il secondo membro della (6) è positivo). Pertanto il numero $y = b - \varepsilon \in B$ e $y = b - \varepsilon < b$, contro il fatto che b è elemento di separazione tra A e B , in particolare col fatto che deve essere $b \leq y \forall y \in B$.

Deve quindi essere $b^2 = a$.

Verificare infine, per esercizio, che il numero $b \geq 0$ con la proprietà ora trovata ($b^2 = a$) è unico. q.e.d.

Concludiamo questa parte sui numeri reali, ricordando le disequaglianze di secondo grado.

Disequaglianze di secondo grado Determinare:

$$A = \{x \in \mathcal{R} ; ax^2 + bx + c > 0\}$$

dove $a, b, c \in \mathcal{R}$ sono numeri fissati con $a > 0$.

Se indichiamo con

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

allora:

i) se $\Delta > 0$, posto:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

risulta $A = (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$;

ii) se $\Delta = 0$, allora posto

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

si ottiene $A = \{x \in \mathcal{R} ; x \neq x_1\}$,

iii) se infine $\Delta < 0$, si ottiene $A = \mathcal{R}$.

Infatti, completando il quadrato, si ottiene:

$$\begin{aligned} a x^2 + b x + c &= a \left[x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

Si ottiene quindi il risultato sopra enunciato.

1.5 Alcuni altri esercizi

1. Determinare:

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R} ; \frac{x+1}{x+2} - \frac{x+2}{x-3} \geq 1 \right\}$$

Risulta:

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+2}{x-3} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-3) - (x+2)^2 - (x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)} \geq 0$$

Sviluppando il numeratore, ottengo:

$$x^2 - 3x + x - 3 - x^2 - 4x - 4 - x^2 + 3x - 2x + 6 = -x^2 - 5x - 1$$

e quindi:

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+2}{x-3} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x + 1}{(x+2)(x-3)} \leq 0$$

Ora il numeratore si annulla nei due punti

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} , \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$$

Osservando infine che

$$x_1 < -2 < x_2 < 0$$

il segno di numeratore e denominatore è dato da:

$\begin{array}{cccccccccccc} + & + & + & - & - & - & - & + & + & + & + \\ \hline & & & x_1 & & & & x_2 & & & \end{array}$	Numeratore
$\begin{array}{cccccccccccc} + & + & + & - & - & - & - & - & - & - & + & + & + \\ \hline & & & -2 & & & & & & & 3 & & \end{array}$	Denominatore

Possiamo quindi concludere che

$$A = [x_1, -2) \cup [x_2, 3)$$

2. Determinare

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R}; 2x + 1 \leq \sqrt{x^2 + x + 4} \right\}$$

Osserviamo in primo luogo che $x^2 + x + 4 > 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}$ e che se $2x + 1 < 0$, ossia se $x < -\frac{1}{2}$, la disuguaglianza è verificata. Pertanto

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \subset A .$$

D'altra parte se $2x + 1 \geq 0$, ossia se $x \geq -\frac{1}{2}$, si ha

$$2x + 1 \leq \sqrt{x^2 + x + 4} \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 \leq x^2 + x + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 \leq 0$$

Ora l'ultima disequaglianza è verificata se

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Tenendo conto che sto supponendo che $x \geq -\frac{1}{2}$, possiamo concludere che

$$A = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right] = \left(-\infty, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right].$$

3. Determinare

$$A = \left\{x \in \mathcal{R} ; 1 - 2x \leq \sqrt{x - x^2 + 2}\right\}$$

Osserviamo in primo luogo che deve essere $x - x^2 + 2 \geq 0$ ossia $x^2 - x - 2 \leq 0$. Pertanto deve essere $x \in [-1, 2]$. Osserviamo ora che, se $1 - 2x < 0$ ossia se $x > \frac{1}{2}$, la disequaglianza è verificata e quindi

$$\left(\frac{1}{2}, 2\right] \subset A.$$

D'altra parte se $1 - 2x \geq 0$ ossia se $x \leq \frac{1}{2}$, si ha

$$1 - 2x \leq \sqrt{x - x^2 + 2} \Leftrightarrow 1 - 4x + 4x^2 \leq x - x^2 + 2 \Leftrightarrow 5x^2 - 5x - 1 \leq 0$$

Ora l'ultima disequaglianza è verificata se

$$\frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \leq x \leq \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}.$$

Notando infine che

$$\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} > \frac{1}{2} \quad e \quad \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} > -1,$$

possiamo concludere che

$$A = \left[\frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}, 2\right].$$

4. Determinare

$$A = \left\{x \in \mathcal{R} ; \sqrt{x^2 - x - 2} \leq \frac{x - 1}{2}\right\}$$

Osserviamo in primo luogo che deve essere $x^2 - x - 2 \geq 0$ ossia $x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$. Osserviamo infine che deve essere anche $x \geq 1$. Infatti, in caso contrario la disequaglianza non è verificata. Con queste limitazioni risulta:

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \leq \frac{x - 1}{2} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq \frac{x^2 - 2x + 1}{4} \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 9 \leq 0$$

Osserviamo infine che le radici dell'ultimo polinomio di secondo grado sono:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{28}}{3} \quad e \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{28}}{3}$$

Siccome $x_2 > 2$, possiamo concludere che $A = [2, x_2]$.

5. Sia λ un parametro reale, indichiamo con

$$A_\lambda = \{x \in \mathcal{R}; x^2 - 2x + \lambda > 0\}$$

Determinare A_λ al variare di $\lambda \in \mathcal{R}$.

Risulta $\Delta(\lambda) = 4 - 4\lambda$ e quindi se $\lambda > 1$, $\Delta(\lambda) < 0$, ne deriva allora che $A_\lambda = \mathcal{R}$. D'altra parte se $\lambda = 1$, la disuguaglianza diventa

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 > 0$$

e quindi $A_1 = \{x \in \mathcal{R}, x \neq 1\}$. Infine se $\lambda < 1$, $\Delta(\lambda) > 0$ e quindi posto

$$x_1(\lambda) = 1 - \sqrt{1 - \lambda}, \quad x_2(\lambda) = 1 + \sqrt{1 - \lambda}$$

risulta

$$A_\lambda = (-\infty, x_1(\lambda)) \cup (x_2(\lambda), +\infty).$$

6. Per quali valori di $b \in \mathcal{R}$, l'equazione (nella incognita x):

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = b$$

ammette almeno una soluzione?

Ricordando che $x^2 + x + 1 > 0 \forall x \in \mathcal{R}$, risulta

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = b \Leftrightarrow bx^2 + (b-1)x + b-1 = 0$$

Ora, se $b = 0$, l'equazione ottenuta non è di secondo grado, ma di primo e diventa: $-x - 1 = 0$, che ha l'unica soluzione $x = -1$. Se $b \neq 0$, l'equazione ha soluzioni se e solo se

$$\Delta(b) = (b-1)^2 - 4b(b-1) \geq 0$$

ossia $(b-1)(b-1-4b) = (b-1)(-3b-1) \geq 0$. In conclusione

$$\Delta(b) \geq 0 \Leftrightarrow b \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$$

L'equazione iniziale quindi ha almeno una soluzione se e solo se $b \in [-\frac{1}{3}, 1]$.

7. Determinare:

$$A = \{x \in \mathcal{R}; x^3 - 4x + 3 > 0\}$$

Osserviamo che, posto

$$p(x) = x^3 - 4x + 3$$

risulta $p(1) = 0$. Pertanto il polinomio di terzo grado $p(x)$, per il Teorema di Ruffini, è divisibile per $x - 1$. Facendo la divisione, risulta:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 - 4x + 3 & x - 1 \\ -x^3 + x^2 & \hline x^2 - 4x + 3 & \\ -x^2 + x & \\ \hline -3x + 3 & \\ 3x - 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Possiamo quindi concludere che

$$x^3 - 4x + 3 = (x - 1)(x^2 + x - 3)$$

Studiando il segno dei due fattori, si ottiene:

$$\begin{array}{rcl} \frac{- \ - \ - \ - \ + \ + \ + \ +}{1} & \text{Primo fattore} \\ + \ + \ + \ - \ - \ - \ - \ + \ + \ + & \text{Secondo fattore} \\ x_1 & x_2 \end{array}$$

dove

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \quad e \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} .$$

(Da notare che $x_2 > 1$. Infatti

$$x_2 > 1 \Leftrightarrow \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{13} > 3 \Leftrightarrow 13 > 9) .$$

Possiamo quindi concludere che

$$A = \left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, 1 \right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, +\infty \right) .$$

1.6 Esercizi proposti

Determinare i seguenti insiemi:

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R}; \frac{x+1}{x-2} \leq \frac{2x-3}{x+2} \right\} , \quad B = \left\{ x \in \mathcal{R}; \sqrt{(x+1)(2-x)} \leq x-1 \right\} ,$$

$$C = \left\{ x \in \mathcal{R}; \frac{x^2+x+1}{x-3} \geq 2x+1 \right\} , \quad D = \left\{ x \in \mathcal{R}; \sqrt{(x+2)(x-1)} \leq \frac{x+3}{2} \right\}$$

(La soluzione si trova alla fine del Capitolo).

1.7 Particolari sottoinsiemi di $\mathcal{R}$

L'insieme dei numeri reali contiene come sottoinsiemi alcuni altri insiemi numerici che useremo spesso nel seguito e che quindi vogliamo mettere in risalto.

L'insieme $\mathcal{N}$ dei **numeri naturali**:

$$\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots\} .$$

L'insieme $\mathcal{Z}$ dei **numeri interi relativi**:

$$\mathcal{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} .$$

L'insieme $\mathcal{Q}$ dei **numeri razionali**:

$$\mathcal{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; \quad p \in \mathcal{Z} , \quad q \in \mathcal{N} \right\} .$$

Ricordiamo brevemente che ogni numero razionale si può rappresentare in infiniti modi come una frazione, infatti se $p q' = p' q$ $p, p' \in \mathcal{Z}$, $q, q' \in \mathcal{N}$ si ha

$$r = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$$

È possibile inoltre rappresentare un numero razionale r come frazione $\frac{p}{q}$ con p e q numeri primi tra loro, ossia privi di fattori comuni (oltre 1).
È evidente che risulta

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$$

e che l'inclusione è stretta.

Verifichiamo per esempio che $\mathcal{Q}$ è un sottoinsieme proprio di $\mathcal{R}$ provando che $\sqrt{2} \notin \mathcal{Q}$.
Supponiamo infatti, ragionando per assurdo, che esista un numero razionale r con $r^2 = 2$. Possiamo rappresentare r come $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathcal{N}$ e p e q primi tra loro. Risulta dunque:

$$r^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

Ne deriva quindi che p^2 è un numero pari, ma allora anche p è un numero pari, ossia $p = 2p'$. Otteniamo allora

$$p^2 = 4p'^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2p'^2$$

Se ne conclude che q^2 è pari e quindi che anche q è pari. Ma se p e q sono entrambi pari non sono primi tra loro come avevamo supposto all'inizio e questo porta ad una contraddizione.

Esercizio

Verificare che l'insieme $\mathcal{Q}$ dei numeri razionali non ha la proprietà di completezza. In particolare verificare che i due sottoinsiemi di $\mathcal{Q}$:

$$A = \{r \in \mathcal{Q}; r > 0, r^2 \leq 2\}$$

$$B = \{s \in \mathcal{Q}; s > 0, s^2 \geq 2\}$$

sono separati, ma non esiste in $\mathcal{Q}$ nessun elemento di separazione.

(Suggerimento. Verificare che se esistesse tale elemento di separazione $c \in \mathcal{Q}$ dovrebbe essere $c^2 = 2$.)

1.8 Estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme

Fondamentale in tutto il corso di Analisi I saranno i concetti di estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme. Cominciamo col dare alcune definizioni preliminari.

Definizione 1.1 (Definizione di massimo e minimo elemento di un insieme)

Diremo che $m \in \mathcal{R}$ è il **massimo** di un insieme A se

$$m \in A \text{ e } a \leq m \quad \forall a \in A.$$

Diremo similmente che $m' \in \mathcal{R}$ è il **minimo** di un insieme A se

$$m' \in A \text{ e } m' \leq a \quad \forall a \in A.$$

Useremo rispettivamente le notazioni

$$\max A \text{ e } \min A$$

per indicare il massimo e il minimo elemento di A , quando questi numeri esistono.

Da notare il fatto, come vedremo con semplici esempi, che un insieme A può non avere massimo o minimo o nè massimo e nè minimo. Ad esempio:

- i) se $A = (0, 1) = \{x \in \mathcal{R}; 0 < x < 1\}$, A non ha nè massimo nè minimo;

ii) se

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} ; n \in \mathcal{N} \right\}$$

allora $m = \frac{1}{2}$ è il minimo di A , mentre A non ha massimo (verificare queste affermazioni per esercizio);

iii) infine se $A = [-1, 1] = \{x \in \mathcal{R} ; -1 \leq x \leq 1\}$, allora A ha massimo e minimo e $-1 = \min A$, $1 = \max A$.

Definizione 1.2 (Definizione di maggiorante e di minorante)

Diremo che un numero $b \in \mathcal{R}$ è un **maggiorante** di A se

$$a \leq b \quad \forall a \in A .$$

Analogamente diremo che un numero $d \in \mathcal{R}$ è un **minorante** di A se

$$d \leq a \quad \forall a \in A .$$

Se esiste almeno un maggiorante di A , diremo che A è **superiormente limitato**, mentre se esiste almeno un minorante di A , diremo che A è **inferiormente limitato**.

NOTA BENE È interessante notare che, se le proprietà ora definite vengono espresse mediante i quantificatori matematici $\forall$ ed $\exists$, allora la negazione di tali proprietà si può esprimere scambiando formalmente i due quantificatori. Infatti

- A è superiormente limitato se $\exists b \in \mathcal{R}$ tale che $\forall a \in A \quad a \leq b$.
- A non è superiormente limitato se $\forall b \in \mathcal{R} \quad \exists a \in A$ con $a > b$.

Analogamente

- $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante di A se $\forall a \in A \quad a \leq b$.
- $b \in \mathcal{R}$ non è un maggiorante di A se $\exists a \in A$ con $a > b$.

Alcuni esempi

1. Verificare che l'insieme

$$A = \left\{ \frac{x+1}{x^2+x+3} ; x \in \mathcal{R} \right\}$$

è superiormente limitato .

Osserviamo che dalla definizione si ha che l'insieme A è superiormente limitato se $\exists b \in \mathcal{R}$ tale che

$$\frac{x+1}{x^2+x+3} \leq b \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

Osserviamo preliminarmente che, siccome per $x = 0$ la frazione considerata assume il valore $1/3$, se un b con le proprietà richieste esiste deve essere $b \geq 1/3$. Risulta, essendo $x^2 + x + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}$:

$$\frac{x+1}{x^2+x+3} \leq b \Leftrightarrow x+1 \leq bx^2+bx+3b \Leftrightarrow bx^2+(b-1)x+3b-1 \geq 0$$

Pertanto la disuguaglianza di partenza è vera $\forall x \in \mathcal{R}$ se e solo se $\Delta(b) = (b-1)^2 - 4b(3b-1) \leq 0$.
Ossia se e solo se $11b^2 - 2b - 1 \geq 0$ e questo vale se e solo se

$$b \geq b_2 = \frac{1+2\sqrt{3}}{11}$$

Allora b è maggiorante l'insieme A se e solo se $b \geq b_2$.

2. Verificare che l'insieme

$$B = \left\{ 2\sqrt{x^2 + x} - x ; x \in \mathcal{R}, x \geq 0 \right\}$$

non è superiormente limitato.

Sia $b \in \mathcal{R}$ un numero positivo, allora

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^2 + x} - x > b &\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + x} > x + b \\ &\Leftrightarrow 4(x^2 + x) > x^2 + 2xb + b^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 2(2-b)x - b^2 > 0 \end{aligned}$$

Il delta dell'ultimo polinomio di secondo grado è dato da :

$$\Delta(b) = 4(2-b)^2 + 12b^2 > 0$$

Pertanto, qualunque sia $b > 0$, la disequaglianza

$$2\sqrt{x^2 + x} - x > b$$

è verificata $\forall x \in \mathcal{R}$ con

$$x > \frac{-2(2-b) + \sqrt{\Delta(b)}}{6}$$

Ne deriva quindi che B non è superiormente limitato .

Da notare che un modo, forse più semplice, per ottenere lo stesso risultato poteva essere quello di notare che:

$$2\sqrt{x^2 + x} - x \geq 2\sqrt{x^2} - x = x \quad \forall x \geq 0 .$$

3. Dire se l'insieme:

$$C = \left\{ \frac{x}{x-1} ; x \in \mathcal{R} \quad x \neq 1 \right\}$$

è limitato inferiormente.

Proviamo a verificare che C non è limitato inferiormente, ossia proviamo a verificare che $\forall d \in \mathcal{R}$ la disequaglianza

$$\frac{x}{x-1} < d$$

ha almeno una soluzione. Possiamo supporre che sia $d < 0$, allora risulta:

$$\frac{x}{x-1} < d \Leftrightarrow \frac{x-dx+d}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(1-d)x+d}{x-1} < 0$$

Osserviamo ora che il numeratore si annulla in

$$\frac{-d}{1-d} = \frac{1-d-1}{1-d} = 1 - \frac{1}{1-d} < 1$$

Pertanto se $d < 0$, la disuguaglianza

$$\frac{x}{x-1} < d \quad \text{è verificata} \quad \forall x \in \left(\frac{-d}{1-d}, 1 \right) .$$

Pertanto C non è inferiormente limitato.

4. Dire se l'insieme:

$$D = \left\{ \frac{x-2}{x^2-2x+3} ; x \in \mathcal{R} \right\}$$

è limitato superiormente.

Proviamo a verificare che D non è limitato superiormente, ossia proviamo a verificare che $\forall b \in \mathcal{R}$ la disequaglianza

$$\frac{x-2}{x^2-2x+3} > b$$

ha almeno una soluzione. Possiamo supporre che sia $b > 0$. Risulta:

$$\frac{x-2}{x^2-2x+3} > b \Leftrightarrow bx^2 - 2bx + 3b - x + 2 = bx^2 - (2b+1)x + 3b+2 < 0$$

Ora questa ultima disequazione ha almeno una soluzione se e solo se

$$\Delta(b) = (2b+1)^2 - 4b(3b+2) = 4b^2 + 4b + 1 - 12b^2 - 8b = -(8b^2 + 4b - 1) > 0$$

Ora il polinomio di secondo grado trovato ha come radici:

$$b_1 = \frac{-2 - \sqrt{4+8}}{8} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{4} \quad e \quad b_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{4}$$

e quindi $\Delta(b) > 0$ se e solo se

$$b \in \left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{4} \right)$$

Ne deriva, in particolare, che se $b > \frac{-1+\sqrt{3}}{4}$, la disequaglianza

$$\frac{x-2}{x^2-2x+3} > b$$

non ha soluzioni e quindi

$$\frac{x-2}{x^2-2x+3} \leq b \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

e quindi b è un maggiorante di D e D è superiormente limitato.

5. Verificare che l'insieme

$$E = \left\{ \sqrt{x^2+x} - x ; x \in \mathcal{R}, x \geq 0 \right\}$$

è superiormente limitato.

Sia $b \in \mathcal{R}$ un numero positivo, allora

$$\sqrt{x^2+x} - x \leq b \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x} \leq x+b$$

$$\Leftrightarrow x^2+x \leq x^2+2xb+b^2 \Leftrightarrow (1-2b)x \leq b^2$$

Siccome per $b = 1/2$ la disequaglianza si riduce all'identità $0 \leq 1/4$, si ottiene che $b = 1/2$ è un maggiorante dell'insieme E . Si può vedere anche facilmente (farlo per esercizio) che $1/2$ è il più piccolo dei maggioranti.

Vale il seguente

Teorema 1.2 Se $A \subset \mathcal{R}$ è un insieme superiormente limitato, allora l'insieme B dei maggioranti di A ha un elemento minimo.

Tale elemento minimo verrà indicato col simbolo $\sup A$ e chiamato l'**estremo superiore** di A .

Dimostrazione. La coppia di insiemi A e B è separata, infatti se $a \in A$ e $b \in B$ si ha che $a \leq b$ (essendo b un maggiorante di A). Allora per la proprietà di completezza di $\mathcal{R}$, esiste $c \in \mathcal{R}$ tale che

$$i) \quad a \leq c \quad \forall a \in A,$$

$$ii) \quad c \leq b \quad \forall b \in B.$$

La i) dice che c è un maggiorante di A e quindi $c \in B$, la ii) dice che $c = \min B$.

q.e.d.

L'estremo superiore è caratterizzato dalle seguenti proprietà.

Proprietà caratteristiche dell'estremo superiore

Sia $c \in \mathcal{R}$, allora $c = \sup A$ se e solo se:

i) $a \leq c \quad \forall a \in A$;

ii) $\forall \varepsilon \in \mathcal{R}, \varepsilon > 0, \exists a \in A$ con $a > c - \varepsilon$.

Consideriamo ora qualche esempio .

1. Sia

$$A = \left\{ \frac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 1} ; n \in \mathcal{N} \right\}$$

Verificare che $\sup A = 2$.

i) La prima verifica da fare è vedere se

$$\frac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 1} \leq 2 \quad \forall n \in \mathcal{N} .$$

Risulta

$$\frac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 1} \leq 2 \Leftrightarrow 2n^2 - n + 1 \leq 2n^2 + 2 \Leftrightarrow n \geq -1$$

Pertanto la disequaglianza considerata vale $\forall n \in \mathcal{N}$.

ii) Si tratta di verificare che, se $\varepsilon \in \mathcal{R}, \varepsilon > 0$, allora la disequaglianza (nella variabile $n \in \mathcal{N}$)

$$\frac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 1} > 2 - \varepsilon$$

ammette almeno una soluzione. Risulta

$$\frac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 1} > 2 - \varepsilon \Leftrightarrow 2n^2 - n + 1 > 2n^2 + 2 - \varepsilon n^2 - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon n^2 - n + \varepsilon - 1 > 0$$

Ora il delta dell'ultimo polinomio di secondo grado è dato da

$$\Delta(\varepsilon) = 1 - 4\varepsilon(\varepsilon - 1)$$

Pertanto, supposto $\varepsilon < 1$, risulta $\Delta(\varepsilon) > 0$ e quindi la disequaglianza di partenza è vera $\forall n \in \mathcal{N}$, con

$$n > \frac{1 + \sqrt{\Delta(\varepsilon)}}{2\varepsilon}$$

2. Sia

$$A = \left\{ \frac{x+1}{x^2+1} ; x \in \mathcal{R} \right\}$$

Dire se A è limitato superiormente e, in caso affermativo, calcolare $\sup A$.

Ricordiamo che $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante dell'insieme A se

$$\frac{x+1}{x^2+1} \leq b \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

Studiamo ora questa disequaglianza osservando che possiamo supporre $b > 0$ (in effetti se poniamo $x = 0$, otteniamo che deve essere $1 \leq b$). Ora

$$\frac{x+1}{x^2+1} \leq b \Leftrightarrow bx^2 - x + b - 1 \geq 0$$

Ricordiamo ora che l'ultima disuguaglianza è vera $\forall x \in \mathcal{R}$ se e solo se

$$\Delta(b) = 1 - 4b(b-1) \leq 0 \quad \text{ossia} \quad 4b^2 - 4b - 1 \geq 0$$

Pertanto deve essere

$$b \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$$

Ricordando che $b \geq 1$, si ricava che b è un maggiorante di A se e solo se

$$b \in \left[\frac{1+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$$

Allora, ricordando che $\sup A$ è il più piccolo dei maggioranti di A , si ha

$$\sup A = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Verifichiamo per concludere che $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ è anche il massimo di A , facendo vedere che $\frac{1+\sqrt{2}}{2} \in A$, ossia che l'equazione

$$\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

ammette almeno una soluzione. Infatti risulta

$$\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2(x+1) = (1+\sqrt{2})(x^2+1) \Leftrightarrow (1+\sqrt{2})x^2 - 2x + \sqrt{2} - 1 = 0$$

Infine, essendo

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 0,$$

otteniamo che l'equazione considerata ammette l'unica soluzione

$$x = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$

In maniera simile alla dimostrazione del Teorema 1.2, si può dimostrare il seguente:

Teorema 1.3 *Se $A \subset \mathcal{R}$ è un insieme inferiormente limitato, allora l'insieme dei minoranti di A ha un massimo.*

Il massimo dei minoranti di A verrà indicato con $\inf A$ e chiamato l'**estremo inferiore** di A . L'estremo inferiore è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

Proprietà caratteristiche dell'estremo inferiore

Sia $d \in \mathcal{R}$, allora $d = \inf A$ se e solo se:

- i) $d \leq a \quad \forall a \in A$;
- ii) $\forall \varepsilon \in \mathcal{R}, \varepsilon > 0, \exists a \in A$ con $a < d + \varepsilon$.

1.9 Alcuni esercizi sull'estremo superiore e sull'estremo inferiore

1. Sia

$$A = \left\{ \frac{n+5}{\sqrt{n^2+n}} ; n \in \mathcal{N} \right\} .$$

Verificare che $\inf A = 1$ e dire se $1 = \min A$.

Risulta

$$\frac{n+5}{\sqrt{n^2+n}} \geq 1 \Leftrightarrow n^2 + 10n + 25 \geq n^2 + n \Leftrightarrow 9n + 25 \geq 0$$

Pertanto il numero 1 verifica la prima proprietà caratteristica dell'estremo inferiore. D'altra parte se $\varepsilon > 0$, ottengo

$$\frac{n+5}{\sqrt{n^2+n}} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow n^2 + 10n + 25 < (1 + \varepsilon)^2(n^2 + n) \Leftrightarrow [(1 + \varepsilon)^2 - 1]n^2 + [(1 + \varepsilon)^2 - 10]n - 25 > 0$$

Siccome il coefficiente di n^2 : $(1 + \varepsilon)^2 - 1 = 2\varepsilon + \varepsilon^2$ è positivo e $\Delta(\varepsilon) > 0$, ottengo che la disuguaglianza ottenuta è verificata se

$$n > \frac{-[(1 + \varepsilon)^2 - 1] + \sqrt{\Delta(\varepsilon)}}{(1 + \varepsilon)^2 - 1}$$

Pertanto 1 verifica anche la seconda proprietà caratteristica dell'estremo inferiore. Osserviamo infine che $1 \notin A$ e quindi A non ha minimo.

2. Sia

$$A = \left\{ \frac{x+1}{x-1} ; x \in \mathcal{R}, x > 1 \right\}$$

Verificare che A non è superiormente limitato, che è inferiormente limitato e $\inf A = 1$.

Si tratta di provare che $\forall b \in \mathcal{R}$, la disuguaglianza

$$\frac{x+1}{x-1} > b$$

ha sempre almeno una soluzione $x > 1$. Essendo

$$\frac{x+1}{x-1} > 1 \quad \forall x \in \mathcal{R} \quad x > 1 ,$$

possiamo supporre che sia $b > 1$ (altrimenti, se fosse $b \leq 1$, avrei

$$\frac{x+1}{x-1} > 1 \geq b \quad \forall x > 1)$$

Ottingo quindi

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1} > b &\Leftrightarrow \frac{x+1-bx+b}{x-1} > 0 \Leftrightarrow (\text{essendo } x > 1) \quad (b-1)x < 1+b \\ &\Leftrightarrow (\text{essendo } b > 1) \quad x < \frac{1+b}{b-1} \end{aligned}$$

Notiamo infine che

$$\frac{1+b}{b-1} = \frac{2+b-1}{b-1} = 1 + \frac{2}{b-1} > 1$$

Possiamo concludere quindi che se $1 < x < 1 + \frac{2}{b-1}$, la disuguaglianza

$$\frac{x+1}{x-1} > b$$

è verificata. Infine per verificare che $\inf A = 1$, avendo già notato che 1 verifica la prima proprietà caratteristica dell'estremo inferiore, basta provare che verifica anche la seconda. Sia dunque $\varepsilon \in \mathcal{R}$ con $\varepsilon > 0$, risulta allora, se $x > 1$:

$$\frac{x+1}{x-1} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow x+1 < x-1 + \varepsilon x - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon x > 2 + \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}$$

E quindi 1 verifica anche la seconda proprietà caratteristica dell'estremo inferiore.

3. Sia

$$A = \left\{ \sqrt{n^2 + n} - n ; n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare $\sup A$ e $\inf A$.

Ricordiamo che $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante di A se e solo se

$$\sqrt{n^2 + n} - n \leq b \quad , \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Essendo la differenza $\sqrt{n^2 + n} - n$ sempre positiva, posso supporre $b > 0$. Pertanto:

$$\sqrt{n^2 + n} - n \leq b \Leftrightarrow \sqrt{n^2 + n} \leq n + b \Leftrightarrow n^2 + n \leq n^2 + 2bn + b^2 \Leftrightarrow (1 - 2b)n \leq b^2$$

Siccome si richiede che la disuguaglianza sia verificata $\forall n \in \mathcal{N}$, deve essere $1 - 2b \leq 0$ ossia $b \geq 1/2$. Se ne conclude che $b \in \mathcal{R}$ è maggiorante di A se e solo se $b \geq 1/2$. Pertanto $\sup A = 1/2$. Da notare che $1/2 \notin A$ in quanto l'equazione in $n \in \mathcal{N}$:

$$\sqrt{n^2 + n} - n = \frac{1}{2}$$

non ha soluzioni.

Per quanto riguarda l'estremo inferiore dell'insieme A , possiamo osservare che $d \in \mathcal{R}$ è minorante dell'insieme A se e solo se

$$\sqrt{n^2 + n} - n \geq d \quad , \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Supponendo anche in questo caso $d > 0$, ottengo:

$$\sqrt{n^2 + n} - n \geq d \Leftrightarrow n^2 + n \geq n^2 + 2dn + d^2 \Leftrightarrow (1 - 2d)n \geq d^2$$

Deve essere allora

$$1 - 2d > 0 \quad e \quad n \geq \frac{d^2}{1 - 2d}$$

Siccome si richiede che la disuguaglianza sia verificata $\forall n \in \mathcal{N}$, deve essere

$$d < \frac{1}{2} \quad e \quad 1 \geq \frac{d^2}{1 - 2d}$$

Risolvendo l'ultima disuguaglianza si ha:

$$1 \geq \frac{d^2}{1 - 2d} \Leftrightarrow d^2 + 2d - 1 \leq 0$$

Le radici del polinomio di secondo grado trovato sono $d_1 = -1 - \sqrt{2}$ e $d_2 = -1 + \sqrt{2}$. Risulta pertanto che $d \in \mathcal{R}$ è un minorante se e solo se $d \leq \sqrt{2} - 1$ e quindi $\inf A = \sqrt{2} - 1$. Da notare infine che $\sqrt{2} - 1 \in A$ in quanto è il valore che si ottiene dall'espressione $\sqrt{n^2 + n} - n$ per $n = 1$. Possiamo quindi concludere che $\sqrt{2} - 1 = \min A$.

4. Dire se l'insieme:

$$A = \left\{ \sqrt{n^2 + 7n} - n , n \in \mathcal{N} \right\}$$

è limitato superiormente e in caso affermativo calcolare $\sup A$.

Tenendo conto che gli elementi di A sono positivi, un numero $b > 0$ è un maggiorante se e solo se

$$\sqrt{n^2 + 7n} - n \leq b \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Ora

$$\sqrt{n^2 + 7n} - n \leq b \Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 7n} \leq n + b \Leftrightarrow n^2 + 7n \leq n^2 + 2bn + b^2 \Leftrightarrow (7 - 2b)n \leq b^2$$

Ora se $7 - 2b = 0$, ossia se $b = 7/2$, la disuguaglianza diventa $0 \leq 49/4$ e quindi $b = 7/2$ è un maggiorante. Infine se $b < 7/2$, allora $7 - 2b > 0$ e quindi la disuguaglianza di partenza è verificata se e solo se

$$n \leq \frac{b^2}{7 - 2b}$$

e quindi non è verificata per ogni $n \in \mathcal{N}$. Pertanto $\sup A = 7/2$. Osserviamo infine che $7/2 \notin A$, infatti

$$\sqrt{n^2 + 7n} - n = \frac{7}{2} \Leftrightarrow n^2 + 7n = n^2 + 7n + \frac{49}{4} \Leftrightarrow 0 = \frac{49}{4}$$

Pertanto l'insieme A non ha massimo.

5. Sia

$$A = \left\{ \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}, x \in \mathcal{R}, x \neq 1 \right\}$$

Calcolare $\sup A$ e $\inf A$.

Verifichiamo che $\sup A = +\infty$, ossia che l'insieme A non è superiormente limitato. Infatti sia $b \in \mathcal{R}$ un numero con $b > 1$, allora:

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1} > b \Leftrightarrow x^2 + x - 1 > bx^2 - 2bx + b \Leftrightarrow (b - 1)x^2 - (2b + 1)x + b + 1 < 0$$

Siccome $\Delta(b) = (2b + 1)^2 - 4(b - 1)(b + 1) = 4b^2 + 4b + 1 - 4b^2 + 4 = 4b + 5 > 0$ risulta che la disuguaglianza considerata è verificata se

$$x \in \left(\frac{2b + 1 - \sqrt{\Delta(b)}}{2(b - 1)}, \frac{2b + 1 + \sqrt{\Delta(b)}}{2(b - 1)} \right)$$

D'altra parte $d \in \mathcal{R}$, $d < 0$ è un minorante l'insieme A se e solo se

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1} \geq d \quad \forall x \in \mathcal{R}, x \neq 1$$

Risulta

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1} \geq d \Leftrightarrow x^2 + x - 1 \geq dx^2 - 2dx + d \Leftrightarrow (1 - d)x^2 + (1 + 2d)x - (1 + d) \geq 0$$

Siccome $\Delta(d) = (1 + 2d)^2 - 4(1 + d)(1 - d) = 5 + 4d$, la disuguaglianza considerata vale per ogni $x \neq 1$ se e solo se $\Delta(d) \leq 0$ ossia se e solo se $d \leq -5/4$. Possiamo quindi concludere che

$$\inf A = -\frac{5}{4}$$

Da notare che $-5/4$ è anche il minimo elemento dell'insieme A .

6. Sia

$$A = \{ \sqrt{x^2 + x + 2} - x - 1, x \in \mathcal{R} \}$$

Verificare che $\inf A = -1/2$. Verifichiamo che $-1/2$ verifica le proprietà caratteristiche dell'estremo inferiore, ossia che:

a)

$$\sqrt{x^2 + x + 2} - x - 1 \geq -\frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

b) $\forall \varepsilon \in \mathcal{R}, \varepsilon > 0, \exists x \in \mathcal{R}$ con

$$\sqrt{x^2 + x + 2} - x - 1 < -\frac{1}{2} + \varepsilon$$

Risulta

$$\sqrt{x^2 + x + 2} - x - 1 \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 2} \geq x + 1 - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2}$$

Osserviamo infine che se $x + 1/2 < 0$ la diseuguaglianza precedente é verificata, mentre se $x + 1/2 \geq 0$, risulta

$$\sqrt{x^2 + x + 2} \geq x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + x + 2 \geq x^2 + x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2 \geq \frac{1}{4}$$

Pertanto la a) é verificata.

D'altra parte:

$$\sqrt{x^2 + x + 2} - x - 1 < -\frac{1}{2} + \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 2} < x + \frac{1}{2} + \varepsilon$$

Deve quindi essere $x + \frac{1}{2} + \varepsilon \geq 0$, ossia $x \geq -\frac{1}{2} - \varepsilon$ e in questo caso risulta, elevando al quadrato:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x + 2} - x - 1 < -\frac{1}{2} + \varepsilon &\Leftrightarrow x^2 + x + 2 < x^2 + \frac{1}{4} + \varepsilon^2 + x + 2\varepsilon x + \varepsilon \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\varepsilon x > \frac{7}{4} - \varepsilon - \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Quindi l'ultima diseuguaglianza é equivalente a

$$x > \frac{\frac{7}{4} - \varepsilon - \varepsilon^2}{2\varepsilon}$$

Pertanto é verificata anche la proprietà b) e $-1/2 = \inf A$.

7. Sia

$$A = \left\{ \frac{x+3}{(x-1)^2}, x \in \mathcal{R}, x \neq 1 \right\}$$

Calcolare $\inf A$ e $\sup A$.

Essendo l'estremo inferiore il piú grande dei minoranti, cerchiamo di determinare l'insieme dei minoranti. Dalla definizione un numero $d \in \mathcal{R}$ é un minorante se e solo se:

$$\frac{x+3}{(x-1)^2} \geq d \quad \forall x \in \mathcal{R}, x \neq 1$$

Siccome la frazione da studiare assume valori anche negativi, possiamo supporre che sia $d < 0$. Si ottiene:

$$\frac{x+3}{(x-1)^2} \geq d \Leftrightarrow x+3 \geq d(x^2 - 2x + 1) \Leftrightarrow -dx^2 + (2d+1)x + 3-d \geq 0$$

Affinché l'ultima diseuguaglianza sia vera per ogni $x \neq 1$, deve essere $\Delta(d) \leq 0$ ossia

$$\Delta(d) = (2d+1)^2 - 4d(3-d) = 4d^2 + 4d + 1 + 12d - 4d^2 = 16d + 1$$

Pertanto $\Delta(d) \leq 0 \Leftrightarrow d \leq -1/16$. Ne segue che $-1/16$ é l'estremo inferiore dell'insieme A . Osserviamo che $-1/16 \in A$ in quanto si ottiene dalla frazione considerata per $x = -7$, pertanto $-1/16 = \min A$. D'altra parte l'insieme A non é superiormente limitato. Infatti se $b \in \mathcal{R}$ é un numero positivo, risulta:

$$\frac{x+3}{(x-1)^2} > b \Leftrightarrow x+3 > b(x^2 - 2x + 1) \Leftrightarrow bx^2 - (2b+1)x + b-3 < 0$$

Affinché l'ultima diseuguaglianza ammetta almeno una soluzione deve essere $\Delta(b) \geq 0$ ed essendo

$$\Delta(b) = (2b+1)^2 - 4b(b-3) = 4b^2 + 4b + 1 + 12b - 4b^2 = 16b + 1$$

risulta $\Delta(b) > 0$ e la diseuguaglianza iniziale é verificata solo se

$$\frac{2b+1-\sqrt{16b+1}}{2b} < x < \frac{2b+1+\sqrt{16b+1}}{2b}$$

1.10 Esercizi proposti

1. Sia

$$A = \{\sqrt{n^2 + 3} - n ; n \in \mathcal{N}\}$$

Verificare che $\inf A = 0$ e $\sup A = \max A = 1$.

2. Sia

$$A = \{\sqrt{n^2 + 2n} - n ; n \in \mathcal{N}\}$$

Dire se A è limitato superiormente e, in caso affermativo, calcolare il $\sup A$.

3. Sia

$$A = \{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1} ; n \in \mathcal{N}\}$$

Verificare che $\inf A = 0$.

4. Sia

$$A = \left\{ \sqrt{n^2 + n + 1} - n ; n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare $\sup A$ e $\inf A$ e dire se sono massimo e minimo di A .

5. Dire se l'insieme

$$A = \left\{ \frac{3x-1}{x^2+x+3}, x \in \mathcal{R} \right\}$$

è limitato superiormente e in caso affermativo calcolare $\sup A$.

(La soluzione si trova alla fine del capitolo).

1.11 Alcuni complementi

Useremo in questo paragrafo le proprietà caratteristiche dell'estremo superiore ed inferiore per ottenere alcune proprietà dei numeri che, qualche volta, useremo nel seguito.

a) **Proprietà archimedeica dei numeri reali**

Siano a, b due numeri reali positivi, allora esiste $n \in \mathcal{N}$ tale che $na > b$.

Dimostrazione Supponiamo, ragionando per assurdo, che esistano due numeri reali positivi a, b tali che $na \leq b \quad \forall n \in \mathcal{N}$. Allora l'insieme

$$A = \{na ; n \in \mathcal{N}\}$$

sarebbe limitato superiormente. Indichiamo con $c = \sup A$ e ricordiamo che:

i) $na \leq c \quad \forall n \in \mathcal{N}$;

ii) $\forall \varepsilon \in \mathcal{R} \text{ con } \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathcal{N} \text{ con } na > c - \varepsilon$.

Applicando infine la seconda proprietà con $\varepsilon = a$, si otterrebbe un naturale n con $na > c - a$ e quindi $(n+1)a > c$ e questo è in contrasto con la prima proprietà caratteristica dell'estremo superiore in quanto $(n+1)a \in A$.

b) Se $A \subset \mathcal{N}$ è diverso dal vuoto, allora A ha un elemento minimo.

Dimostrazione Esercizio (Basta dimostrare che $m = \inf A \in A$).

c) $\mathcal{Q}$ è denso in $\mathcal{R}$, ossia $\forall a, b \in \mathcal{R}$ con $a < b$, $\exists r \in \mathcal{Q}$ con $a < r < b$.

Dimostrazione Possiamo supporre $0 \leq a < b$. Per la proprietà archimedeica dei numeri, esiste $n \in \mathcal{N}$ con $n(b-a) > 1$. Indichiamo ora con

$$A = \{k \in \mathcal{N} ; \frac{k}{n} \geq b\}$$

Sempre per la proprietà archimedeica $A \neq \emptyset$. Sia $m = \min A$. Essendo

$$\frac{1}{n} < b - a \leq b$$

risulta $m \geq 2$ ed inoltre $\frac{m}{n} \geq b$ e $\frac{m-1}{n} < b$ perchè $m \in A$ e $m-1 \notin A$. D'altra parte

$$\frac{m-1}{n} = \frac{m}{n} - \frac{1}{n} > b - (b-a) = a$$

Pertanto il numero razionale $r = \frac{m-1}{n}$ gode della proprietà richiesta, ossia $a < r < b$.

1.12 Principio di Induzione

Concludiamo questo primo capitolo sui numeri reali, parlando di una proprietà del sottoinsieme di $\mathcal{R}$ costituito dall'insieme dei numeri naturali $\mathcal{N}$. Tale proprietà, nota col nome di **principio di induzione**, è la seguente :

Principio di Induzione Sia $A \subset \mathcal{N}$ un insieme tale che:

- i) $1 \in A$,
- ii) se $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$,

Allora $A = \mathcal{N}$.

Tale principio viene spesso usato per dimostrare che una data proposizione relativa al numero naturale n è vera per ogni numero naturale. Infatti, se indichiamo con $\mathcal{P}(n)$ una proposizione relativa ad n , se riusciamo a verificare che:

- i) $\mathcal{P}(1)$ è vera ,
- ii) se $\mathcal{P}(n)$ è vera allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera ,

Allora ne deriva che $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n \in \mathcal{N}$.

La proprietà ii) viene comunemente chiamata **proprietà induttiva**.

La conclusione che $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n \in \mathcal{N}$ si ottiene osservando che, posto

$$A = \{n \in \mathcal{N} ; \mathcal{P}(n) \text{ è vera} \} ,$$

A verifica le ipotesi del principio di induzione e quindi $A = \mathcal{N}$.

Da notare che, se $\mathcal{P}(n)$ verifica la proprietà ii) e la i) viene sostituita da

$$iii) \mathcal{P}(n_0) \text{ è vera (dove } n_0 \text{ è un dato numero naturale) ,}$$

allora si ottiene che $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$.

Consideriamo ora alcuni esempi.

1. Verificare che $\forall n \in \mathcal{N}$, vale la formula :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} .$$

i) se $n = 1$, a primo membro della formula ho 1 e a secondo membro ho $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Pertanto l'uguaglianza vale.

ii) Supponiamo ora che la formula sia valida per un dato numero naturale n . Ottengo

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= (1 + 2 + \dots + n) + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} . \end{aligned}$$

Ossia la validità della formula per $n+1$.

2. Verificare che se $a \in \mathcal{R}$ $a \neq 1$, vale la formula:

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} .$$

i) Se $n = 1$, a primo membro ho $1 + a$ e a secondo membro

$$\frac{1 - a^2}{1 - a} = 1 + a$$

e quindi la formula vale,

ii) Supponiamo ora che la formula valga per un dato numero naturale n . Ottengo:

$$\begin{aligned} 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n + a^{n+1} &= \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + a^{n+1} = \\ &= \frac{1 - a^{n+1} + a^{n+1} - a^{n+2}}{1 - a} = \frac{1 - a^{n+2}}{1 - a} . \end{aligned}$$

Ottengo quindi la validità della formula per $n+1$.

3. Verificare che $\forall n \in \mathcal{N}$, vale la formula :

$$1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6} \cdot (2n+1)(n+1) .$$

i) se $n = 1$, a primo membro della formula ho 1 e a secondo membro ho $\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 2 = 1$. Pertanto l'uguaglianza vale.

ii) Supponiamo ora che la formula sia valida per un dato numero naturale n . Ottengo

$$\begin{aligned} 1 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= (1 + 2^2 + \dots + n^2) + (n+1)^2 = \\ &= \frac{n}{6} \cdot (2n+1)(n+1) + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6} \cdot (2n^2 + n + 6n + 6) = \frac{n+1}{6} \cdot (2n+3)(n+2) . \end{aligned}$$

Ossia la validità della formula per $n+1$.

4. **Disuguaglianza di Bernoulli** . $\forall x \in \mathcal{R}$, $x \geq -1$ e $\forall n \in \mathcal{N}$, vale la disuguaglianza:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx .$$

i) Se $n = 1$, ottengo $1 + x \geq 1 + x$. Pertanto in questo caso la disuguaglianza è vera (si riduce a una uguaglianza),

ii) Supponiamo ora che la disuguaglianza sia valida per un dato numero naturale n , allora ottengo:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

Otengo quindi che vale la disuguaglianza anche per $n+1$.

5. Verificare che $\forall n \geq 4$ vale la disuguaglianza $2^n \geq n^2$.

i) Se $n = 4$, ottengo

$$2^4 = 16 = 4^2$$

e quindi, in questo caso vale il segno di uguale,

ii) Supponiamo ora che la disuguaglianza sia vera per un dato numero naturale $n \geq 4$. Ottengo

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n^2$$

Se ora fosse $2n^2 \geq (n+1)^2$, potrei concludere che $2^{n+1} \geq (n+1)^2$ e quindi ottenere la disuguaglianza cercata per $n+1$. D'altra parte

$$\begin{aligned}2n^2 \geq (n+1)^2 &\Leftrightarrow 2n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n^2 - 2n - 1 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow n \geq 3.\end{aligned}$$

6. **Binomio di Newton** Se $n \in \mathcal{N}$ e $k \in \mathcal{Z}$ con $0 \leq k \leq n$, indichiamo con

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

dove usiamo la convenzione che $0! = 1$ e se $n \geq 1$ indichiamo con $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Il numero $n!$ viene chiamato **n fattoriale**.

I numeri $\binom{n}{k}$ (si legge n sopra k) vengono chiamati i **coefficienti binomiali**. Da notare che risulta:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

I coefficienti binomiali hanno le seguenti proprietà :

i)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

ii) Se $k \geq 1$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Verifichiamo, per esempio, che vale la ii).

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1) \cdots (n-k+2)}{(k-1)!} = \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+2)}{(k-1)!} \left[\frac{n-k+1}{k} + 1 \right] = \frac{(n+1)n(n-1) \cdots (n-k+2)}{k!} = \binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

Vale la seguente formula

Formula del binomio di Newton. Se $a, b \in \mathcal{R}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Dimostrazione (Viene riportata solo per completezza, ma non é stata svolta a lezione)

Se $n = 1$, la formula è vera. Supponiamo quindi che la formula sia vera per un dato numero naturale n e dimostriamola per $n + 1$. Risulta :

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n = a(a + b)^n + b(a + b)^n$$

Usando quindi l'ipotesi induttiva, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}(a + b)^{n+1} &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\end{aligned}$$

Ponendo ora $h = k + 1$ nella prima somma e $h = k$ nella seconda, ottengo :

$$\begin{aligned}(a + b)^{n+1} &= \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^h b^{n+1-h} + \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} a^h b^{n+1-h} = \\ &= a^{n+1} + \sum_{h=1}^n \left[\binom{n}{h-1} + \binom{n}{h} \right] a^h b^{n+1-h} + b^{n+1}\end{aligned}$$

Ricordando infine la proprietà ii) dei coefficienti binomiali, si ottiene

$$(a + b)^{n+1} = b^{n+1} + \sum_{h=1}^n \binom{n+1}{h} a^h b^{n+1-h} + a^{n+1} = \sum_{h=0}^{n+1} \binom{n+1}{h} a^h b^{n+1-h}$$

La dimostrazione è dunque completata.

Da notare che usando la proprietà ii) , si può scrivere rapidamente la seguente tabella dei coefficienti binomiali nota col nome di **Triangolo di Tartaglia**.

$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1
$n = 7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$n = 8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1
...	...

Da notare che dalla formula del binomio con $a = b = 1$, si ottiene:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

1.13 Risoluzione degli esercizi proposti nel Capitolo 1

1.3-i Determinare:

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R} ; \frac{x-3}{x+1} \leq 3 \right\}$$

$$\frac{x-3}{x+1} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{x-3-3x-3}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-6}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x+1} \geq 0$$

Pertanto

$$A = (-\infty, -3] \cup (-1, +\infty) = \{x \in \mathcal{R} ; x \leq -3\} \cup \{x \in \mathcal{R} ; x > -1\} .$$

1.3-ii Determinare:

$$B = \left\{ x \in \mathcal{R} ; \frac{x+6}{x+2} > \frac{x+1}{x-3} \right\}$$

$$\frac{x+6}{x+2} > \frac{x+1}{x-3} \Leftrightarrow \frac{x^2+6x-3x-18-x^2-x-2x-2}{(x+2)(x-3)} > 0 \Leftrightarrow \frac{20}{(x+2)(x-3)} < 0$$

Pertanto $B = (-2, 3)$.

1.3-iii Determinare:

$$C = \left\{ x \in \mathcal{R} ; \frac{x^2+2}{x-2} > x-1 \right\}$$

$$\frac{x^2+2}{x-2} > x-1 \Leftrightarrow \frac{x^2+2-x^2+x+2x-2}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{x-2} > 0$$

Ne deriva quindi che $C = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

1.3-iv Determinare:

$$D = \left\{ x \in \mathcal{R} ; \frac{x+3}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} \leq 2 \right\} .$$

$$\frac{x+3}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-2) + (x+2)(x-1) - 2(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} \leq 0$$

Sviluppando il numeratore, si ottiene:

$$x^2 - 2x + 3x - 6 + x^2 - x + 2x - 2 - 2x^2 + 4x + 2x - 4 = 8x - 12$$

Pertanto:

$$\frac{x+3}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} \leq 0$$

Studiando separatamente il segno di numeratore e denominatore, risulta:

$\frac{\begin{array}{cccccccccc} - & - & - & - & + & + & + & + & + & + \end{array}}{\frac{3}{2}}$	Numeratore
$\frac{\begin{array}{cccccccccc} + & + & + & - & - & - & - & - & - & + & + & + \end{array}}{\begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array}}$	Denominatore

Possiamo quindi concludere che

$$D = (-\infty, 1) \cup [3/2, 2)$$

1.3-v Determinare l'insieme

$$E = \left\{ x \in \mathcal{R} ; \frac{x-1}{x+2} \leq \frac{x+4}{x-3} \right\}$$

Risulta:

$$\frac{x-1}{x+2} \leq \frac{x+4}{x-3} \Leftrightarrow \frac{x^2-3x-x+3-(x^2+4x+2x+8)}{(x+2)(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x+2)(x-3)} \geq 0$$

Studiando separatamente il segno di numeratore e denominatore, risulta:

$$\begin{array}{rcc} \frac{- - - - + + + + + +}{-\frac{1}{2}} & \text{Numeratore} \\ + + + - - - - - - - - + + + & \text{Denominatore} \\ -2 & 3 \end{array}$$

Pertanto

$$E = \left(-2, -\frac{1}{2}\right] \cup (3, +\infty)$$

1.6-i) Determinare:

$$A = \left\{x \in \mathcal{R}; \frac{x+1}{x-2} \leq \frac{2x-3}{x+2}\right\}$$

$$\frac{x+1}{x-2} \leq \frac{2x-3}{x+2} \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+2) - (2x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)} \leq 0$$

Sviluppando il numeratore, ottengo:

$$x^2 + 2x + x + 2 - 2x^2 + 4x + 3x - 6 = -x^2 + 10x - 4$$

Le radici del polinomio di secondo grado che sta al numeratore sono

$$x_1 = 5 - \sqrt{21} \quad e \quad x_2 = 5 + \sqrt{21}$$

Ne deriva quindi che

$$A = (-\infty, -2) \cup [5 - \sqrt{21}, 2) \cup [5 + \sqrt{21}, +\infty)$$

1.6-ii) Determinare:

$$B = \left\{x \in \mathcal{R}; \sqrt{(x+1)(2-x)} \leq x-1\right\}$$

Osserviamo che deve essere $(x+1)(2-x) \geq 0$, affinché la radice abbia senso e quindi $x \in [-1, 2]$. Inoltre se $x-1 < 0$, ossia se $x < 1$, la disuguaglianza non è verificata. D'altra parte se $x-1 \geq 0$, ossia $x \geq 1$, allora la disuguaglianza da studiare è equivalente a quella che si ottiene elevando al quadrato entrambi i membri. Si ottiene quindi se $x \geq 1$:

$$\sqrt{(x+1)(2-x)} \leq x-1 \Leftrightarrow 2x - x^2 + 2 - x \leq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 1 \geq 0$$

Le due radici dell'ultimo polinomio di secondo grado sono

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{4} \quad e \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$$

Se ne conclude che

$$B = \left[\frac{3 + \sqrt{17}}{4}, 2\right]$$

1.6-iii) Determinare:

$$C = \left\{x \in \mathcal{R}; \frac{x^2 + x + 1}{x-3} \geq 2x + 1\right\}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x-3} \geq 2x + 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 1 - 2x^2 + 6x - x + 3}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 6x - 4}{x-3} \leq 0$$

Ora il polinomio di secondo grado che sta al numeratore ha le due radici: $x_1 = 3 - \sqrt{13}$ e $x_2 = 3 + \sqrt{13}$. Possiamo quindi concludere che

$$C = (-\infty, 3 - \sqrt{13}] \cup (3 + \sqrt{13}, +\infty)$$

1.6-iv) Determinare:

$$D = \left\{ x \in \mathcal{R}; \sqrt{(x+2)(x-1)} \leq \frac{x+3}{2} \right\}$$

Osserviamo che deve essere $(x+2)(x-1) \geq 0$, affinché la radice abbia senso e quindi $x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$. Inoltre se $x+3 < 0$, ossia se $x < -3$, la disuguaglianza non è verificata. D'altra parte se $x+3 \geq 0$, ossia $x \geq -3$, allora la disuguaglianza da studiare è equivalente a quella che si ottiene elevando al quadrato entrambi i membri. Si ottiene allora se $x \geq -3$:

$$\sqrt{(x+2)(x-1)} \leq \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 4(x^2 - x + 2x - 2) \leq x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 17 \leq 0$$

Le due radici dell'ultimo polinomio di secondo grado sono

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{52}}{3} \quad e \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{52}}{3}$$

Se ne conclude che

$$D = \left[\frac{1 - \sqrt{52}}{3}, -2 \right] \cup \left[1, \frac{1 + \sqrt{52}}{3} \right]$$

1.10-1) Sia

$$A = \{ \sqrt{n^2 + 3} - n ; n \in \mathcal{N} \}$$

Verificare che $\inf A = 0$ e $\sup A = 1$.

Risulta ovviamente

$$\sqrt{n^2 + 3} - n > 0 \quad \forall n \in \mathcal{N}.$$

D'altra parte, se $\varepsilon > 0$, si ha

$$\sqrt{n^2 + 3} - n < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 3} < n + \varepsilon \Leftrightarrow n^2 + 3 < n^2 + 2n\varepsilon + \varepsilon^2 \Leftrightarrow n > \frac{3 - \varepsilon^2}{2\varepsilon}$$

e quindi $0 = \inf A$. Osseviamo infine che $1 \in A$ (si ottiene dalla formula per $n = 1$) ed inoltre

$$\sqrt{n^2 + 3} - n \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 3} \leq n + 1 \Leftrightarrow n^2 + 3 \leq n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow n \geq 1.$$

Pertanto $1 = \max A = \sup A$.

1.10-2) Sia

$$A = \{ \sqrt{n^2 + 2n} - n ; n \in \mathcal{N} \}$$

Dire se A è limitato superiormente e, in caso affermativo, calcolare il $\sup A$.

Un numero $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante di A se e solo se risulta

$$\sqrt{n^2 + 2n} - n \leq b \quad \forall n \in \mathcal{N}.$$

D'altra parte, supponendo $b > 0$, si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 2n} - n \leq b &\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 2n} \leq n + b \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n^2 + 2n \leq n^2 + 2nb + b^2 \Leftrightarrow 2(b-1)n + b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Siccome si richiede che le disuguaglianze siano vere $\forall n \in \mathcal{N}$, il coefficiente di n nell'ultima deve essere maggiore o uguale a zero, ossia deve essere $b \geq 1$. Pertanto $b = 1$ è il più piccolo dei maggioranti e quindi $\sup A = 1$. Verifichiamo, per completezza, se risulta anche $1 = \max A$. Ovviamente questo è vero se e solo se $1 \in A$. Vediamo dunque se l'equazione

$$\sqrt{n^2 + 2n} - n = 1$$

ha una soluzione o no. Risulta

$$\sqrt{n^2 + 2n} - n = 1 \Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 2n} = n + 1 \Leftrightarrow n^2 + 2n = n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow 0 = 1$$

Allora $1 \notin A$ e pertanto l'insieme A non ha massimo.

1.10-3) Sia

$$A = \{ \sqrt{n+4} - \sqrt{n+1} ; n \in \mathcal{N} \}$$

Verificare che $\inf A = 0$.

Ovviamente risulta:

$$\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathcal{N} .$$

D'altra parte se $\varepsilon > 0$, ottengo:

$$\begin{aligned} \sqrt{n+4} - \sqrt{n+1} < \varepsilon &\Leftrightarrow \sqrt{n+4} < \varepsilon + \sqrt{n+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n+4 < \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{n+1} + n+1 \Leftrightarrow 3 - \varepsilon^2 < 2\varepsilon\sqrt{n+1} \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, se $3 - \varepsilon^2 \leq 0$, allora l'ultima disuguaglianza ottenuta è verificata $\forall n \in \mathcal{N}$; mentre se $3 - \varepsilon^2 > 0$, ottengo che:

$$3 - \varepsilon^2 < 2\varepsilon\sqrt{n+1} \Leftrightarrow (3 - \varepsilon^2)^2 < 4\varepsilon^2(n+1) \Leftrightarrow n > \frac{(3 - \varepsilon^2)^2}{4\varepsilon^2} - 1 .$$

In ogni caso quindi, la disuguaglianza iniziale ammette soluzioni. Pertanto $0 = \inf A$.

1.10-4) Sia

$$A = \{ \sqrt{n^2 + n + 1} - n ; n \in \mathcal{N} \}$$

Calcolare $\sup A$ e $\inf A$ e dire se sono massimo e minimo di A .

Un numero $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante di A se e solo se risulta

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - n \leq b \quad \forall n \in \mathcal{N} .$$

D'altra parte, possiamo supporre $b > 0$, in quanto se $b \leq 0$ la disuguaglianza è verificata essendo il primo membro positivo. Risulta dunque:

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + n + 1} - n \leq b &\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + n + 1} \leq n + b \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n^2 + n + 1 \leq n^2 + 2nb + b^2 \Leftrightarrow (2b - 1)n \geq 1 - b^2 \end{aligned}$$

Siccome si richiede che le disuguaglianze siano vere $\forall n \in \mathcal{N}$, il coefficiente di n nell'ultima deve essere positivo e quindi il numero $b \in \mathcal{R}$ è maggiorante se e solo se

$$2b - 1 > 0 \quad e \quad n \geq \frac{1 - b^2}{2b - 1} \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Ne deriva quindi che deve essere:

$$2b - 1 > 0 \quad e \quad 1 \geq \frac{1 - b^2}{2b - 1}$$

ossia

$$b > \frac{1}{2} \quad e \quad b^2 + 2b - 2 \geq 0$$

In conclusione quindi $b \in \mathcal{R}$ è maggiorante se e solo se $b \geq \sqrt{3} - 1$. Pertanto $\sqrt{3} - 1 = \sup A$. Siccome poi $\sqrt{3} - 1 \in A$, risulta pure $\sqrt{3} - 1 = \max A$.

D'altra parte $d \in \mathcal{R}$ è minorante A se e solo se:

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - n \geq d \quad \forall n \in \mathcal{N} .$$

Supponendo anche in questo caso $d > 0$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + n + 1} - n \geq d &\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + n + 1} \geq n + d \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n^2 + n + 1 \geq n^2 + 2nd + d^2 \Leftrightarrow (2d - 1)n \leq 1 - d^2 \end{aligned}$$

Siccome si richiede che le disequaglianze siano vere $\forall n \in \mathcal{N}$, il coefficiente di n nell'ultima deve essere minore o uguale a zero e quindi il numero $d \in \mathcal{R}$ è minorante se e solo se

$$2d - 1 \leq 0 \quad \text{ossia} \quad d \leq \frac{1}{2}$$

Allora risulta $\inf A = \frac{1}{2}$. Da notare infine che $\frac{1}{2} \notin A$ e quindi non è il minimo di A .

1.10-5) Dire se l'insieme

$$A = \left\{ \frac{3x - 1}{x^2 + x + 3}, x \in \mathcal{R} \right\}$$

è limitato superiormente e in caso affermativo calcolare $\sup A$.

Un numero positivo $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante dell'insieme A se e solo se

$$\frac{3x - 1}{x^2 + x + 3} \leq b \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

Risulta dunque:

$$\frac{3x - 1}{x^2 + x + 3} \leq b \iff 3x - 1 \leq b(x^2 + x + 3) \iff bx^2 + (b - 3)x + 3b + 1 \geq 0$$

Ora quest'ultima disequaglianza è verificata per ogni $x \in \mathcal{R}$ se e solo se $b > 0$ e $\Delta(b) = (b - 3)^2 - 4b(3b + 1) \leq 0$. Risulta: $\Delta(b) = b^2 - 6b + 9 - 12b^2 - 4b = -(11b^2 + 10b - 9) \leq 0$. Pertanto $\Delta(b) \leq 0 \iff 11b^2 + 10b - 9 \geq 0$. Le radici dell'ultimo polinomio di secondo grado sono:

$$b_1 = \frac{-5 - \sqrt{25 + 99}}{11} \quad e \quad b_2 = \frac{-5 + \sqrt{124}}{11}$$

Ne deriva quindi che b è maggiorante se e solo se $b \geq b_2$. Pertanto b_2 il più piccolo dei maggioranti ossia l'estremo superiore di A . Da notare che b_2 anche il massimo elemento di A in quanto $b_2 \in A$ avendo l'equazione

$$\frac{3x - 1}{x^2 + x + 3} = b_2$$

una soluzione (e una sola).

2 FUNZIONI

In questo secondo capitolo viene introdotto il concetto di funzione e vengono illustrate alcune proprietà generali delle funzioni che saranno usate nel seguito.

2.1 Definizione di funzione e proprietà generali

Siano $A, B \subset \mathcal{R}$, chiameremo f una funzione da A in B ed useremo la notazione:

$$f : A \rightarrow B$$

una legge che ad ogni elemento $x \in A$ associa un ben determinato elemento di B che indicheremo con $f(x)$.

Nei casi che considereremo in questo corso, la legge che definisce una funzione sarà di solito espressa da una formula matematica.

L'insieme A dove la funzione f è definita (ossia l'insieme dei numeri reali per cui la legge ha senso) viene chiamato **l'insieme di definizione o il dominio di** f ed indicato a volte con $\mathcal{D}(f)$.

L'insieme

$$\mathcal{R}(f) = \{y \in \mathcal{R}, \exists x \in A \text{ con } f(x) = y\}$$

viene chiamato **l'insieme dei valori o il codominio di** f .

Se $f : A \rightarrow B$ è una funzione chiameremo **grafico della funzione** f l'insieme:

$$\text{graf } f = \{(x, y); x \in \mathcal{D}(f), y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in \mathcal{D}(f)\}$$

Nel seguito, useremo pure le notazioni:

Se $X \subset A$

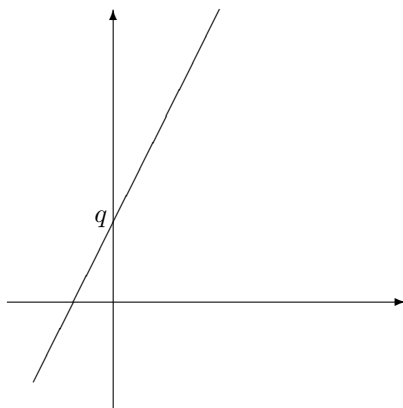
$$f(X) = \{f(x), x \in X\} = \{y \in B; \exists x \in X \text{ con } f(x) = y\}$$

Se $Y \subset B$

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A; f(x) \in Y\}$$

Consideriamo ora alcuni esempi.

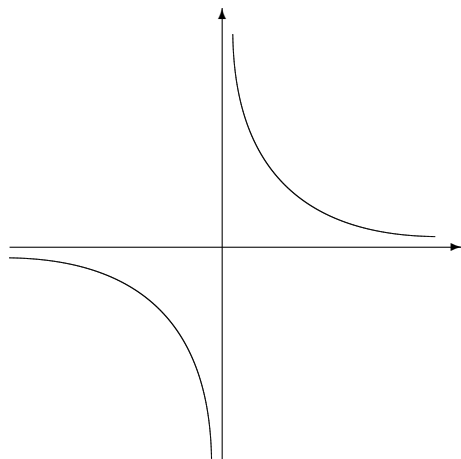
- a) Sia $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ la funzione definita da $f(x) = mx + q$ (con $m, q \in \mathcal{R}$ numeri fissati). Il grafico di f (polinomio in x di primo grado) è una retta.



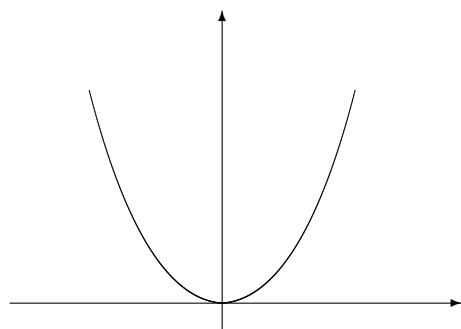
b) Sia $A = \{x \in \mathcal{R} ; x \neq 0\}$ e sia $f : A \rightarrow \mathcal{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

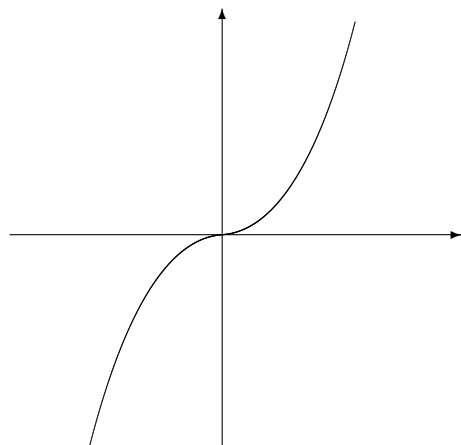
Il grafico di f è dato dalla seguente figura (iperbole equilatera):



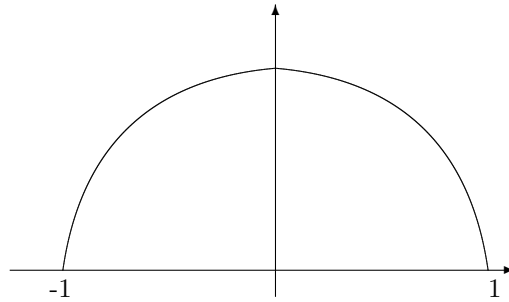
c) Sia $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^2$. Il grafico di f è dato dalla seguente figura (parabola):



d) Sia $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^3$. Il grafico di f è dato dalla seguente figura:



- e) Sia $f : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{R}$ la funzione definita da $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. È interessante notare che il grafico di f è la semisfera superiore di centro l'origine e raggio 1.



Sia $f : A \rightarrow B$ una data funzione. Diremo che

- i) f è **iniettiva** se

$$x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

o equivalentemente

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2 ;$$

- ii) f è **suriettiva** (su B) se $f(A) = B$ ossia se

$$\forall y \in B \exists x \in A \text{ con } f(x) = y ;$$

- iii) f è **biettiva** se f è iniettiva e suriettiva (f in tal caso è anche chiamata una **corrispondenza biunivoca** tra A e B)

- iv) f è **strettamente crescente** se

$$x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) ;$$

f è **crescente** se

$$x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) ;$$

- v) f è **strettamente decrescente** se

$$x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2) ;$$

f è **decrescente** se

$$x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2) .$$

Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ due funzioni assegnate. Chiameremo **funzione composta** di f e g e la indicheremo col simbolo $g \circ f$ la funzione da A in C definita da:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad x \in A$$

Infine se $f : A \rightarrow B$ è una funzione iniettiva e suriettiva, diremo anche che f è **invertibile** e chiameremo **funzione inversa** di f la funzione $g : B \rightarrow A$ definita dalla seguente legge:

$$\text{se } y \in B, \quad g(y) = \text{all'unica soluzione } x \in A \text{ dell'equazione } f(x) = y$$

Da notare che, dalla definizione di funzione inversa, si hanno le due seguenti identità:

i) $f(g(y)) = y \quad \forall y \in B$,

ii) $g(f(x)) = x \quad \forall x \in A$.

La funzione g , inversa della funzione f viene spesso indicata col simbolo f^{-1} (che non va confuso con $1/f$).

Consideriamo per concludere alcuni esempi.

1. Sia

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}, \quad x \in A = \{x \in \mathcal{R} ; x \neq -2\}$$

Verifichiamo che f è iniettiva. Infatti se $x, y \in A$,

$$\frac{2x+1}{x+2} = \frac{2y+1}{y+2} \Rightarrow 2xy + y + 4x + 2 = 2xy + x + 4y + 2 \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y$$

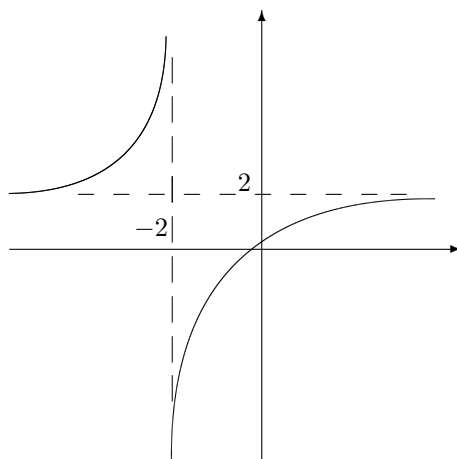
Pertanto f è iniettiva. Calcoliamo ora l'insieme dei valori di f : $f(A)$. Ricordiamo che $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A$ con $f(x) = y$. Allora $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A$ con

$$\frac{2x+1}{x+2} = y \Leftrightarrow 2x+1 = xy+2y \Leftrightarrow (2-y)x = 2y-1 \Leftrightarrow y \neq 2 \quad e \quad x = \frac{2y-1}{2-y}$$

Se ne conclude quindi che

$$f(A) = \{y \in \mathcal{R} ; y \neq 2\} = B$$

Il grafico della funzione f è del tipo di quello rappresentato in figura:



La funzione $f : A \rightarrow B$ è iniettiva e suriettiva e la sua funzione inversa $g : B \rightarrow A$ è data dalla funzione:

$$g(y) = \frac{2y-1}{2-y}, \quad y \in B$$

Verifichiamo direttamente, per esempio, che $f(g(y)) = y \quad \forall y \in B$. Infatti :

$$f(g(y)) = \frac{2g(y)+1}{g(y)+2} = \frac{2 \frac{2y-1}{2-y} + 1}{\frac{2y-1}{2-y} + 2} = \frac{4y-2+2-y}{2y-1+4-2y} = \frac{3y}{3} = y$$

2. Sia

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad x \in \mathcal{R}^+ = \{x \in \mathcal{R} ; x > 0\}.$$

Verifichiamo se f è iniettiva. Siano $x, y \in \mathcal{R}^+$, risulta:

$$x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y} \Leftrightarrow x^2 y + y = x y^2 + x \Leftrightarrow x y(x - y) + y - x = 0 \Leftrightarrow (x y - 1)(x - y) = 0$$

La funzione quindi non è iniettiva, infatti l'uguaglianza $f(x) = f(y)$ non vale solo quando $x = y$, ma anche quando $xy = 1$ ossia quando $y = \frac{1}{x}$. Ad esempio

$$f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right) \quad , \quad f(3) = f\left(\frac{1}{3}\right) .$$

Calcoliamo ora l'insieme dei valori $f(\mathcal{R}^+)$. Ricordiamo che

$$y \in f(\mathcal{R}^+) \Leftrightarrow \exists x \in \mathcal{R}^+ \text{ con } x + \frac{1}{x} = y$$

D'altra parte

$$x + \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x^2 - yx + 1 = 0$$

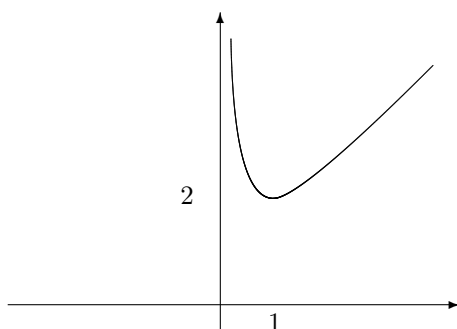
Il delta del polinomio di secondo grado (in x) trovato è dato da $\Delta(y) = y^2 - 4$ e quindi, se vogliamo che l'equazione considerata abbia almeno una soluzione deve essere $\Delta(y) \geq 0$, ossia $y \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ e, in tal caso, le soluzioni sono

$$x_1 = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

Osserviamo infine che se $y < 0$ le due soluzioni trovate sono negative, mentre se $y > 0$ sono positive. Possiamo quindi concludere che l'equazione nella $x : x + \frac{1}{x} = y$ ha almeno una soluzione $x > 0$ se e solo se $y \geq 2$. Ne deriva quindi che

$$f(\mathcal{R}^+) = [2, +\infty) .$$

Osserviamo infine che il grafico della funzione f è del tipo:



3. Sia

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x \quad x \in \mathcal{R} .$$

Anche in questo caso verichiamo se f è iniettiva. Risulta:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 1} - x &= \sqrt{y^2 + 1} - y \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1} = x - y \Rightarrow \\ x^2 + 1 + y^2 + 1 - 2\sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} &= x^2 + y^2 - 2xy \Rightarrow 1 + xy = \sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} \Rightarrow \\ 1 + x^2 y^2 + 2xy &= x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 1 \Rightarrow (x - y)^2 = 0 \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Pertanto la funzione è iniettiva.

Per calcolare l'insieme dei valori, osserviamo in primo luogo che $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}$, pertanto $f(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}^+$. D'altra parte, se $y \in \mathcal{R}^+$, risulta

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = x + y \Leftrightarrow x + y \geq 0 \quad e \quad x^2 + 1 = x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow x + y \geq 0 \quad e \quad x = \frac{1 - y^2}{2y}$$

Da notare che se

$$x = \frac{1-y^2}{2y} \quad e \quad y > 0$$

allora la condizione $x + y \geq 0$ è verificata, infatti:

$$x + y = \frac{1-y^2}{2y} + y = \frac{1+y^2}{2y} > 0$$

Pertanto l'equazione considerata ($\sqrt{x^2+1} - x = y$) ha una soluzione $\forall y \in \mathcal{R}^+$. Allora $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^+$. Da notare infine che la funzione $g : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}$ definita da :

$$g(y) = \frac{1-y^2}{2y}$$

è la funzione inversa di f . Verifichiamo per concludere che $f(g(y)) = y \quad \forall y \in \mathcal{R}^+$ e che $g(f(x)) = x \quad \forall x \in \mathcal{R}$. Infatti risulta :

$$\begin{aligned} f(g(y)) &= \sqrt{g^2(y)+1} - g(y) = \sqrt{\left(\frac{1-y^2}{2y}\right)^2 + 1} - \frac{1-y^2}{2y} = \\ &= \sqrt{\frac{1+y^4-2y^2+4y^2}{4y^2}} - \frac{1-y^2}{2y} = \frac{1+y^2}{2y} - \frac{1-y^2}{2y} = y \\ g(f(x)) &= \frac{1-f^2(x)}{2f(x)} = \frac{1-(\sqrt{x^2+1}-x)^2}{2(\sqrt{x^2+1}-x)} = \frac{2x(\sqrt{x^2+1}-x)}{2(\sqrt{x^2+1}-x)} = x \end{aligned}$$

2.2 Esercizi proposti

1. Sia

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \quad x \in \mathcal{R}, \quad x \neq 2.$$

- i) Verificare che f è iniettiva ,
- ii) calcolare l'insieme dei valori ,
- iii) determinare la funzione inversa.

2. Sia

$$f(x) = x - \sqrt{x^2+2} \quad x \in \mathcal{R}$$

- i) Dire se f è iniettiva;
- ii) Calcolare l'insieme dei valori di f : $f(\mathcal{R})$.

3. Sia

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1} \quad x \in \mathcal{R}$$

- i) Dire se f è iniettiva;
- ii) Calcolare l'insieme dei valori di f : $f(\mathcal{R})$.

4. Sia

$$f(x) = \sqrt{x^2+x+2} - x$$

Verificare che f è iniettiva, calcolare l'insieme dei valori di f e scrivere la funzione inversa di f .

(La soluzione si trova alla fine del capitolo).

2.3 Alcune funzioni elementari

Ricorderemo in questo paragrafo la definizione e le principali proprietà di alcune funzioni elementari che useremo di frequente nel seguito.

1. Funzione potenza con esponente naturale

La funzione $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ definita da

$$f(x) = x^n \quad n \in \mathcal{N}$$

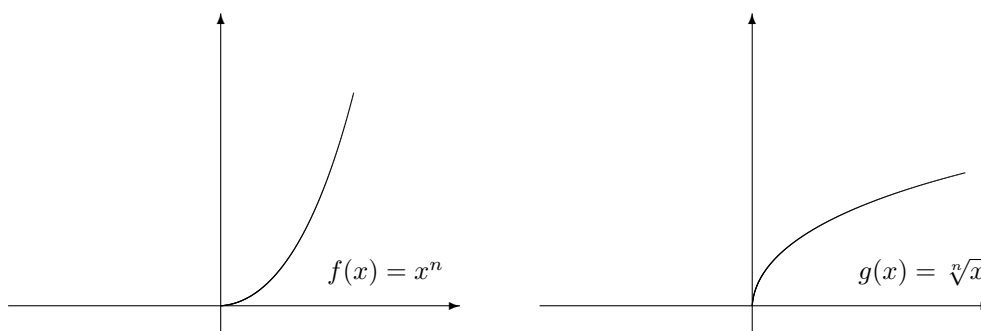
se viene ristretta all'insieme $A = \{x \in \mathcal{R} ; x \geq 0\}$ è strettamente crescente e quindi iniettiva e $f : A \rightarrow A$ è una corrispondenza biunivoca. Possiamo quindi considerare la sua funzione inversa. Tale funzione inversa $g : A \rightarrow A$ verrà indicata col simbolo

$$g(y) = \sqrt[n]{y}$$

e chiamata la **radice n-esima** di y ($y \geq 0$). Pertanto $\forall y \geq 0$, $\sqrt[n]{y}$ è quell'unico numero non negativo tale che

$$(\sqrt[n]{y})^n = y$$

I grafici delle due funzioni sono i seguenti :

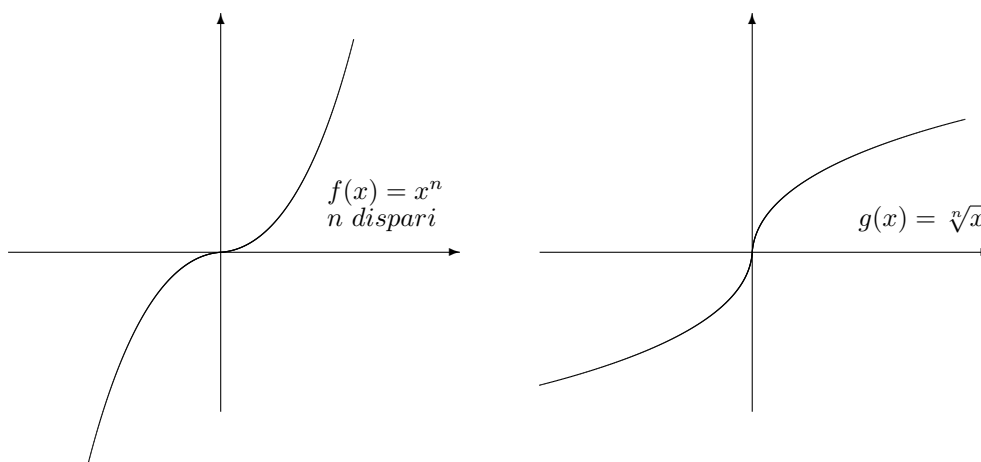


2. Funzione potenza con esponente naturale dispari

Da notare che se $n \in \mathcal{N}$ è un numero dispari, allora la funzione considerata $f(x) = x^n$ ($f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$) è strettamente crescente e suriettiva e quindi invertibile (senza imporre la restrizione $x \geq 0$). Per n dispari quindi la funzione

$$g(y) = \sqrt[n]{y}$$

è definita $\forall y \in \mathcal{R}$. In questo caso, i grafici delle due funzioni sono i seguenti :



3. Funzione esponenziale

Sia $a \in \mathcal{R}$ con $a > 1$. Definiamo $\forall n \in \mathcal{N}$:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

e $\forall n \in \mathcal{N}$ e $m \in \mathcal{Z}$:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^m$$

Si può verificare facilmente (e lo lasciamo per esercizio) che se $n, q \in \mathcal{N}$ e $m, p \in \mathcal{Z}$ verificano la relazione

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

allora :

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$$

È possibile allora definire la potenza di a con esponente razionale, ponendo $\forall r \in \mathcal{Q}$:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} \text{ se } r = \frac{m}{n} \text{ con } m \in \mathcal{Z} \text{ e } n \in \mathcal{N}$$

Ricordando che $a > 1$, la funzione così definita gode delle seguenti proprietà :

i)

$$a^r > 0 \quad \forall r \in \mathcal{Q}$$

ii)

$$a^r > 1 \text{ se } r > 0, \quad a^r < 1 \text{ se } r < 0$$

iii)

$$a^{r+s} = a^r a^s \text{ e } (a^r)^s = a^{r \cdot s} \quad \forall r, s \in \mathcal{Q}$$

iv)

$$a^r \text{ è una funzione strettamente crescente.}$$

Verifichiamo ad esempio le proprietà iii) e iv).

Esprimendo $r, s \in \mathcal{Q}$ come frazioni con lo stesso denominatore, ad esempio

$$r = \frac{m}{n}, \quad s = \frac{p}{n} \quad n \in \mathcal{N}, \quad m, p \in \mathcal{Z}$$

risulta:

$$a^{r+s} = a^{\frac{m+p}{n}} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^{m+p} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^m \left(\sqrt[n]{a} \right)^p = a^r a^s$$

Analogamente:

$$(a^r)^s = \left(\sqrt[n]{a^r} \right)^p = \left(\sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{a} \right)^m} \right)^p = \left(\sqrt[n^2]{a} \right)^{mp} = a^{\frac{mp}{n^2}} = a^{r \cdot s}$$

D'altra parte se $r, s \in \mathcal{Q}$ e $r < s$, si ha:

$$a^s - a^r = a^r (a^{s-r} - 1) > 0$$

perchè $a^r > 0$ e $a^{s-r} > 1$ essendo $s - r > 0$.

Possiamo infine estendere la funzione esponenziale a qualunque esponente reale, ponendo se $x \in \mathcal{R}$:

$$a^x = \sup \{ a^r ; r \in \mathcal{Q}, r < x \}$$

Ottengo così una funzione $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^+$ che indicheremo con $f(x) = a^x$ e che chiameremo la **funzione esponenziale** (di base a). Essa mantiene le proprietà scritte sopra per l'esponente razionale, in particolare :

i)

$$a^x > 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

ii)

$$a^x > 1 \quad \text{se } x > 0, \quad a^x < 1 \quad \text{se } x < 0$$

iii)

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad \text{e} \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad \forall x, y \in \mathcal{R}$$

iv)

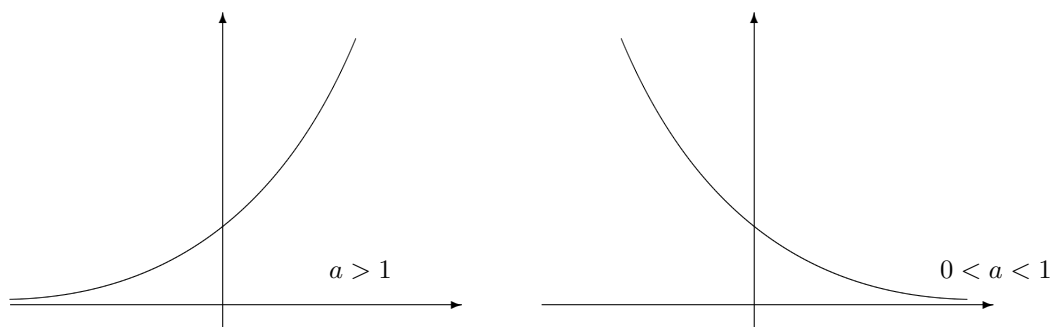
a^x è una funzione strettamente crescente.

Si può infine definire a^x anche quando la base $a \in (0, 1)$. Lo si può fare nello stesso modo che abbiamo seguito con $a > 1$ con le ovvie modifiche, oppure si può procedere rapidamente ponendo in questo caso

$$a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$$

e usare la definizione già data, in quanto $1/a$ è maggiore di 1.

Il grafico della funzione esponenziale è dato dalle seguenti figure:



4. La funzione logaritmo

Abbiamo visto nell'esempio precedente che la funzione esponenziale $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^+$ definita da $f(x) = a^x$ $a > 0$ $a \neq 1$ è una funzione biettiva. Si può considerare pertanto la sua funzione inversa $g : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}$. Tale funzione inversa viene indicata col simbolo:

$$g(y) = \log_a y$$

(**logaritmo in base a di y**). Le principali proprietà del logaritmo sono le seguenti:

i)

$$a^{\log_a y} = y \quad \forall y \in \mathcal{R}^+$$

$$\log_a (a^x) = x \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

ii)

$$\log_a (yz) = \log_a y + \log_a z \quad \forall y, z \in \mathcal{R}^+$$

iii)

$$\log_a (y^z) = z \log_a y \quad \forall y \in \mathcal{R}^+ \quad \text{e} \quad \forall z \in \mathcal{R}$$

iv)

$$\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b} \quad \forall y, a, b \in \mathcal{R}^+ \quad a, b \neq 1$$

Verifichiamo per completezza le proprietà ora enunciate.

i) Sono una conseguenza immediata del fatto che la funzione $g(y) = \log_a y$ è la funzione inversa della funzione $f(x) = a^x$.

ii) Risulta:

$$a^{\log_a (yz)} = yz = a^{\log_a y} a^{\log_a z} = a^{\log_a y + \log_a z}$$

Allora :

$$\log_a (yz) = \log_a y + \log_a z$$

e quindi vale la ii).

iii) Esercizio.

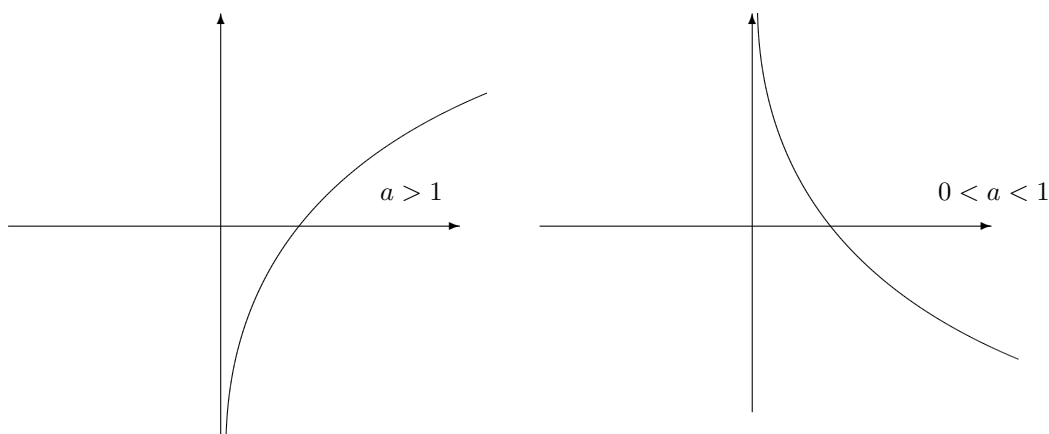
iv) Risulta:

$$a^{\log_a y} = y = b^{\log_b y} = (a^{\log_a b})^{\log_b y} = a^{\log_a b \log_b y}$$

Ne deriva quindi che

$$\log_a y = \log_a b \log_b y$$

Ricordiamo infine che il grafico della funzione logaritmo è il seguente:

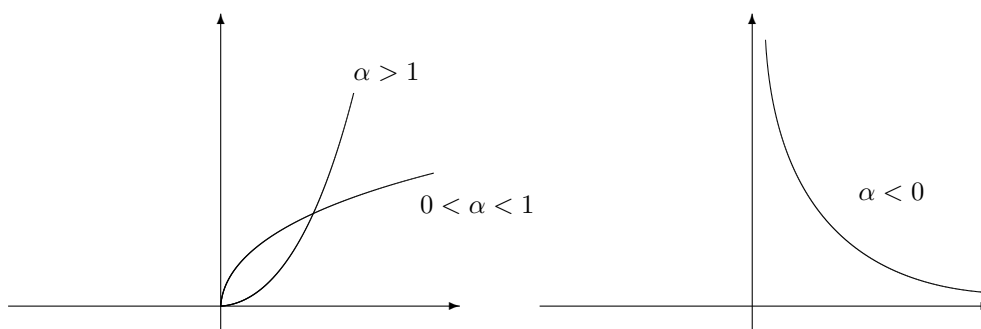


5. La funzione potenza

Fissato un numero $\alpha \in \mathcal{R}$, chiameremo **funzione potenza (con esponente α)** la funzione $f : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}^+$ definita da:

$$f(x) = x^\alpha = 10^{\alpha \log_{10} x}$$

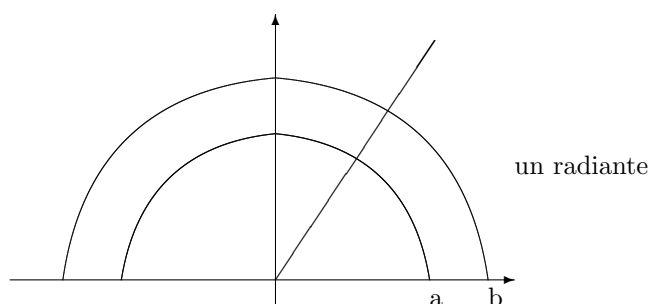
Il grafico della funzione potenza è dato dalle seguenti figure:



6. Le funzioni trigonometriche

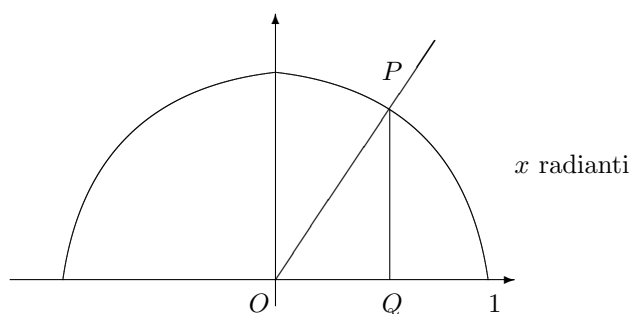
Ricorderemo in questo paragrafo la definizione e le proprietà più importanti delle funzioni trigonometriche seguendo un ragionamento puramente geometrico che non ha nessuna pretesa di essere completo.

Come unità di misura degli angoli considereremo **l'angolo radiante** definito come quell'angolo che, posto al centro di una circonferenza, determina su di essa un arco la cui lunghezza è uguale al raggio della circonferenza stessa. Da notare che, per la similitudine dei settori che intervengono, la definizione di radiante non dipende dal raggio della circonferenza scelta come si può vedere dalla figura seguente:



Fissato ora un numero reale x , consideriamo l'angolo al centro della circonferenza di centro l'origine e raggio 1, che misura x radianti (il verso positivo è quello antiorario). Definiremo allora:

$$\sin x = \overline{QP} \quad \cos x = \overline{OQ}$$



Ovviamente se il raggio della circonferenza che stiamo considerando non fosse 1, si avrebbe:

$$\sin x = \frac{\overline{QP}}{\overline{OP}} \quad \cos x = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$$

Alcune proprietà elementari delle funzioni ora definite sono le seguenti:

i) (Teorema di Pitagora)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

ii)

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin x \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos x \end{aligned} \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

iii)

$$\begin{aligned} \sin(x + \pi) &= -\sin x \\ \cos(x + \pi) &= -\cos x \end{aligned} \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

iv)

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x \end{aligned} \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

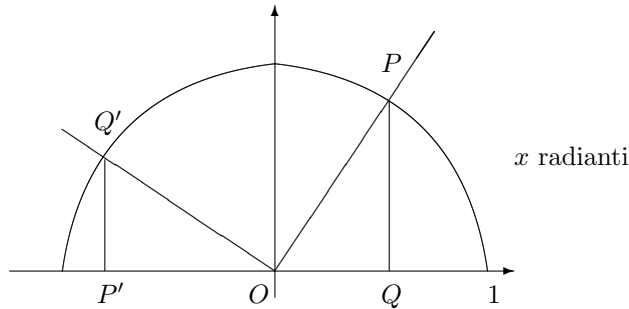
v)

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x \\ \cos(-x) &= \cos x \end{aligned} \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

vi) **Formula della somma per il coseno**

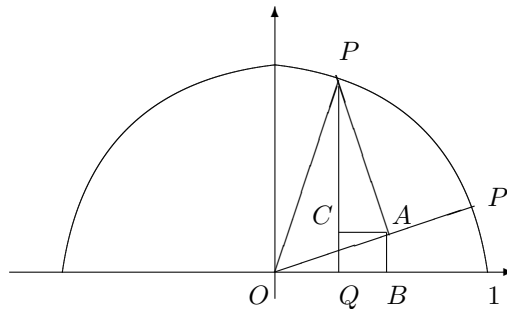
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \forall x, y \in \mathcal{R}$$

La prima proprietà espressa in iv) si può verificare ragionando sulla seguente figura:



I due triangoli OQP e $OQ'P'$ sono uguali e quindi $\overline{P'Q'} = \overline{OQ}$.

Per verificare la formula della somma per il coseno, ragioneremo sulla seguente figura:



Supponiamo che gli angoli $\widehat{BOP'}$ e $\widehat{P'OP}$ misurino rispettivamente x radianti ed y radianti. Risulta allora, ricordando che il raggio della circonferenza della figura è 1, $\overline{OQ} = \cos(x + y)$. Useremo per ottenere la formula vi), l'uguaglianza: $\overline{OQ} = \overline{OB} - \overline{QB}$. Nella figura, il segmento PA è ortogonale al segmento OP' , così che il triangolo OAP è rettangolo con angolo retto in A . Risulta allora: $\overline{AP} = \sin y$. D'altra parte, anche il triangolo ACP è rettangolo con angolo retto in C e l'angolo $\widehat{CPA}$ è uguale all'angolo $\widehat{BOP'}$ e quindi misura x radianti, allora:

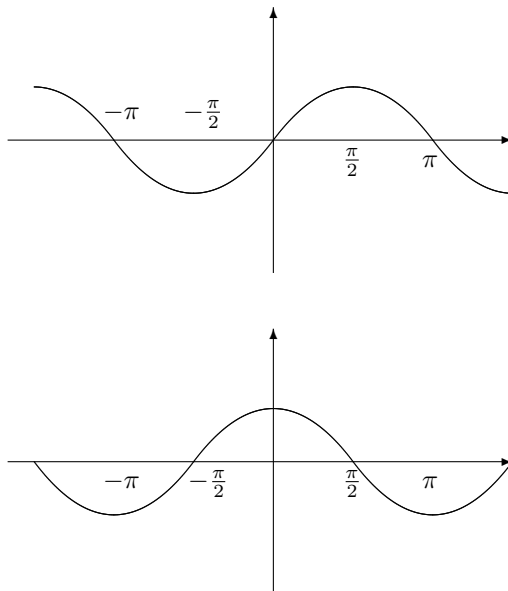
$$\overline{CA} = \overline{QB} = \overline{AP} \sin x = \sin y \sin x$$

D'altra parte

$$\overline{OB} = \overline{OA} \cos x = \cos y \cos x$$

e quindi si ottiene la formula della somma.

I grafici delle funzioni *seno* e *coseno* sono i seguenti :



7. La funzione tangente

Oltre alle due funzioni seno e coseno, considereremo anche la funzione tangente definita da:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

La funzione tangente è definita solamente per quei valori di x per cui $\cos x \neq 0$ ossia per

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

La funzione tangente è periodica di periodo π ossia

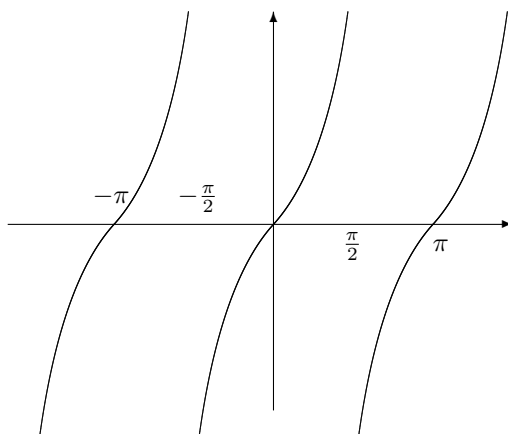
$$\tan x = \tan(x + \pi) \quad \forall x \in D$$

(dove abbiamo indicato con D il dominio della tangente ossia

$$D = \{x \in \mathbb{R} ; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\})$$

e in ogni intervallo in cui è definita è strettamente crescente.

Il grafico della tangente è dato da:

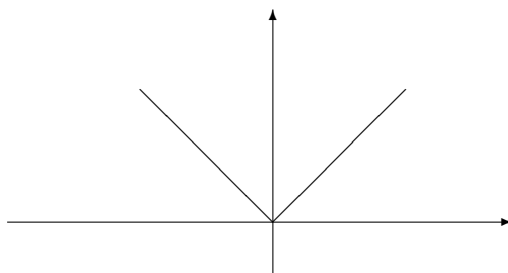


8. La funzione modulo

Fissato $x \in \mathcal{R}$, definiamo

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

La funzione f ora definita viene chiamata la funzione **modulo o valore assoluto** ed ha il seguente grafico:



Alcune proprietà del modulo che useremo spesso nel seguito sono :

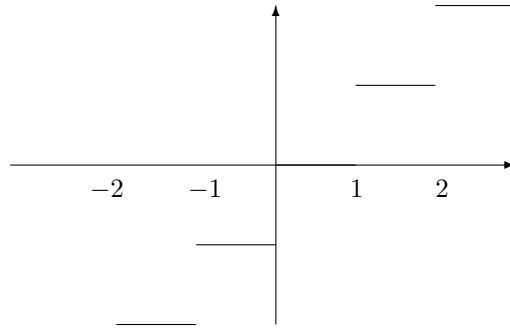
- i) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{R} \quad \text{e} \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- ii) $|xy| = |x| |y| \quad \forall x, y \in \mathcal{R}$,
- iii) **Disuguaglianza triangolare**

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathcal{R}$$

- iv) se $r > 0$, allora $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$.

9. La funzione parte intera

Fissato un numero $x \in \mathcal{R}$, esiste un unico $k \in \mathcal{Z}$, tale che $k \leq x < k + 1$. Tale unico numero intero k viene chiamato la **parte intera** di x ed indicato col simbolo $[x]$. Il grafico della funzione $f(x) = [x]$ è dato dalla seguente figura:



2.4 Alcune altre formule trigonometriche

a) Usando le proprietà delle funzioni trigonometriche elencate sopra, ricaviamo alcune altre formule di uso comune .

1. Formula della differenza per il coseno

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad \forall x, y \in \mathcal{R}$$

Infatti :

$$\cos(x - y) = \cos(x + (-y)) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

2. Formula della somma e della differenza per il seno

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \\ \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \sin y \cos x \end{aligned} \quad \forall x, y \in \mathcal{R}$$

Infatti, usando le relazioni $\sin x = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$ e $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= -\cos(x + y + \frac{\pi}{2}) = -(\cos(x + \frac{\pi}{2}) \cos y - \sin(x + \frac{\pi}{2}) \sin y) = \\ &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} \end{aligned}$$

Infatti si ha:

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

4.

$$\begin{aligned} \sin x - \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x - y}{2}\right) \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x - y}{2}\right) \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \end{aligned}$$

Osserviamo che dalle relazioni:

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$$

$$\sin(u - v) = \sin u \cos v - \sin v \cos u$$

si ottiene, facendo la differenza:

$$\sin(u + v) - \sin(u - v) = 2 \sin v \cos u$$

Scegliendo infine

$$\begin{cases} u + v = x \\ u - v = y \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} u = \frac{x+y}{2} \\ v = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

si ricava la prima formula.

In modo simile si ricava la seconda.

b) Consideriamo ora alcune disuguaglianze in cui interviene il modulo.

1. Determinare l'insieme

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R} \, , \, \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \leq 2 \right\}$$

Come abbiamo visto, devono essere verificate contemporaneamente le due disuguaglianze:

$$-2 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq 2$$

Abbiamo quindi

$$\frac{x+1}{x-1} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{-x+3}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} \geq 0$$

ossia

$$\frac{x+1}{x-1} \leq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$$

D'altra parte

$$\frac{x+1}{x-1} \geq -2 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \frac{1}{3}] \cup (1, +\infty)$$

Pertanto

$$A = (-\infty, \frac{1}{3}] \cup [3, +\infty)$$

2. Determinare l'insieme

$$A = \{ x \in \mathcal{R} \, , \, |x^2 + x| \geq 2x + 1 \}$$

Osserviamo in primo luogo che se $x^2 + x \geq 0$, ossia se $x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$, allora la disuguaglianza diventa $x^2 + x \geq 2x + 1$, ossia $x^2 - x - 1 \geq 0$ disuguaglianza che è verificata per valori di x esterni all'intervallo

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

Possiamo quindi concludere che

$$(-\infty, -1] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right) \subset A$$

D'altra parte se $x^2 + x \leq 0$, ossia se $x \in [-1, 0]$, allora la disuguaglianza diventa $-x^2 - x \geq 2x + 1$, ossia $x^2 + 3x + 1 \leq 0$ disuguaglianza che è verificata per valori di x interni all'intervallo

$$\left[\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right]$$

Pertanto la disuguaglianza vale anche nell'intervallo

$$\left[-1, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right]$$

Ne possiamo concludere che

$$A = \left(-\infty, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty \right)$$

2.5 Risoluzione degli esercizi proposti nel Capitolo 2

1. Sia

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \quad x \in \mathcal{R}, \quad x \neq 2.$$

- i) Verificare che f è iniettiva,
- ii) calcolare l'insieme dei valori,
- iii) determinare la funzione inversa.

Risulta:

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{y+1}{y-2} \Leftrightarrow xy + y - 2x - 2 = xy + x - 2y - 2 \Leftrightarrow 3y = 3x$$

Pertanto la funzione considerata è iniettiva. Fissato $y \in \mathcal{R}$, si ha:

$$y = \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow xy - 2y = x + 1 \Leftrightarrow x(y-1) = 2y + 1 \Leftrightarrow y \neq 1 \quad e \quad x = \frac{2y+1}{y-1}$$

Ne possiamo concludere che l'insieme dei valori B è dato da

$$B = \{y \in \mathcal{R} ; y \neq 1\}$$

e la funzione inversa della funzione f è data da

$$g(y) = \frac{2y+1}{y-1}$$

2. Sia

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 2} \quad x \in \mathcal{R}$$

- i) Dire se f è iniettiva;
- ii) Calcolare l'insieme dei valori di f : $f(\mathcal{R})$.

Se $x, y \in \mathcal{R}$, allora

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow x - \sqrt{x^2 + 2} = y - \sqrt{y^2 + 2} \Rightarrow x - y = \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{y^2 + 2} \\ &\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + 2 + y^2 + 2 - 2\sqrt{x^2 + 2}\sqrt{y^2 + 2} \\ &\Rightarrow 2 + xy = \sqrt{x^2 + 2}\sqrt{y^2 + 2} \Rightarrow 4 + 4xy + x^2y^2 = x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 0 \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Pertanto la funzione è iniettiva. D'altra parte $y \in f(\mathcal{R})$ se e solo se l'equazione

$$x - \sqrt{x^2 + 2} = y$$

ammette almeno una soluzione. Risulta quindi

$$\begin{aligned} x - \sqrt{x^2 + 2} = y &\Leftrightarrow x - y = \sqrt{x^2 + 2} \Leftrightarrow x - y \geq 0 \text{ e } x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - y \geq 0, \quad y \neq 0 \text{ e } x = \frac{y^2 - 2}{2y} \end{aligned}$$

Otengo infine

$$x - y = \frac{y^2 - 2}{2y} - y = \frac{-y^2 - 2}{2y}$$

Pertanto la condizione $x - y \geq 0$ è verificata se e solo se $y < 0$. L'insieme dei valori di f è quindi: $(-\infty, 0)$. Da notare che la funzione

$$g(y) = \frac{y^2 - 2}{2y} \quad y < 0$$

è la funzione inversa di f .

3. Sia

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1} \quad x \in \mathcal{R}$$

i) Dire se f è iniettiva;

ii) Calcolare l'insieme dei valori di f : $f(\mathcal{R})$.

Se $x, y \in \mathcal{R}$, allora

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{y+1}{y^2+y+1} \\ \Rightarrow xy^2 + xy + x + y^2 + y + 1 &= x^2y + xy + y + x^2 + x + 1 \Rightarrow xy(y-x) + y^2 - x^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x-y)(xy+y+x) = 0 \end{aligned}$$

Pertanto la funzione non è iniettiva. Infatti l'uguaglianza $f(x) = f(y)$ non vale solo quando $x = y$ ma anche quando $xy + y + x = 0$ ossia quando $y = \frac{-x}{x+1}$. Per esempio quindi $f(1) = f(\frac{-1}{2})$. D'altra parte $y \in f(\mathcal{R})$ se e solo se l'equazione

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = y$$

ammette almeno una soluzione. Risulta quindi

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = y \Leftrightarrow yx^2 + (y-1)x + y-1 = 0$$

Osserviamo ora che se $y = 0$, allora l'equazione diventa di primo grado ed ha la soluzione $x = -1$. D'altra parte se $y \neq 0$ l'equazione ammette almeno una soluzione se e solo se $\Delta(y) = (y-1)^2 - 4y(y-1) \geq 0$ ossia se e solo se $(y-1)(3y+1) \leq 0$. L'insieme dei valori è dato dunque dall'intervallo $[-\frac{1}{3}, 1]$.

4. Sia

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} - x$$

Verificare che f è iniettiva, calcolare l'insieme dei valori di f e scrivere la funzione inversa di f .

Se $x, y \in \mathcal{R}$, risulta:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x + 2} - x &= \sqrt{y^2 + y + 2} - y \Rightarrow \sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{y^2 + y + 2} = x - y \Rightarrow \\ x^2 + x + 2 + y^2 + y + 2 - 2\sqrt{x^2 + x + 2}\sqrt{y^2 + y + 2} &= x^2 + y^2 - 2xy \Rightarrow x + y + 2xy + 4 = \\ = 2\sqrt{x^2 + x + 2}\sqrt{y^2 + y + 2} &\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x^2y^2 + 16 + 2xy + 4x^2y + 8x + 4xy^2 + 8y + 16xy = \\ &= 4(x^2y^2 + x^2y + 2x^2 + xy^2 + xy + 2x + 2y^2 + 2y + 4) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 7x^2 + 7y^2 - 14xy = 0 \Rightarrow (x-y)^2 = 0 \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Pertanto la funzione è iniettiva. D'altra parte $y \in \mathcal{R}$ sta nell'insieme dei valori di f se e solo se l'equazione (nella x):

$$\sqrt{x^2 + x + 2} - x = y$$

ammette una soluzione. Risulta

$$\sqrt{x^2 + x + 2} - x = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 2} = x + y \Leftrightarrow x + y \geq 0 \text{ e } x^2 + x + 2 = x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow$$

$$x + y \geq 0 \text{ e } x(1 - 2y) = y^2 - 2 \Leftrightarrow x + y \geq 0, 1 - 2y \neq 0 \text{ e } x = \frac{y^2 - 2}{1 - 2y}$$

Osserviamo infine che

$$x + y = \frac{y^2 - 2}{1 - 2y} + y = \frac{y^2 - 2 + y - 2y^2}{1 - 2y} = \frac{-y^2 + y - 2}{1 - 2y}$$

Pertanto risulta $x + y \geq 0$ se e solo se $1 - 2y < 0$, ossia $y > \frac{1}{2}$. L'insieme dei valori della funzione f è dato dunque dall'insieme $B = (\frac{1}{2}, +\infty)$.

3 LIMITI DI FUNZIONI

In questo capitolo introdurremo il concetto di limite per una funzione di variabile reale.

Per rendere la trattazione più omogenea e dare una definizione unica per le varie situazioni che si possono presentare introdurremo il concetto di intorno.

Daremo dunque la seguente:

Definizione 3.1 *i) se $x_0 \in \mathcal{R}$, chiameremo intorno di x_0 ogni intervallo del tipo $(x_0 - r, x_0 + r)$ con $r \in \mathcal{R}$, $r > 0$;*

ii) se $x_0 = +\infty$, chiameremo intorno di $+\infty$ ogni intervallo del tipo $(r, +\infty)$ con $r \in \mathcal{R}$;

iii) se $x_0 = -\infty$, chiameremo intorno di $-\infty$ ogni intervallo del tipo $(-\infty, r)$ con $r \in \mathcal{R}$.

Quando parleremo di limite per $x \rightarrow x_0$ ($x_0 \in \mathcal{R}$ o $x_0 = \pm\infty$) di una funzione $f : A \rightarrow \mathcal{R}$, supporremo sempre che per ogni intorno $\mathcal{U}_{x_0}$ di x_0 si abbia $\mathcal{U}_{x_0} \cap A \neq \emptyset$.

Possiamo ora dare la seguente definizione generale:

Definizione 3.2 Definizione di limite *Se $x_0 \in \mathcal{R}$ o $x_0 = \pm\infty$ e $L \in \mathcal{R}$ o $L = \pm\infty$, diremo che $f(x)$ tende a L per x che tende a x_0 e scriveremo*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad (7)$$

se $\forall$ intorno di L : $\mathcal{U}_L$, $\exists$ un intorno di x_0 : $\mathcal{V}_{x_0}$ tale che $f(x) \in \mathcal{U}_L$, $\forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0} - \{x_0\}$.

Alcuni casi particolari che vorremmo evidenziare sono:

a) se $x_0 \in \mathcal{R}$ e $L \in \mathcal{R}$, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$, $\forall x \in A \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) - \{x_0\}$. Da notare che in questo caso il valore della funzione in x_0 non interviene nella definizione di limite, anzi la funzione potrebbe non essere definita in x_0 .

Nel caso che f sia definita in x_0 e che $L = f(x_0)$ allora la funzione f si dice **continua** in x_0 .

b) se $x_0 \in \mathcal{R}$ e $L = +\infty$, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

se $\forall r \in \mathcal{R}$, $\exists \delta_r > 0$ tale che $f(x) > r$ $\forall x \in A \cap (x_0 - \delta_r, x_0 + \delta_r) - \{x_0\}$.

c) se $x_0 = +\infty$ e $L \in \mathcal{R}$, allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists r_\varepsilon \in \mathcal{R}$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$, $\forall x \in A$, $x > r_\varepsilon$.

Un caso particolarmente importante si ha quando f è una successione, ossia quando l'insieme di definizione di f è $A = \mathcal{N}$. In tal caso, invece della notazione $f(n)$, useremo la notazione a_n , b_n , $\dots$.

Nel caso di successioni, si ha quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists r_\varepsilon > 0$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$, $\forall n \in \mathcal{N}$, $n > r_\varepsilon$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

se $\forall r \in \mathcal{R}$, $\exists n_r > 0$ tale che $a_n > r$, $\forall n \in \mathcal{N}$, $n > n_r$.

Osservazione Vale la pena confrontare le due definizioni di successione con limite $+\infty$ e di successione non limitata superiormente, per metterne in evidenza la differenza.

i) Una successione ha limite $+\infty$ se

$$\forall r \in \mathcal{R} \quad \exists \nu_r \in \mathcal{R} \quad \text{tale che} \quad a_n > r \quad \forall n > \nu_r$$

ii) Una successione invece non è limitata superiormente se

$$\forall r \in \mathcal{R} \quad \exists n = n_r \in \mathcal{N} \quad \text{tale che} \quad a_n > r$$

Pertanto se una successione a_n ha limite $+\infty$ è anche non superiormente limitata; mentre una successione può essere non superiormente limitata senza avere limite $+\infty$, come è ad esempio la successione:

$$a_n = (-1)^n n$$

Se $x_0 \in \mathcal{R}$, a volte nella definizione di limite, è più conveniente usare, invece che intorni completi del punto x_0 del tipo $(x_0 - r, x_0 + r)$, intorni destri come $(x_0, x_0 + r)$ o intorni sinistri del tipo $(x_0 - r, x_0)$. Si hanno allora le seguenti definizioni:

Definizione 3.3 Definizione di limite sinistro Se $x_0 \in \mathcal{R}$ o $x_0 = \pm\infty$ e $L \in \mathcal{R}$ o $L = \pm\infty$, diremo che $f(x)$ tende a L per x che tende a x_0 e scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \quad (8)$$

se $\forall \mathcal{U}_L, \exists r_L > 0$ tale che $f(x) \in \mathcal{U}_L, \forall x \in A \cap (x_0 - r_L, x_0)$.

Definizione 3.4 Definizione di limite destro Se $x_0 \in \mathcal{R}$ o $x_0 = \pm\infty$ e $L \in \mathcal{R}$ o $L = \pm\infty$, diremo che $f(x)$ tende a L per x che tende a x_0 e scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \quad (9)$$

se $\forall \mathcal{U}_L, \exists r_L > 0$ tale che $f(x) \in \mathcal{U}_L, \forall x \in A \cap (x_0, x_0 + r_L)$.

È immediato vedere che esiste il limite di una funzione per $x \rightarrow x_0$ se e solo se esistono i limiti destro e sinistro di f per $x \rightarrow x_0$ e sono uguali.

Vedremo ora alcuni esempi importanti.

1. Se la funzione f è un polinomio, ossia se

$$f(x) = P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

allora risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathcal{R}.$$

2. Risulta $\forall a \in \mathcal{R} \quad a > 0$

i)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} \quad \forall x_0 \in \mathcal{R}$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0 \quad \forall x_0 \in \mathcal{R} \quad x_0 > 0 \quad a \neq 1$$

Infatti:

i) Supponendo $a > 1$. Soccome:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a^x - a^{x_0}) = a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (a^{x-x_0} - 1)$$

basta dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a^{x-x_0} - 1) = 0$$

Ora se $\varepsilon \in (0, 1)$, risulta:

$$a^{x-x_0} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow x - x_0 < \log_a(1 + \varepsilon)$$

$$a^{x-x_0} - 1 > -\varepsilon \Leftrightarrow x - x_0 > \log_a(1 - \varepsilon)$$

Ponendo quindi:

$$\delta_\varepsilon = \min\{\log_a(1 + \varepsilon), -\log_a(1 - \varepsilon)\}$$

si ottiene che se $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, risulta $|a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon$.

ii) Supponendo sempre $a > 1$. Siccome:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\log_a x - \log_a x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \log_a \frac{x}{x_0}$$

basta dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a \frac{x}{x_0} = 0$$

Ottengo dunque se $\varepsilon > 0$:

$$\log_a \frac{x}{x_0} < \varepsilon \Leftrightarrow x < x_0 a^\varepsilon \Leftrightarrow x - x_0 < x_0 (a^\varepsilon - 1)$$

$$\log_a \frac{x}{x_0} > -\varepsilon \Leftrightarrow x > x_0 a^{-\varepsilon} \Leftrightarrow x - x_0 > x_0 (a^{-\varepsilon} - 1)$$

Ponendo quindi:

$$\delta_\varepsilon = \min\{x_0 (a^\varepsilon - 1), x_0 (1 - a^{-\varepsilon})\}$$

si ottiene che se $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, si ha $|\log_a \frac{x}{x_0}| < \varepsilon$.

3. Risulta :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

Per verificare queste due affermazioni, osserviamo, in primo luogo che vale la disuguaglianza:

$$|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathcal{R}.$$

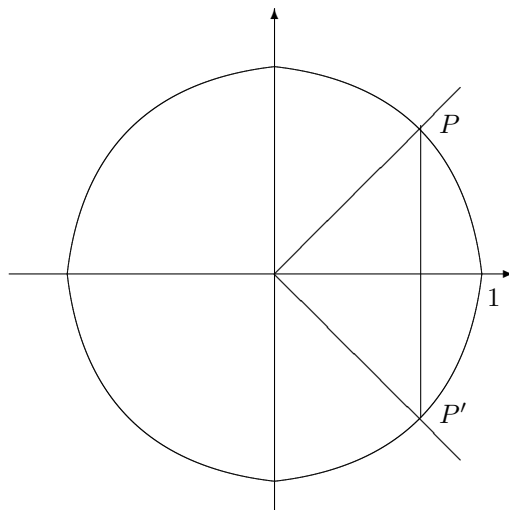
Infatti:

i) se $|x| \geq \frac{\pi}{2}$, allora :

$$|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$$

e la disuguaglianza è verificata ;

ii) se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ragionando sulla figura che segue si ottiene:



$$\sin x = \frac{\overline{PP'}}{2} < \frac{\widehat{PP'}}{2} = x$$

($\overline{PP'}$ é la lunghezza del segmento PP' , $\widehat{PP'}$ é la lunghezza dell'arco di circonferenza che congiunge P con P').

iii) se $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, allora $\sin x = -\sin(-x)$ con $-x \in (0, \frac{\pi}{2})$, pertanto

$$|\sin x| = -\sin x = \sin(-x) < -x = |x|.$$

In ogni caso dunque vale la disuguaglianza cercata. Ne possiamo concludere che

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \leq |x-x_0|$$

Ne deriva quindi che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\sin x - \sin x_0) = 0.$$

Analogamente :

$$|\cos x - \cos x_0| = 2 \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \leq |x-x_0|$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\cos x - \cos x_0) = 0.$$

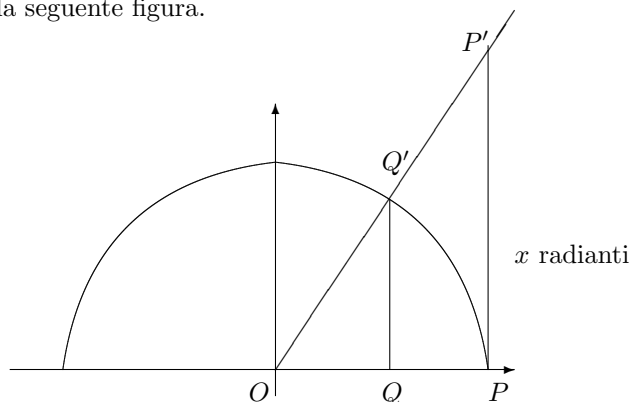
4. Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Supponiamo che $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, dal ragionamento fatto nell'esempio precedente, si ricava che

$$\frac{\sin x}{x} < 1$$

Ragioniamo ora sulla seguente figura.



Il settore circolare OPQ' è contenuto nel triangolo OPP' , pertanto vale la disuguaglianza

$$area(OPQ') < area(OPP')$$

ossia

$$\frac{2x \cdot 1}{2} < \frac{\overline{PP'} \cdot 1}{2}$$

D'altra parte, dalla similitudine dei triangoli OPP' e OQQ' , si ricava che

$$\frac{\overline{PP'}}{1} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{OQ}} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Pertanto si ottiene

$$x < \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{ossia} \quad \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Possiamo quindi concludere che

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Osserviamo infine che se $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, si ha

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{-\sin(-x)}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$$

e $\cos x = \cos(-x)$, pertanto la doppia disuguaglianza

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

vale $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$. Siccome

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

, si ottiene che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

5. Verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, la diseguglianza:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

è equivalente a

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{ossia} \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Posto quindi

$$r_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon},$$

la richiesta nella definizione di limite è soddisfatta.

6. Verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2.$$

$\forall \varepsilon > 0$, si ha:

$$\left| \frac{2n+1}{n+3} - 2 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{-5}{n+3} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{n+3} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{5}{\varepsilon} - 3$$

Posto quindi

$$r_\varepsilon = \frac{5}{\varepsilon} - 3$$

ottengo che la definizione di limite è verificata, ossia :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \frac{2n+1}{n+3} - 2 \right| < \varepsilon \quad \forall n > r_\varepsilon = \frac{5}{\varepsilon} - 3$$

3.1 Alcune proprietà importanti dei limiti

Cominciamo col seguente:

Teorema 3.1 Unicità del limite *Se una funzione ha limite, questo è unico; ossia se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L'$$

allora $L = L'$.

Dimostrazione. Consideriamo il caso che $x_0, L, L' \in \mathcal{R}$. e, ragionando per assurdo, supponiamo che sia $L \neq L'$ e che sia $L < L'$. Allora, scelto $\varepsilon > 0$ con

$$0 < \varepsilon < \frac{L' - L}{2}$$

risulta $L + \varepsilon < L' - \varepsilon$. Dalla definizione di limite, esistono $\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon$ tali che

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta'_\varepsilon, x_0 + \delta'_\varepsilon) - \{x_0\}$$

$$|f(x) - L'| < \varepsilon \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta''_\varepsilon, x_0 + \delta''_\varepsilon) - \{x_0\}$$

Allora se pongo $\delta_\varepsilon = \min\{\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon\}$, ottengo allora, se $x \in A \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) - \{x_0\}$

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

$$L' - \varepsilon < f(x) < L' + \varepsilon$$

e quindi $L' - \varepsilon < L + \varepsilon$ e questo contrasta con la scelta di ε .

q.e.d.

Osservazione Una funzione può non avere limite. Ad esempio, se $x_0 = 0$ e la funzione f è definita dalla legge:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (10)$$

non ha limite per $x \rightarrow 0$.

Un secondo risultato è dato dal seguente

Teorema 3.2 (Limitatezza locale) Se esiste il

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

e $L \in \mathcal{R}$, allora esistono un intorno di x_0 : $\mathcal{V}_{x_0}$ ed un numero positivo M tali che $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0}$.

Dimostrazione. Applicando la definizione di limite con $\varepsilon = 1$, ottengo che esiste un intorno $\mathcal{V}_{x_0}$ tale che $|f(x) - L| < 1 \quad \forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0}$ e quindi $|f(x)| \leq 1 + |L| = M \quad \forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0}$. q.e.d.

Osservazione Il viceversa del teorema precedente non vale, ossia una funzione può essere limitata in un intorno di x_0 e non aver limite per $x \rightarrow x_0$. Un esempio semplice è dato dalla funzione (10).

Useremo spesso nel seguito anche il seguente:

Teorema 3.3 (Teorema della permanenza del segno) Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

e che $L > 0$ ($L < 0$). Allora esiste un intorno $\mathcal{V}_{x_0}$ tale che $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$), $\forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0}$.

Dimostrazione. Supponiamo $L \in \mathcal{R}$, $L > 0$. Dalla definizione di limite con $\varepsilon = \frac{L}{2}$, si ottiene che esiste $\mathcal{V}_{x_0}$ tale che

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0} - \{x_0\}$$

e quindi

$$f(x) > L - \varepsilon = \frac{L}{2} > 0 \quad \forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0} - \{x_0\}$$

q.e.d.

Molto utile, nello svolgimento degli esercizi sarà il seguente

Teorema 3.4 (Operazione coi limiti)

1. **Limite della somma** Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L + M \tag{11}$$

tranne nel caso che sia $L = +\infty$ e $M = -\infty$ o viceversa.

Da notare che in (11) la somma va intesa nel modo seguente:

$$L + M = \begin{cases} +\infty & \text{se } L \in \mathcal{R} \text{ o } L = +\infty \text{ e } M = +\infty \\ -\infty & \text{se } L \in \mathcal{R} \text{ o } L = -\infty \text{ e } M = -\infty \end{cases}$$

2. **Limite del prodotto** Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M \tag{12}$$

tranne nel caso che sia $L = 0$ e $M = \pm\infty$ o viceversa.

Da notare che in (12) il prodotto va intesa nel modo seguente:

$$L \cdot M = \begin{cases} +\infty & \text{se } L \in \mathcal{R}, L > 0 \text{ o } L = +\infty \text{ e } M = +\infty \\ -\infty & \text{se } L \in \mathcal{R}, L < 0 \text{ o } L = -\infty \text{ e } M = +\infty \end{cases}$$

3. Limite del rapporto

- Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ } (-\infty)$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

- Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

e che esista un intorno $\mathcal{V}_{x_0}$ tale che $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) $\forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0} - \{x_0\}$ Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \text{ } (-\infty).$$

- Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

quando il rapporto L/M ha senso (in genere i casi $L = M = 0$, $L = \pm\infty$ e $M = \pm\infty$ sono esclusi).

Dimostrazione.

- (Limite della somma) Fare la dimostrazione per esercizio;
- (Limite del prodotto) Consideriamo il caso $L, M \in \mathcal{R}$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x) - L \cdot M| &= |f(x) \cdot g(x) - L \cdot g(x) + L \cdot g(x) - L \cdot M| \leq \\ &\leq |f(x) - L| \cdot |g(x)| + |L| \cdot |g(x) - M| \end{aligned}$$

Ora essendo g limitata localmente (vedi teorema sulla limitatezza locale) esistono un intorno di x_0 : $\mathcal{V}'_{x_0}$ ed un numero positivo k tali che $|g(x)| \leq k$, $\forall x \in A \cap \mathcal{V}'_{x_0} - \{x_0\}$. D'altra parte dalla definizione di limite, $\forall \varepsilon > 0$ esistono due intorni di x_0 : $\mathcal{V}''_{x_0}$, $\mathcal{V}'''_{x_0}$ tali che

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2k}, \quad \forall x \in A \cap \mathcal{V}''_{x_0} - \{x_0\}$$

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2L}, \quad \forall x \in A \cap \mathcal{V}'''_{x_0} - \{x_0\}$$

Allora se $x \in A \cap \mathcal{V}'_{x_0} \cap \mathcal{V}''_{x_0} \cap \mathcal{V}'''_{x_0} - \{x_0\}$, si ottiene

$$|f(x) \cdot g(x) - L \cdot M| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- (Limite del rapporto) Consideriamo il caso $L, M \in \mathcal{R}$, $M \neq 0$. Usando il teorema sul limite del prodotto, basta dimostrare che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$$

Supposto $M > 0$, per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno di x_0 : $\mathcal{V}_{x_0}$ tale che $g(x) > M/2$, $\forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0} - \{x_0\}$. Allora

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \left| \frac{M - g(x)}{g(x) \cdot L} \right| \leq \frac{2}{L^2} |g(x) - M|$$

Applicando infine la definizione di limite $\forall \varepsilon > 0$ esiste un intorno di x_0 : $\mathcal{V}'_{x_0}$ tale che $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon^2}{2}$, $\forall x \in A \cap \mathcal{V}'_{x_0} - \{x_0\}$. Possiamo quindi concludere che

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0} \cap \mathcal{V}'_{x_0} - \{x_0\}$$

q.e.d.

Un altro importante teorema della teoria dei limiti è il seguente:

Teorema 3.5 (*Limite della composta*) Siano $f; A \rightarrow \mathcal{R}$ e $g; B \rightarrow \mathcal{R}$ due date funzioni con $f(A) \subset B$. Supponiamo che:

i) esista il

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L;$$

ii) esista il

$$\lim_{y \rightarrow L} g(y) = M;$$

iii) esista un intorno di x_0 : $\mathcal{V}_{x_0}$ tale che $f(x) \neq L \quad \forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0} - \{x_0\}$.

Allora esiste il limite per $x \rightarrow x_0$ della funzione composta $h(x) = g(f(x))$ e risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = M.$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso che sia $L, M \in \mathcal{R}$. Dall'ipotesi ii) si ricava che $\forall \varepsilon > 0$ esiste un intorno di L ; $\mathcal{U}_L$ tale che

$$|g(y) - M| < \varepsilon \quad \forall y \in B \cap \mathcal{U}_L - \{L\}$$

D'altra parte dall'ipotesi i) e iii) si ricava che esiste un intorno di x_0 : $\mathcal{V}'_{x_0}$ tale che $f(x) \in \mathcal{U}_L - \{L\}, \forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0} \cap \mathcal{V}'_{x_0} - \{x_0\}$. Possiamo quindi concludere che

$$|g(f(x)) - M| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0} \cap \mathcal{V}'_{x_0} - \{x_0\}$$

q.e.d.

Una conseguenza del teorema sul limite della composta è il seguente:

Teorema 3.6 Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

i) esiste il

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

ii) per ogni successione $\{x_n\}$, con $x_n \in A - \{x_0\} \quad \forall n \in \mathcal{N}$ e tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$$

Dimostrazione. Supponiamo che valga la i) e che $\{x_n\}$ sia una successione con $x_n \in A - \{x_0\} \quad \forall n \in \mathcal{N}$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

Allora applicando il teorema sul limite della composta con $f(n) = x_n$ e $g(y) = f(y)$, si ottiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$$

Viceversa, supponiamo che valga la ii) e proviamo che deve essere anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

ragionando per assurdo. Se f non avesse limite L per $x \rightarrow x_0$, esisterebbe un intorno $\mathcal{U}_L$ di L tale che ogni intorno $\mathcal{V}_{x_0}$ di x_0 conterrebbe almeno un punto x di A diverso da x_0 con $f(x) \notin \mathcal{U}_L$. Scegliendo quindi come intorno di x_0 gli intervalli $(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$, $n \in \mathcal{N}$ si otterrebbe una successione $x_n \in A - \{x_0\}$ con $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ e $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Avremmo quindi ottenuto una successione $x_n \in A - \{x_0\}$ con limite x_0 e tale che la successione $f(x_n)$ non ha limite L . Questo contrasta con l'ipotesi ii). q.e.d.

Una conseguenza interessante di questo teorema è la seguente:

Osservazione Se esistono due successioni diverse x_n e y_n di elementi di $A - \{x_0\}$ con:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$$

allora il

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{non esiste}.$$

Proponiamoci, per esempio, di vedere se esiste il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Se poniamo

$$x_n = \frac{1}{2\pi n}$$

otteniamo una successione $x_n \neq 0$, che converge a zero con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2\pi n) = 0.$$

D'altra parte, se poniamo

$$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

otteniamo una nuova successione $y_n \neq 0$, che converge pure a zero ma con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1.$$

Pertanto il limite di partenza non esiste.

Un ultimo teorema generale che vorremmo ricordare riguarda le funzioni monotone, ossia quelle funzioni che sono crescenti o decrescenti. Vale il seguente:

Teorema 3.7 Sia $f : A \rightarrow \mathcal{R}$ una funzione monotona. Allora

i) se f è crescente, allora:

a) esiste il limite sinistro di f per $x \rightarrow x_0$ e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x), x \in A, x < x_0\},$$

b) esiste il limite destro di f per $x \rightarrow x_0$ e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(x), x \in A, x > x_0\},$$

c) se $x_0 \in A$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

ii) se f è decrescente, allora:

a) esiste il limite sinistro di f per $x \rightarrow x_0$ e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \inf\{f(x), x \in A, x < x_0\},$$

b) esiste il limite destro di f per $x \rightarrow x_0$ e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup\{f(x), x \in A, x > x_0\},$$

c) se $x_0 \in A$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \geq f(x_0) \geq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Dimostrazione. Dimostriamo la i), parte a) nel caso che

$$\sup\{f(x), x \in A, x < x_0\} = c \in \mathcal{R}.$$

Per le proprietà caratteristiche dell'estremo superiore, si ha:

- $f(x) \leq c, \forall x \in A, x < x_0$;
- $\forall \varepsilon > 0$ esiste un punto $x_\varepsilon \in A$ con $x_\varepsilon < x_0$ e $f(x_\varepsilon) > c - \varepsilon$

Essendo la funzione crescente, si ha che se $x \in (x_\varepsilon, x_0)$ allora $f(x) \geq f(x_\varepsilon)$. Risulta pertanto $c - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq c < c + \varepsilon$. Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = c$$

q.e.d.

Un caso interessante di questo teorema si ha quando la funzione f è una successione. In questo caso l'enunciato diventa;

Teorema 3.8 Se $a_n, n \in \mathcal{N}$ è una successione monotona, allora:

i) se a_n è crescente, esiste

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n, n \in \mathcal{N}\};$$

ii) se a_n è decrescente, esiste

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n, n \in \mathcal{N}\}.$$

3.2 Alcuni esercizi sui limiti

In questo paragrafo vengono svolti alcuni esercizi sui limiti per mettere in risalto alcuni metodi di risoluzione che possono essere utili in seguito.

1. Sia $q \in (0, 1)$, allora si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

Verificare l'affermazione per esercizio, usando la definizione di limite.

2. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n \right)$$

Razionalizzando, si ottiene

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - n = \frac{n^2 + n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \frac{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1 \right)}$$

Ne deriva quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n \right) = \frac{1 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{1}{2}.$$

3. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right)$$

Razionalizzando anche questa volta, risulta:

$$n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right) = \frac{n \left(1 + \frac{2}{n} - 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}$$

Se ne conclude che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right) = 1$$

4. Verificare per esercizio che se $\{a_n\}$, $n \in \mathcal{N}$ è una successione di numeri non negativi con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

5. Usando il teorema della permanenza del segno, verificare che se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due successioni con

i) $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathcal{N}$,

ii) esistono i due limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b,$$

allora deve essere $a \leq b$.

Da notare inoltre che anche se nella i) vale la disuguaglianza stretta, ossia se $a_n < b_n \quad \forall n \in \mathcal{N}$, può essere $a = b$.

6. Verificare che, se $q \in \mathcal{R}$ e $q > 1$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$$

Infatti, fissato $M \in \mathcal{R}$ (che possiamo supporre positivo), si ha:

$$q^n > M \Leftrightarrow n \log q > \log M \Leftrightarrow n > \frac{\log M}{\log q} = \nu_M.$$

7. Verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n^2}{1 + n} = -\infty$$

Fissato $M \in \mathcal{R}$, risulta

$$\frac{n - n^2}{1 + n} < M \Leftrightarrow n - n^2 < M + n M \Leftrightarrow n^2 + (M - 1)n + M > 0$$

Ora il Δ del polinomio di secondo grado (in n) trovato è dato da

$$\Delta(M) = (M - 1)^2 - 4 M = M^2 - 6 M + 1$$

Osserviamo infine che le radici dell'ultimo polinomio di secondo grado (in M), sono date da

$$M_1 = 3 - 2\sqrt{2} \quad e \quad M_2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

Ne deriva quindi che se $M \leq M_1$, allora $\Delta(M) \geq 0$ e quindi la disuguaglianza iniziale (nella variabile n) è verificata se

$$n > \frac{1 - M + \sqrt{\Delta(M)}}{2} = \nu_M$$

8. Verificare che se $q \in \mathcal{R}$ e $q > 1$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n} = +\infty .$$

Scrivendo $q = 1 + b$ con $b > 0$, usando la formula del binomio di Newton, si ottiene se $n \geq 3$

$$q^n = (1 + b)^n = 1 + \binom{n}{1} b + \binom{n}{2} b^2 + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} b^k > 1 + n b + \frac{n(n-1)}{2} b^2$$

Ne deriva quindi che

$$\frac{q^n}{n} > \frac{1}{n} + b + \frac{n-1}{2} b^2$$

e da questa disuguaglianza si ricava appunto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n} = +\infty .$$

Con un ragionamento simile, si può ottenere anche che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n^p} = +\infty \quad \forall p \in \mathcal{N} .$$

9. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2^n}{n^2 + 3^n}$$

Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2^n}{n^2 + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \left(\frac{n}{2^n} + 1 \right)}{3^n \left(\frac{n^2}{3^n} + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n \frac{\frac{n}{2^n} + 1}{\frac{n^2}{3^n} + 1} = 0 \frac{0 + 1}{0 + 1} = 0 .$$

10. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + n^2 + 1}$$

Risulta;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt[n]{1 + \frac{n^2}{2^n} + \frac{1}{2^n}} = 2 .$$

11. Calcolare il:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2\sqrt{n}}{2n + 3}$$

Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2\sqrt{n}}{2n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{n}}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{1 + 0}{2 + 0} = \frac{1}{2} .$$

12. Verificare che se $\{a_n\}$ è una successione con

$$a_n > 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathcal{R} \quad con \quad a > 0$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Dimostrazione. Essendo $a > 0$, posso trovare $\nu \in \mathcal{R}$ tale che

$$\frac{a}{2} < a_n < \frac{3}{2}a \quad \forall n > \nu$$

Ne deriva quindi se $n > \nu$:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3}{2}a}$$

Il risultato segue allora dal fatto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3}{2}a} = 1$$

q.e.d.

13. Calcolare il:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{n^3 + n^2}$$

Usando la formula del binomio, possiamo scrivere il numeratore nel modo seguente:

$$(n+1)^4 - (n-1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - (n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1) = 8n^3 + 8n$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{n^3 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 + 8n}{n^3 + n^2} = 8$$

14. Verificare che se $a \in \mathcal{R}$, $a > 1$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Dimostrazione. Sia $k = [a]$ e $n > k + 1$, allora:

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdots \frac{a}{k} \cdot \frac{a}{k+1} \cdots \frac{a}{n} = \frac{a^k}{k!} \frac{a}{k+1} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^k}{k!} \left(\frac{a}{k+1} \right)^{n-k}$$

Siccome $\frac{a}{k+1} < 1$, si ricava che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{k+1} \right)^{n-k} = 0.$$

q.e.d.

15. Verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Dimostrazione. Sia k un numero naturale e sia $n > k$, allora:

$$n! = (k-1)!k(k+1) \cdots n > (k-1)!k^{n-k+1}$$

Pertanto

$$\sqrt[n]{n!} > \sqrt[n]{(k-1)!} \sqrt[n]{k^{1-k}} \cdot k$$

Siccome abbiamo visto che $\forall a > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

possiamo trovare un numero $\nu_1 \in \mathcal{R}$ tale che $\forall n > \nu_1$. si ha

$$\sqrt[n]{(k-1)!} > \frac{1}{2} \quad e \quad \sqrt[n]{k^{1-k}} > \frac{1}{2}.$$

Ne deriva quindi che $\forall n > \max\{\nu_1, k\}$, si ha :

$$\sqrt[n]{n!} > \frac{k}{4}$$

e quindi vale l'affermazione iniziale.

q.e.d.

16. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n^2 - n + 10} - n \right)$$

Razionalizzando, si ottiene:

$$\left(\sqrt{2n^2 - n + 10} - n \right) = \frac{2n^2 - n + 10 - n^2}{\sqrt{2n^2 - n + 10} + n} = \frac{n^2 - n + 10}{\sqrt{2n^2 - n + 10} + n}$$

Ne deriva quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n^2 - n + 10} - n \right) = +\infty$$

17. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n + 1} - n \right)$$

Razionalizzando, anche in questo caso, otteniamo

$$\left(\sqrt[3]{n^3 + n + 1} - n \right) = \frac{n^3 + n + 1 - n^3}{\left(\sqrt[3]{n^3 + n + 1} \right)^2 + n \sqrt[3]{n^3 + n + 1} + n^2}$$

(abbiamo usato la formula

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad)$$

Possiamo quindi concludere che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n + 1} - n \right) = 0$$

18. A volte, per calcolare alcuni tipi di limite è utile il seguente criterio:

Criterio del rapporto Supponiamo che a_n sia una successione di numeri positivi e che esista il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

dove L può essere un numero reale o anche $+\infty$. Allora:

- se $L < 1$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

- se $L > 1$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

- esiste anche il limite della successione $\sqrt[n]{a_n}$ e risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

(Una dimostrazione verrà riportata poi alla fine del capitolo.)

Vediamo un esempio il cui il criterio del rapporto si può applicare. Supponiamo infatti di dover calcolare il seguente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n n!}{(3n)!}$$

In questo caso risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(3n+3)!} \frac{(3n)!}{2^n n!} = \frac{2(n+1)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

e quindi, per il criterio del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n n!}{(3n)!} = 0$$

19. **(Due successioni importanti che definiscono il numero di Nepero)** Consideriamo le due successioni:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Verifichiamo che la successione $\{a_n\}$ è strettamente crescente e che la successione $\{b_n\}$ è strettamente decrescente. Cominciamo dunque col provare che

$$a_{n-1} < a_n \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad n \geq 2$$

Infatti

$$\begin{aligned} a_{n-1} < a_n &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \\ &\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \frac{n-1}{n} < \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n} < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \end{aligned}$$

Ricordiamo ora che la disuguaglianza di Bernoulli afferma che, se $n \geq 2$ e $x \geq -1$, $x \neq 0$, allora :

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

Scegliendo infine $x = -\frac{1}{n^2}$, otteniamo :

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}$$

che è proprio l'ultima disuguaglianza della sequenza di disuguaglianze equivalenti che abbiamo ottenuto.

Consideriamo anche la seconda successione e verifichiamo che

$$b_n < b_{n-1} \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad n \geq 2$$

Infatti

$$\begin{aligned} b_n < b_{n-1} &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \Leftrightarrow \\ \frac{n+1}{n} &< \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} < \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \end{aligned}$$

Usando ancora la disuguaglianza di Bernoulli, con la scelta $x = \frac{1}{n^2-1}$ (con $n \geq 2$), otteniamo :

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1}$$

Otteniamo infine l'ultima disuguaglianza della sequenza di disuguaglianze precedenti, osservando che :

$$1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n}.$$

Da notare infine che

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

e pertanto risulta

$$a_n < b_n \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Ne deriva che $a_n < b_1 = 4 \quad \forall n \in \mathcal{N}$ e che $b_n > a_1 = 2 \quad \forall n \in \mathcal{N}$, ossia $\{a_n\}$ é limitata superiormente, mentre $\{b_n\}$ é limitata inferiormente. Esistono quindi i limiti :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

Dalla relazione che abbiamo già notato, ossia

$$b_n = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

risulta che i due limiti sono uguali ($a = b$). Tale limite verrà indicato nel seguito con la lettera e (**numero di Nepero**). Pertanto risulta

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ed inoltre valgono le disuguaglianze :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathcal{N}.$$

Un terzo limite importante che vogliamo mettere in evidenza é il seguente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Con alcuni passaggi algebrici, si ottiene:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{a_{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}$$

Ne deriva quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

20. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{x}$$

(dove $\alpha \in \mathcal{R}$ é un numero fissato diverso da 0).

Risulta

$$\frac{\sin(\alpha x)}{x} = \alpha \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}$$

e la funzione

$$\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}$$

è la funzione composta delle funzioni $f(x) = \alpha x$ e $g(y) = \frac{\sin y}{y}$. Allora:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \alpha \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \alpha .$$

21. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1} .$$

Posto $y = x - 1$, risulta, per il teorema sul limite della composta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi y}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} -\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)}{y} = -\frac{\pi}{2} .$$

22. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x .$$

Posto $y = x - \frac{\pi}{2}$, ottengo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x &= \lim_{y \rightarrow 0} y \tan\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \frac{y}{\sin y} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = -1 . \end{aligned}$$

23. Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} .$$

Infatti si ha

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos x^2}{x^2} \frac{1}{1 + \cos x} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1 + \cos x}$$

Quindi, si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} .$$

24. La funzione

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

è definita quando $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0$, ossia se $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Verifichiamo che:

i)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e ,$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e .$$

i) Indichiamo con $[x]$ la parte intera di x . Siccome $[x] \leq x < [x] + 1$, risulta:

$$1 + \frac{1}{[x] + 1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{[x]}$$

e quindi :

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

Il risultato segue allora se ricordiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

ii) Dal teorema sul limite della funzione composta, si ottiene, ponendo $y = -x$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y$$

Ponendo infine $z = y - 1$, ottengo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z+1} = e$$

25. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Ponendo $y = \frac{1}{x}$, si ottiene :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

26. Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log \left[(1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \log e = 1.$$

27. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Ponendo $y = e^x - 1$, ottengo :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1.$$

3.3 Altri esercizi sui limiti

1. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(\frac{x+1}{x} \right)$$

Usando la sostituzione $y = \frac{1}{x}$, ottengo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(\frac{x+1}{x} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

2. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + \sqrt{n}}{n} \right)^n$$

Risulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + \sqrt{n}}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{\sqrt{n}} \right]^{\sqrt{n}} = +\infty$$

3. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 2} \right)^{x^2}$$

Risulta :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 2} \right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2 - 2} \right)^{x^2} = (y = x^2 - 2) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{y} \right)^{y+2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{y} \right)^2 \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{y}{2}} \right)^{\frac{y}{2}} \right]^2 = e^2 \end{aligned}$$

4. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(\frac{2n+3}{2n+6} \right)$$

Risulta :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(\frac{2n+3}{2n+6} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(1 - \frac{3}{2n+6} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 - \frac{3}{2n+6} \right)}{-\frac{3}{2n+6}} \cdot \frac{-3}{2n+6} \cdot n = 1 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

5. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$$

Usiamo il criterio del rapporto. Se indichiamo con

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} < 1. \end{aligned}$$

Risulta pertanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

6. Calcolare il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+4} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+4} \right)^{\frac{n}{2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n+4} \right)^{\frac{n}{2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{\frac{n+4}{3}} \right)^{\frac{n+4}{3}} \right]^{\frac{3}{n+4} \cdot \frac{n}{2}} = \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

7. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3+n} \right)^n$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3+n} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1-n}{n^3+n} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{\frac{n^3+n}{n-1}} \right)^{\frac{n^3+n}{n-1}} \right]^{\frac{(n-1)n}{n^3+n}} = \left(\frac{1}{e} \right)^0 = 1. \end{aligned}$$

8. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$$

Razionalizzando si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2-1}{x^2} \frac{1}{(\sqrt[3]{1+x^2})^2 + \sqrt[3]{1+x^2} + 1} = \frac{1}{3}.$$

9. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$$

Ottengo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{\frac{1}{x+1}} \left(e^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} - 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x+1}} \frac{\left(e^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1 \right)}{\frac{1}{x(x+1)}} \frac{x^2}{x(x+1)} = e^0 \cdot 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

10. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(5^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}} \right)$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(5^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x} \log 5} - e^{\frac{1}{x} \log 2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \log 2} \frac{\left(e^{\frac{1}{x} (\log 5 - \log 2)} - 1 \right)}{\frac{1}{x} (\log 5 - \log 2)} (\log 5 - \log 2) = e^0 \cdot 1 \cdot (\log 5 - \log 2) = \log \left(\frac{5}{2} \right). \end{aligned}$$

11. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(\pi x)}{x-3}$$

Ponendo $y = x - 3$, si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(\pi x)}{x-3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(y+3))}{y} = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi y)}{y} = -\pi.$$

12. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \cos x)$$

Poniamo $f(x) = x(1 - \cos x)$ e osserviamo che se $x_n = 2\pi n$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0.$$

D'altra parte, se $y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = +\infty.$$

Ne deriva quindi che il limite di partenza non esiste.

13. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x]}{x}$$

dove ricordiamo che $[x]$ é la parte intera di x .

Dalla definizione risulta:

$$[x] \leq x < [x] + 1 \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

e quindi se $x > 0$

$$1 - \frac{1}{x} < \frac{[x]}{x} \leq 1$$

Risulta pertanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x]}{x} = 1.$$

3.4 Esercizi proposti

Calcolare i seguenti limiti:

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(\frac{x+4}{x+5} \right),$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{(x-3)(x+1)} - x,$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 3} - ax \right) \quad a \in \mathcal{R},$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + e^x)}{\sqrt{1 + x^2}},$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x,$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^9 - (x-1)^9}{(x+1)^8 - (x-1)^8},$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1 - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2},$$

9.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1},$$

10.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x.$$

(La soluzione si trova alle fine del capitolo)

3.5 Sottosuccessioni e teorema di Bolzano-Weierstrass

Cominciamo col dare la seguente:

Definizione 3.5 (Definizione di sottosuccessione) Sia $\{a_n\}$ una data successione. Diremo che $\{b_n\}$ è una **sottosuccessione** di $\{a_n\}$ o una **successione estratta** da $\{a_n\}$ se esiste una successione strettamente crescente di numeri naturali $\{k_n\}$ tale che

$$b_n = a_{k_n} \quad \forall n \in \mathcal{N}.$$

Ad esempio, se poniamo $k_n = 2n$, otteniamo la sottosuccessione

$$b_n = a_{2n}$$

che viene chiamata la sottosuccessione dei termini di posto pari. Analogamente si può considerare la sottosuccessione dei termini di posto dispari

$$c_n = a_{2n-1} \quad n \in \mathcal{N}.$$

Vale il seguente :

Teorema 3.9 Supponiamo che una successione $\{a_n\}$ abbia limite (finito o $\pm\infty$) e supponiamo che $\{b_n\}$ sia una sottosuccessione di $\{a_n\}$, allora $\{b_n\}$ ha lo stesso limite di $\{a_n\}$.

Dimostrazione. Supponiamo che sia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathcal{R}.$$

e che $\{k_n\}$ sia la successione strettamente crescenti di numeri naturali tali che

$$b_n = a_{k_n}$$

Osserviamo, in primo luogo, che essendo $\{k_n\}$ una successione strettamente crescenti di naturali, risulta

$$k_n \geq n \quad \forall n \in \mathcal{N}.$$

D'altra parte, dalla definizione di limite, $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_\varepsilon \in \mathcal{R}$ tale che

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_\varepsilon$$

Ora, se $n > \nu_\varepsilon$, risulta pure $k_n \geq n > \nu_\varepsilon$ e quindi

$$|b_n - a| = |a_{k_n} - a| < \varepsilon.$$

q.e.d.

Osservazione Dal teorema precedente si deduce che, se da una successione $\{a_n\}$, è possibile estrarre due sottosuccessioni con limiti diversi, allora la successione di partenza non ha limite. Per esempio, supponiamo di dover calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 3}$$

Posto $b_n = a_{2n}$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 4n + 3} = 1 .$$

D'altra parte, posto $c_n = a_{2n-1}$ si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{(2n-1)^2 + 2n}{(2n-1)^2 + 4n + 1} = -1 .$$

Possiamo concludere quindi che il limite di partenza non esiste.

Abbiamo già osservato che ogni successione convergente (ossia con limite finito) è anche limitata ma che in generale non vale il viceversa, ossia una successione può essere limitata senza essere convergente, come mostra l'esempio $a_n = (-1)^n$.

Vale però il seguente importante teorema:

Teorema 3.10 (Teorema di Bolzano-Weierstrass) Sia $\{a_n\}$ una successione limitata. Allora si può estrarre da $\{a_n\}$ una sottosuccessione convergente.

3.6 Esercizi di ripasso

Questo capitolo contiene alcuni esercizi di ripasso sugli argomenti svolti fino ad ora. La risoluzione di tali esercizi si può trovare alla fine del capitolo.

1. Determinare l'insieme

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R} ; \frac{x+1}{x-3} < \frac{1}{2} \right\} .$$

2. Risolvere la seguente disuguaglianza

$$\frac{x^2 - x}{x + 2} > 2x + 1$$

3. Risolvere la disuguaglianza

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} \leq 5 .$$

4. Determinare l'insieme:

$$A = \{ x \in \mathcal{R} , 1 + 2x \leq \sqrt{x - x^2 + 2} \} .$$

5. Risolvere la seguente disuguaglianza

$$2\sqrt{x^2 + x - 2} > x + 3$$

6. Sia

$$A = \left\{ \frac{2n+5}{n+1} ; n \in \mathcal{N} \right\} .$$

Verificare che $\sup A = \max A = \frac{7}{2}$ e $\inf A = 2$.

7. Sia

$$A = \left\{ \frac{x^2 + x + 1}{x^2} , x \in \mathcal{R} \quad x \neq 0 \right\}$$

Verificare che

A non è superiormente limitato,

Calcolare $\inf A$ e dire se è minimo.

8. Sia

$$A = \left\{ \frac{x^2 + 6x + 1}{x^2 + 1} ; x \in \mathcal{R} \right\}.$$

Dire se A è superiormente limitato.

9. Sia $A = \{x \in \mathcal{R} ; x \neq 1\}$ ed $f : A \rightarrow \mathcal{R}$ la funzione definita dalla legge

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

Sia $B = f(A)$. Verificare che :

- i) B non è nè superiormente nè inferiormente limitato;
- ii) $B = \mathcal{R} - \{1\}$;
- iii) $f : A \rightarrow B$ è iniettiva.

10. Calcolare i limiti:

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 1} \right); \quad ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n} - n \right)$$

$$iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + n^2 + n^3 2^n}; \quad iv) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n 2^n}{n + 2^n}$$

$$v) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 4^n}{n + 5^n}; \quad vi) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5 - (n-1)^5}{n^4}$$

11. Sia

$$A = \left\{ \frac{n + 2\sqrt{n}}{n + 1} ; n \in \mathcal{N} \right\}.$$

Verificare che A è inferiormente limitato e calcolare $\inf A$.

12. Risolvere la seguente disequaglianza:

$$\frac{2x^2 + x}{x - 2} < x - 3$$

13. Sia

$$A = \left\{ \frac{x + 1}{x^2 - x + 1} ; x \in \mathcal{R} \right\}$$

Calcolare $\sup A$.

14. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2^n}{n^3 + 3^n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right)$$

15. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la disequaglianza:

$$\frac{x^2 + 2x}{x + 1} > 2x - 1$$

16. Sia

$$A = \left\{ \sqrt{n^2 + n} - n ; n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e massimo di A .

17. Sia

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} \quad x \in \mathcal{R}, \quad x \neq 1$$

Dire se f è iniettiva e calcolare l'insieme dei valori di f .

18. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + n^2 + 1} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 6n + 1} - n \right) \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

19. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la disequaglianza:

$$\frac{x^2 - x}{x + 2} > 2x - 3$$

20. Sia

$$A = \left\{ \sqrt{n^2 + 2n} - n \quad ; \quad n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e massimo di A .

21. Sia

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} \quad x \in \mathcal{R}, \quad x \neq -1$$

Dire se f è iniettiva e calcolare l'insieme dei valori di f .

22. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + n^3 + 3} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 4n + 6} - n \right) \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+6} + \sqrt{n}}.$$

3.7 Dimostrazione del criterio del rapporto.

i) Poniamo $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$, essendo $L < 1$, risulta $\varepsilon > 0$ ed inoltre:

$$L + \varepsilon = L + \frac{1-L}{2} = \frac{1+L}{2} = q < 1$$

Dalla definizione di limite, posso trovare $m \in \mathcal{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon = q \quad \forall n \geq m$$

ossia

$$a_{n+1} < q a_n \quad \forall n \geq m$$

Applicando ripetutamente questa disequaglianza, si ottiene:

$$\begin{aligned} a_{m+1} &< q a_m \\ a_{m+2} &< q a_{m+1} < q^2 a_m \\ a_{m+3} &< q a_{m+2} < q^3 a_m \\ &\vdots \\ a_{m+h} &< q a_{m+h-1} < q^h a_m \end{aligned}$$

Se poniamo infine $n = m + h$, otteniamo

$$a_n < q^{n-m} a_m \quad \forall n \in \mathcal{N}, \quad n \geq m + 1$$

Siccome $q \in (0, 1)$, q^n tende a zero quando n tende all'infinito. Per il teorema dei due carabinieri si ottiene allora che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

ii) Si ragiona nello stesso modo con ovvie modifiche.

iii) Verifichiamo l'affermazione nel caso che $L \in \mathcal{R}$ sia positivo, essendo il caso $L = +\infty$ e il caso $L = 0$ più semplici. Fissato $\varepsilon \in (0, L)$ sia $m = m_\varepsilon$ un numero naturale tale che

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon \quad \forall n \geq m$$

Ragionando per induzione, verifichiamo ora che valgono le disequaglianze:

$$(L - \varepsilon)^{n-m} a_m < a_n < (L + \varepsilon)^{n-m} a_m \quad \forall n \geq m + 1$$

Infatti, se $n = m + 1$, la disequaglianza deriva subito da

$$L - \varepsilon < \frac{a_{m+1}}{a_m} < L + \varepsilon$$

moltiplicando per a_m che è positivo. Supposta ora la doppia disequaglianza vera per $n \geq m + 1$, osserviamo che:

$$a_{n+1} < (L + \varepsilon) a_n < (L + \varepsilon) (L + \varepsilon)^{n-m} a_m = (L + \varepsilon)^{n+1-m} a_m$$

$$a_{n+1} > (L - \varepsilon) a_n > (L - \varepsilon) (L - \varepsilon)^{n-m} a_m = (L - \varepsilon)^{n+1-m} a_m$$

Estraendo la radice n-esima, ottengo:

$$(L - \varepsilon) \sqrt[n]{\frac{a_m}{(L - \varepsilon)^m}} < \sqrt[n]{a_n} < (L + \varepsilon) \sqrt[n]{\frac{a_m}{(L + \varepsilon)^m}} \quad \forall n \geq m + 1$$

Ricordiamo infine che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_m}{(L - \varepsilon)^m}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_m}{(L + \varepsilon)^m}} = 1$$

esistono quindi due numeri naturali $m' = m'_\varepsilon$ ed $m'' = m''_\varepsilon$ tali che:

$$\sqrt[n]{\frac{a_m}{(L - \varepsilon)^m}} > 1 - \varepsilon \quad \forall n \geq m'$$

$$\sqrt[n]{\frac{a_m}{(L + \varepsilon)^m}} < 1 + \varepsilon \quad \forall n \geq m''$$

Possiamo quindi concludere che, $\forall n \geq \max\{m, m', m''\}$, valgono le disequaglianze:

$$(L - \varepsilon) (1 - \varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < (L + \varepsilon) (1 + \varepsilon)$$

e quindi vale la tesi.

3.8 Risoluzione degli esercizi proposti

1. Risulta

$$\frac{x+4}{x+5} = \frac{1}{\frac{x+5}{x+4}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x+4}}$$

Pertanto, posto $y = \frac{1}{x+4}$ ossia $x = \frac{1}{y} - 4$, per il teorema sul limite della composta, ottengo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(\frac{x+4}{x+5} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{y} - 4 \right) \log \left(\frac{1}{1+y} \right) =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} - \left(\frac{\log(1+y)}{y} - 4 \log(1+y) \right) = -1$$

2. Razionalizzando, ottengo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{(x-3)(x+1)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-3)(x+1) - x^2}{\sqrt{(x-3)(x+1)} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x-3}{\sqrt{(x-3)(x+1)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 - \frac{3}{x}}{\sqrt{1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} + 1} = -1.$$

3. Risulta

$$\frac{x^2-1}{x+3} - ax = \frac{(1-a)x^2 - 3ax - 1}{x+3}$$

Pertanto se $1-a > 0$ ossia se $a < 1$, il limite viene $+\infty$, mentre se $1-a < 0$ ossia $a > 1$, viene $-\infty$.
Infine, se $a = 1$, risulta:

$$\frac{x^2-1}{x+3} - x = \frac{-3x-1}{x+3}$$

e quindi il limite viene -3 .

4. Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log[e^x(1+e^{-x})]}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log e^x + \log(1+e^{-x})}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\log(1+e^{-x})}{\sqrt{1+x^2}} \right) = 1 + 0 = 1$$

5. Posto $y = \log x$, ottengo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y y = (\text{ponendo } z = -y) = \lim_{z \rightarrow +\infty} -\left(\frac{z}{e^z}\right) = 0$$

6. Dalla formula del binomio di Newton, scrivendo esplicitamente solo i primi due termini, si ottiene:

$$(x+1)^9 = x^9 + 9x^8 + \sum_{n=2}^9 \binom{9}{n} x^{9-n}$$

$$(x-1)^9 = x^9 - 9x^8 + \sum_{n=2}^9 \binom{9}{n} (-1)^n x^{9-n}$$

Ne deriva che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^9 - (x-1)^9}{(x+1)^8 + (x-1)^8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{18x^8 + \sum_{n=2}^9 \binom{9}{n} [1 - (-1)^n] x^{9-n}}{(x+1)^8 + (x-1)^8} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{18 + \sum_{n=2}^9 \binom{9}{n} [1 - (-1)^n] x^{1-n}}{(1 + \frac{1}{x})^8 + (1 - \frac{1}{x})^8} = \frac{18}{2} = 9$$

7. Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1 - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-1}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) = \frac{0}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

8. Razionalizzando, ottengo.

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{1+x^2-1}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

9. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}$$

10. Risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{x-1}\right)^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^x} = (y = x-1) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y+1}} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

3.9 Risoluzione degli esercizi di ripasso

1. Determinare l'insieme

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R} ; \frac{x+1}{x-3} < \frac{1}{2} \right\}.$$

Risulta:

$$\frac{x+1}{x-3} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x+2-x+3}{2(x-3)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+5}{2(x-3)} < 0$$

Pertanto $A = (-5, 3)$.

2. Risolvere la seguente disuguaglianza

$$\frac{x^2-x}{x+2} > 2x+1$$

Risulta

$$\frac{x^2-x}{x+2} > 2x+1 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-2x^2-4x-x-2}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+6x+2}{x+2} < 0$$

Il numeratore si annulla per $x_{1,2} = -3 \mp \sqrt{7}$ e quindi ottengo:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} + & + & + & - & - & - & - & - & - & + & + & + \\ \hline -3 - \sqrt{7} & & & & & & & & & -3 + \sqrt{7} & & \end{array} & \text{Segno del numeratore} \\ \begin{array}{cccccccccccc} & & & - & - & - & - & + & + & + & & \\ \hline & & & & & & & -2 & & & & \end{array} & \text{Segno del denominatore} \end{array}$$

Pertanto la disuguaglianza è verificata se

$$x \in (-\infty, -3 - \sqrt{7}) \cup (-2, -3 + \sqrt{7}).$$

3. Risolvere la disuguaglianza

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} \leq 5.$$

Osserviamo che deve essere $x \geq 1$. Elevando al quadrato otteniamo:

$$x-1+x+4+2\sqrt{(x-1)(x+4)} \leq 25 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x+4)} \leq 11-x$$

Deve quindi essere anche $11-x \geq 0$ ossia $x \leq 11$. Infine elevando ancora al quadrato, ottengo:

$$x^2+4x-x-4 \leq 121+x^2-22x \Leftrightarrow 25x \leq 125 \Leftrightarrow x \leq 5$$

Possiamo infine concludere che la disuguaglianza vale se e solo se $x \in [1, 5]$.

4. Determinare l'insieme:

$$A = \{x \in \mathcal{R} , 1 + 2x \leq \sqrt{x - x^2 + 2}\} .$$

Affinchè la radice sia definita, deve essere $x - x^2 + 2 \geq 0$, ossia $x^2 - x - 2 \leq 0$. Essendo $\Delta = 1 + 8$, deve essere $x \in [-1, 2]$. D'altra parte, se $1 + 2x \leq 0$, la disuguaglianza è vera. Pertanto $[-1, -\frac{1}{2}] \subset A$. Infine se $x \in (-\frac{1}{2}, 2]$, elevando al quadrato, ottengo:

$$1 + 2x \leq \sqrt{x - x^2 + 2} \Leftrightarrow 1 + 4x^2 + 4x \leq x - x^2 + 2 \Leftrightarrow 5x^2 + 3x - 1 \leq 0$$

Ora l'ultimo polinomio di secondo grado ha $\Delta = 9 + 20 = 29$ e quindi le sue radici sono:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \mp \sqrt{29}}{10}$$

Quindi, affinché l'ultima disuguaglianza sia verificata, deve essere $x_1 \leq x \leq x_2$. Osserviamo infine che $-1 < x_1 < -1/2$ e che $x_2 < 2$. Pertanto

$$A = \left[-1, \frac{-3 + \sqrt{29}}{10} \right]$$

5. Risolvere la seguente disuguaglianza

$$2\sqrt{x^2 + x - 2} > x + 3$$

Osserviamo, in primo luogo che il radicando deve essere non negativo ed essendo le sue radici $\frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$ ossia $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$, deve essere $x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$. D'altra parte se $x + 3 < 0$ ossia se $x < -3$ la disuguaglianza è verificata (essendo in tal caso il primo membro non negativo ed il secondo negativo). Infine se $x + 3 \geq 0$, ossia se $x \geq -3$, risulta

$$2\sqrt{x^2 + x - 2} > x + 3 \Leftrightarrow 4(x^2 + x - 2) > x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 17 > 0$$

Questa ultima disuguaglianza è verificata infine se $x \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{52}}{3}) \cup (\frac{1+\sqrt{52}}{3}, +\infty)$. Siccome $-3 < \frac{1-\sqrt{52}}{3} < -2$, possiamo concludere che la disuguaglianza iniziale è verificata se

$$x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{52}}{3} \right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{52}}{3}, +\infty \right) .$$

6. Sia

$$A = \left\{ \frac{2n+5}{n+1} ; n \in \mathcal{N} \right\} .$$

Verificare che $\sup A = \max A = \frac{7}{2}$ e $\inf A = 2$.

Osserviamo che $\frac{7}{2} \in A$ in quanto tale valore si ottiene dalla definizione di A scegliendo $n = 1$. Pertanto $\frac{7}{2} = \max A$ se e solo se

$$\frac{2n+5}{n+1} \leq \frac{7}{2} \quad \forall n \in \mathcal{N} .$$

Risulta:

$$\frac{2n+5}{n+1} \leq \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{4n+10-7n-7}{2(n+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3n-3}{2(n+1)} \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 1$$

D'altra parte

$$\frac{2n+5}{n+1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{2n+5-2n-2}{n+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{n+1} \geq 0$$

Pertanto 2 verifica la prima proprietà caratteristica dell'inf. Sia ora $\varepsilon \in \mathcal{R}$, $\varepsilon > 0$. allora:

$$\frac{2n+5}{n+1} < 2 + \varepsilon \Leftrightarrow 2n+5 < 2n+2+n\varepsilon+\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{3-\varepsilon}{\varepsilon}$$

e quindi 2 verifica anche la seconda proprietà caratteristica dell'inf.

7. Sia

$$A = \left\{ \frac{x^2 + x + 1}{x^2} , x \in \mathcal{R} \quad x \neq 0 \right\}$$

Verificare che

- A non è superiormente limitato,
- Calcolare $\inf A$ e dire se è minimo.

Sia $b \in \mathcal{R}$ con $b > 1$ e verifichiamo che la disuguaglianza

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2} > b$$

ammette almeno una soluzione. Infatti risulta

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2} > b \Leftrightarrow x^2 + x + 1 > b x^2 \Leftrightarrow (b - 1) x^2 - x - 1 < 0$$

Osserviamo che $\Delta = 1 + 4(b - 1) > 0$ e quindi la disuguaglianza è verificata se

$$x \in \left(\frac{1 - \sqrt{\Delta}}{2(b - 1)}, \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2(b - 1)} \right) , \quad x \neq 0 .$$

D'altra parte $d \in \mathcal{R}$ è un minorante dell'insieme A se e solo se

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \geq d \quad \forall x \in \mathcal{R} , \quad x \neq 0$$

Osserviamo ora che

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \geq d \Leftrightarrow (1 - d) x^2 + x + 1 \geq 0$$

Deve quindi essere (ricordando che richiedo che la disuguaglianza sia vera per ogni $x \neq 0$)

$$1 - d > 0 \quad e \quad \Delta = 1 - 4(1 - d) = 4d - 3 \leq 0 \quad \text{ossia} \quad d \leq \frac{3}{4}$$

Pertanto $d = \frac{3}{4}$ è il più grande dei minoranti e quindi, per definizione, è l'estremo inferiore dell'insieme A . Da notare infine che $\frac{3}{4} \in A$ (si ottiene per $x = -2$) e quindi $\frac{3}{4} = \inf A$.

8. Sia

$$A = \left\{ \frac{x^2 + 6x + 1}{x^2 + 1} ; x \in \mathcal{R} \right\} .$$

Dire se A è superiormente limitato.

Ricordiamo che $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante dell'insieme A se

$$\frac{x^2 + 6x + 1}{x^2 + 1} \leq b \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

Osserviamo anche che, ponendo $x = 0$, si ottiene che deve essere $b \geq 1$. D'altra parte

$$\frac{x^2 + 6x + 1}{x^2 + 1} \leq b \Leftrightarrow (b - 1) x^2 - 6x + b - 1 \geq 0$$

Risulta quindi che b è maggiorante se e solo se $\Delta(b) = 36 - 4(b - 1)^2 \leq 0$ e quindi se e solo se $b^2 - 2b - 8 \geq 0$. Essendo $\Delta = 4 + 32$ e

$$b_{1,2} = \frac{2 \mp 6}{2} = \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}$$

si ottiene che b è maggiorante se e solo se $b \geq 4$. Allora $4 = \sup A$. Notiamo infine che per $x = 1$, si ottiene anche che $4 \in A$ e quindi $4 = \max A$.

9. Sia $A = \{x \in \mathcal{R} ; x \neq 1\}$ ed $f : A \rightarrow \mathcal{R}$ la funzione definita dalla legge

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

Sia $B = f(A)$. Verificare che :

- i) B non è nè superiormente nè inferiormente limitato;
- ii) $B = \mathcal{R} - \{1\}$;
- iii) $f : A \rightarrow B$ è iniettiva.

Sia $\lambda \in \mathcal{R}$ con $\lambda > 1$, allora :

$$\frac{x}{x-1} > \lambda \Leftrightarrow \frac{x - \lambda x + \lambda}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(\lambda-1)x - \lambda}{x-1} < 0$$

Studiando infine il segno di numeratore e denominatore, otteniamo :

$\begin{array}{ccccccccc} - & - & - & - & + & + & + & + \\ 1 & & & & 1 & + & \frac{1}{\lambda-1} & \end{array}$	Segno del numeratore
$\begin{array}{ccccccccc} - & - & - & - & + & + & + & + \\ & & & & 1 & & & \end{array}$	Segno del denominatore

Se ne ricava che la disuguaglianza iniziale è verificata se

$$x \in \left(1, 1 + \frac{1}{\lambda-1}\right).$$

Pertanto $B = f(A)$ non è superiormente limitato. Analogamente se $\lambda \in \mathcal{R}$ verifica la disuguaglianza $\lambda < 1$, allora :

$$\frac{x}{x-1} < \lambda \Leftrightarrow \frac{x - \lambda x + \lambda}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(1-\lambda)x + \lambda}{x-1} < 0$$

Ora otteniamo:

$\begin{array}{ccccccccc} - & - & - & - & + & + & + & + \\ & & & & 1 & - & \frac{1}{1-\lambda} & 1 \end{array}$	Segno del numeratore
$\begin{array}{ccccccccc} - & - & - & - & + & + & + & + \\ & & & & 1 & & & \end{array}$	Segno del denominatore

Se ne ricava che la seconda disuguaglianza è verificata se

$$x \in \left(1 - \frac{1}{1-\lambda}, 1\right).$$

Pertanto $B = f(A)$ non è inferiormente limitato. Sia ora $y \in \mathcal{R}$, consideriamo l'equazione (nella x)

$$\frac{x}{x-1} = y$$

Risulta :

$$\frac{x}{x-1} = y \Leftrightarrow x - yx = -y \Leftrightarrow x = \frac{-y}{1-y} \quad (\text{ se } y \neq 1) .$$

Pertanto $y \in f(A) \Leftrightarrow y \neq 1$.

10. Calcolare i limiti:

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 1} \right); \quad ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n} - n \right)$$

$$iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + n^2 + n^3 2^n}; \quad iv) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n 2^n}{n + 2^n}$$

$$v) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 4^n}{n + 5^n}; \quad vi) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5 - (n-1)^5}{n^4}$$

i) Razionalizzando si ottiene:

$$\left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 1} \right) = \frac{2n + 1}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 - 1}}$$

possiamo quindi concludere che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 1} \right) = 1$$

ii) Razionalizzando anche in questo caso, ottengo:

$$\left(\sqrt[3]{n^3 + n} - n \right) = \frac{n}{\left(\sqrt[3]{n^3 + n} \right)^2 + n \sqrt[3]{n^3 + n} + n^2}$$

Ne deriva quindi che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n} - n \right) = 0$$

iii) Raccogliendo $n^3 2^n$ si ottiene:

$$\sqrt[n]{1 + n^2 + n^3 2^n} = 2 \sqrt[n]{n^3} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n} 2^{-n} + \frac{1}{n^3} 2^{-n}}$$

Possiamo quindi concludere che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + n^2 + n^3 2^n} = 2$$

iv) Dividendo numeratore e denominatore per 2^n , si ottiene:

$$\frac{n 2^n}{n + 2^n} = \frac{n}{\frac{n}{2^n} + 1}$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n 2^n}{n + 2^n} = +\infty$$

v) Dividendo numeratore e denominatore per 5^n , si ottiene:

$$\frac{2^n + 4^n}{n + 5^n} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n}{\frac{n}{5^n} + 1}$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 4^n}{n + 5^n} = 0$$

vi) Usando la formula del binomio di Newton, si ha

$$\begin{aligned} (n+1)^5 - (n-1)^5 &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - \\ &\quad - (n^5 - 5n^4 + 10n^3 - 10n^2 + 6n - 1) = \\ &= 10n^4 + 20n^2 + 2 \end{aligned}$$

Ne possiamo concludere quindi che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5 - (n-1)^5}{n^4} = 10$$

11. Sia

$$A = \left\{ \frac{n+2\sqrt{n}}{n+1} ; n \in \mathcal{N} \right\} .$$

Verificare che A é inferiormente limitato e calcolare $\inf A$.

Posto

$$a_n = \frac{n+2\sqrt{n}}{n+1}$$

risulta facile verificare che

- i) $a_n > 1 \quad \forall n \in \mathcal{N}$,
- ii) si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

Ne deriva quindi che $\inf A = 1$. Infatti se $\varepsilon > 0$, risulta:

$$\frac{n+2\sqrt{n}}{n+1} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon n - 2\sqrt{n} + 1 + \varepsilon > 0$$

Siccome $\varepsilon > 0$, l'ultima disequaglianza ha sempre soluzioni. In particolare se $\Delta(\varepsilon) = 4 - 4\varepsilon(1 + \varepsilon) > 0$, basta scegliere n in modo tale che

$$\sqrt{n} > \frac{2 + \sqrt{\Delta(\varepsilon)}}{2\varepsilon}$$

12. Risolvere la seguente disequaglianza:

$$\frac{2x^2 + x}{x - 2} < x - 3$$

Ottengo:

$$\frac{2x^2 + x}{x - 2} < x - 3 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + x - x^2 + 2x + 3x - 6}{x - 2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 6x - 6}{x - 2} < 0$$

Osservando che le due radici dell'equazione di secondo grado sono:

$$x_{1,2} = -3 \mp \sqrt{15}$$

possiamo concludere che la disequaglianza é verificata se e solo se

$$x \in (-\infty, -3 - \sqrt{15}) \cup (\sqrt{15} - 3, 2) .$$

13. Sia

$$A = \left\{ \frac{x+1}{x^2-x+1} ; x \in \mathcal{R} \right\}$$

Calcolare $\sup A$.

Ricordiamo che un numero $b \in \mathcal{R}$, $b > 0$ è un maggiorante dell'insieme A se risulta:

$$\frac{x+1}{x^2-x+1} \leq b \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

Ricordando che il denominatore della frazione considerata è sempre positivo, si ottiene:

$$\frac{x+1}{x^2-x+1} \leq b \Leftrightarrow x+1 \leq bx^2 - bx + b \Leftrightarrow bx^2 - (b+1)x + b - 1 \geq 0$$

Affinchè dunque la disequaglianza sia vera per ogni $x \in \mathcal{R}$, deve essere:

$$\Delta(b) = (b+1)^2 - 4b(b-1) = -3b^2 + 6b + 1 \leq 0$$

e quindi deve essere

$$b \geq \frac{3 + \sqrt{12}}{3}$$

Ne deriva quindi che

$$\sup A = \frac{3 + \sqrt{12}}{3}$$

Osserviamo infine che tale numero risulta essere anche il massimo elemento di A .

14. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2^n}{n^3 + 3^n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right)$$

Ottengo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2^n}{n^3 + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n \frac{\frac{n^2}{2^n} + 1}{\frac{n^3}{3^n} + 1} = 0$$

Razionalizzando ottengo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\left(\frac{n+1}{n} - 1 \right)}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}$$

15. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la disuguaglianza:

$$\frac{x^2 + 2x}{x+1} > 2x - 1$$

Risulta:

$$\frac{x^2 + 2x}{x+1} > 2x - 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 2x^2 + x - 2x + 1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1}{x+1} < 0$$

Le radici del polinomio di secondo grado al numeratore sono $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ed essendo $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} > -1$, risulta che la disuguaglianza è verificata se

$$x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

16. Sia

$$A = \left\{ \sqrt{n^2 + n} - n \ ; \ n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e massimo di A . Poniamo $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$ e verifichiamo che la successione a_n è strettamente crescente. Infatti:

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} &\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + n} - n < \sqrt{n^2 + 2n + 1 + n + 1} - n - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + n} + 1 < \sqrt{n^2 + 3n + 2} \Leftrightarrow n^2 + n + 1 + 2\sqrt{n^2 + n} < n^2 + 3n + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{n^2 + n} < 2n + 1 \Leftrightarrow 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

Ne deriva quindi che

$$\begin{aligned} \inf A &= \min A = a_1 = \sqrt{2} - 1 \\ \sup A &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Siccome $\frac{1}{2} \notin A$, A non ha massimo.

17. Sia

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} \quad x \in \mathcal{R}, \quad x \neq 1$$

Dire se f è iniettiva e calcolare l'insieme dei valori di f .

Siano $x, y \in \mathcal{R}$ con $x \neq 1, y \neq 1$, allora:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = \frac{y^2 + y + 1}{y - 1} &\Rightarrow x^2 y + x y + y - x^2 - x - 1 = x y^2 + x y + x - y^2 - y - 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x y(x - y) + 2(y - x) + (x + y)(x - y) = 0 \Rightarrow (x - y)(x y - 2 - y - x) = 0 \end{aligned}$$

Pertanto l'ultimo prodotto, oltre che per $x = y$, si annulla anche se $y(x - 1) = x + 2$, ossia se

$$y = \frac{x + 2}{x - 1}$$

Risulta allora, scegliendo per esempio $x = 0$ e quindi $y = -2$, che $f(0) = f(-2)$. Pertanto la funzione f non è iniettiva.

Sia ora $y \in \mathcal{R}$, l'equazione $f(x) = y$, ha soluzioni se e solo se

$$x^2 + x + 1 = x y - y \Leftrightarrow x^2 + (1 - y)x + 1 + y = 0$$

Deve quindi essere

$$\Delta(y) = (1 - y)^2 - 4(1 + y) \geq 0 \quad \text{ossia} \quad y^2 - 6y - 3 \geq 0$$

Pertanto l'insieme dei valori è dato dall'insieme

$$B = (-\infty, 3 - 2\sqrt{3}] \cup [3 + 2\sqrt{3}, +\infty)$$

18. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + n^2 + 1} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 6n + 1} - n) \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Risulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \sqrt[n]{1 + \frac{n^2}{3^n} + \frac{1}{3^n}} = 3$$

Razionalizzando, ottengo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 6n + 1} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 6n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 6n + 1} + n} = \frac{6}{2} = 3$$

Sempre razionalizzando, ottengo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{n+1-n}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{4}$$

19. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la disuguaglianza:

$$\frac{x^2 - x}{x + 2} > 2x - 3$$

Risulta:

$$\frac{x^2 - x}{x + 2} > 2x - 3 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2x^2 - 4x + 3x + 6}{x + 2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 6}{x + 2} < 0$$

Le radici del polinomio di secondo grado al numeratore sono $-1 \mp \sqrt{7}$ ed essendo $-1 - \sqrt{7} < -2$, risulta che la disuguaglianza è verificata se

$$x \in (-\infty, -1 - \sqrt{7}) \cup (-2, \sqrt{7} - 1)$$

20. Sia

$$A = \left\{ \sqrt{n^2 + 2n} - n ; n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e massimo di A . Poniamo $a_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n$ e verifichiamo che la successione a_n è strettamente crescente. Infatti:

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} &\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 2n} - n < \sqrt{n^2 + 2n + 1 + 2n + 2} - n - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 2n} + 1 < \sqrt{n^2 + 4n + 3} \Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 + 2\sqrt{n^2 + 2n} < n^2 + 4n + 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 2n} < n + 1 \Leftrightarrow n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 \end{aligned}$$

Ne deriva quindi che

$$\begin{aligned} \inf A &= \min A = a_1 = \sqrt{3} - 1 \\ \sup A &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = 1 \end{aligned}$$

Siccome $1 \notin A$, A non ha massimo.

21. Sia

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} \quad x \in \mathcal{R}, \quad x \neq -1$$

Dire se f è iniettiva e calcolare l'insieme dei valori di f .

Siano $x, y \in \mathcal{R}$ con $x \neq -1, y \neq -1$, allora:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} = \frac{y^2 - y + 1}{y + 1} &\Rightarrow x^2 y - x y + y - x^2 - x + 1 = x y^2 - x y + x - y^2 - y + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x y(x - y) + 2(y - x) + (x + y)(x - y) = 0 \Rightarrow (x - y)(x y - 2 + y + x) = 0 \end{aligned}$$

Pertanto l'ultimo prodotto, oltre che per $x = y$, si annulla anche se $y(x + 1) = 2 - x$, ossia se

$$y = \frac{2 - x}{x + 1}$$

Risulta allora, scegliendo per esempio $x = 0$ e quindi $y = 2$, che $f(0) = f(-2)$. Pertanto la funzione f non è iniettiva.

Sia ora $y \in \mathcal{R}$, l'equazione $f(x) = y$, ha soluzioni se e solo se

$$x^2 - x + 1 = x y - y \Leftrightarrow x^2 - (1 + y)x + 1 - y = 0$$

Deve quindi essere

$$\Delta(y) = (1 + y)^2 - 4(1 - y) \geq 0 \quad \text{ossia} \quad y^2 + 6y - 3 \geq 0$$

Pertanto l'insieme dei valori è dato dall'insieme

$$B = \left(-\infty, -3 - 2\sqrt{3} \right] \cup \left[-3 + 2\sqrt{3}, +\infty \right)$$

22. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + n^3 + 3} ; \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 4n + 6} - n \right) ; \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+6} + \sqrt{n}}.$$

Risulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + n^3 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \sqrt[n]{1 + \frac{n^3}{4^n} + \frac{3}{4^n}} = 4$$

Razionalizzando, ottengo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 4n + 6} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n + 6 - n^2}{\sqrt{n^2 + 4n + 6} + n} = \frac{4}{2} = 2$$

Sempre razionalizzando, ottengo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+6} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{n + 6 - n}{(\sqrt{n+6} + \sqrt{n})(\sqrt{n+6} + \sqrt{n})} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

4 FUNZIONI CONTINUE

Definizione 4.1 Funzione continua Sia $f : A \rightarrow \mathcal{R}$ una funzione e sia $x_0 \in A \cap A'$. Diremo che f è continua in x_0 , se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

ossia se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{tale che} \quad \forall x \in A \quad \text{con} \quad |x - x_0| < \delta_\varepsilon \quad \text{risulta} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Diremo poi che f è continua in A se f è continua in ogni punto di A .

Ad esempio sono funzioni continue nel loro insieme di definizione le funzioni elementari che abbiamo usato fino ad ora. In particolare sono funzioni continue:

- i polinomi, ossia le funzioni del tipo:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad x \in \mathcal{R} \quad (a_n \neq 0)$$

- le funzioni razionali, ossia le funzioni del tipo:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono due polinomi e $x \in A = \{x \in \mathcal{R} \mid Q(x) \neq 0\}$,

- le funzioni trigonometriche: $\sin x, \cos x, \tan x$,
- la funzione esponenziale e la funzione logaritmo.

Useremo nel seguito il teorema della permanenza del segno, che nel caso delle funzioni continue ha il seguente enunciato:

Teorema della permanenza del segno Se una funzione $f : A \rightarrow \mathcal{R}$ è continua in un punto $x_0 \in A \cap A'$ e $f(x_0) > 0$, allora $\exists \delta > 0$ tale che $f(x) > 0 \quad \forall x \in A$ con $|x - x_0| < \delta$.

4.1 Funzioni continue in un intervallo

Dimostriamo ora alcuni importanti teoremi sulle funzioni continue definite in un intervallo. Il primo è il seguente:

Teorema 4.1 Teorema degli zeri Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ una funzione continua. Supponiamo che sia $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$. Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.

Dimostrazione. Indichiamo con

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) > 0\}$$

Ricordando che $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ e che f è continua sia in a che in b , per il teorema della permanenza del segno, possiamo trovare un numero positivo δ , tale che:

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in [a, a + \delta)$$

$$f(x) < 0 \quad \forall x \in (b - \delta, b]$$

ossia, usando notazioni diverse

$$[a, a + \delta) \subset A \quad ; \quad A \cap (b - \delta, b] = \emptyset .$$

Ne deriva quindi che, se poniamo

$$c = \sup A$$

risulta:

$$a < a + \delta \leq c \leq b - \delta < b .$$

ossia $c \in (a, b)$.

Verifichiamo ora che deve essere $f(c) = 0$. Infatti, ragionando per assurdo, supponiamo che sia $f(c) \neq 0$ e consideriamo separatamente i due casi: i) $f(c) > 0$ e ii) $f(c) < 0$.

- i) Supponiamo dunque che sia $f(c) > 0$. Siccome f è continua in c , per il teorema della permanenza del segno, possiamo trovare un numero positivo r tale che $f(x) > 0 \quad \forall x \in (c - r, c + r)$. Ne deriva quindi che l'intervallo $(c - r, c + r)$ è tutto contenuto in A , pertanto A conterrebbe dei numeri (per esempio $c + \frac{r}{2}$) che sono più grandi di c che è l'estremo superiore di A e questo è in contrasto con la prima proprietà caratteristica dell'estremo superiore, che afferma che deve essere

$$x \leq c \quad \forall x \in A$$

- ii) Supponiamo allora che sia $f(c) < 0$. Sempre per il teorema della permanenza del segno, possiamo trovare un numero positivo ρ tale che $f(x) < 0 \quad \forall x \in (c - \rho, c + \rho)$. Pertanto $(c - \rho, c + \rho) \cap A = \emptyset$. Questo è in contrasto con la seconda proprietà caratteristica dell'estremo superiore, la quale afferma che

$$\forall \lambda \in \mathcal{R} \quad \lambda < c \quad \exists x_\lambda \in A \quad \text{con} \quad x_\lambda > \lambda$$

Infatti, nel caso che stiamo considerando, scegliendo $\lambda = c - \rho$, dovrebbe esistere $x_\lambda \in A$ con $c - \rho < x_\lambda \leq c$ e quindi risulterebbe $(c - \rho, c + \rho) \cap A \neq \emptyset$.

q.e.d.

Una conseguenza del teorema degli zeri è un secondo teorema importante sulle funzioni continue noto come teorema dei valori assunti.

Ricordiamo, prima di enunciare questo teorema, che con la parola intervallo, intenderemo uno dei seguenti tipi di insieme di numeri:

- a) intervalli limitati, che possono essere:

- i) chiusi: $[a, b] = \{x \in \mathcal{R} ; a \leq x \leq b\}$ (con $a, b \in \mathcal{R} \quad a < b$);
- ii) aperti: $(a, b) = \{x \in \mathcal{R} ; a < x < b\}$ (con $a, b \in \mathcal{R} \quad a < b$);
- iii) semiaperti a sinistra: $(a, b] = \{x \in \mathcal{R} ; a < x \leq b\}$ (con $a, b \in \mathcal{R} \quad a < b$);
- iv) semiaperti a destra: $[a, b) = \{x \in \mathcal{R} ; a \leq x < b\}$ (con $a, b \in \mathcal{R} \quad a < b$);

- b) intervalli illimitati, che possono essere:

- i) chiusi: $[a, +\infty) = \{x \in \mathcal{R} ; x \geq a\}$, $(-\infty, b] = \{x \in \mathcal{R} ; x \leq b\}$ ($a, b \in \mathcal{R}$);
- ii) aperti: $(a, +\infty) = \{x \in \mathcal{R} ; x > a\}$, $(-\infty, b) = \{x \in \mathcal{R} ; x < b\}$ ($a, b \in \mathcal{R}$), $(-\infty, +\infty) = \mathcal{R}$.

Una proprietà che accomuna tutti questi tipi di intervalli è la seguente:

Caratterizzazione di un intervallo Un sottoinsieme $A \subset \mathcal{R}$ è uno degli intervalli sopra indicati se e solo se A gode della seguente proprietà: se $x_1, x_2 \in A$ e $x_1 < x_2$, allora $[x_1, x_2] \subset A$.

Possiamo ora enunciare il seguente:

Teorema 4.2 Teorema dei valori assunti Sia $f : A \rightarrow \mathcal{R}$ una funzione continua e sia A un intervallo, allora anche $f(A)$ è un intervallo.

Dimostrazione. Supponiamo che $y_1, y_2 \in f(A)$ e che $y_1 < y_2$ e verifichiamo che se $y \in (y_1, y_2)$, allora $y \in f(A)$. Siccome $y_1, y_2 \in f(A)$, esistono $x_1, x_2 \in A$ con $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Supponiamo che sia $x_1 < x_2$ (altrimenti si ragiona in modo simile scambiando x_1 con x_2). Siccome A è un intervallo $[x_1, x_2] \subset A$. Consideriamo la funzione $g : [x_1, x_2] \rightarrow \mathcal{R}$ definita da: $g(x) = y - f(x)$, $x \in [x_1, x_2]$. La funzione g è continua nell'intervallo $[x_1, x_2]$, essendo continua la f , inoltre

$$g(x_1) = y - f(x_1) = y - y_1 > 0$$

$$g(x_2) = y - f(x_2) = y - y_2 < 0$$

Applicando il teorema degli zeri alla funzione g nell'intervallo $[x_1, x_2]$, possiamo concludere che esiste un numero $c \in (x_1, x_2)$ con $g(c) = y - f(c) = 0$ ossia $y = f(c)$ e quindi $y \in f(A)$. q.e.d.

Come applicazione del teorema degli zeri possiamo fare la seguente affermazione:
Se $P(x)$ è un polinomio di terzo grado, ossia

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad a, b, c, d \in \mathcal{R} \quad a \neq 0$$

allora l'equazione $P(x) = 0$ ammette almeno una soluzione reale.

Infatti, supponendo per esempio $a > 0$, risulta

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$$

Possiamo quindi trovare due numeri $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ con $\alpha < \beta$ e tali che $P(\alpha) < 0$ e $P(\beta) > 0$. Allora, per il teorema degli zeri, esiste $c \in (\alpha, \beta)$ con $P(c) = 0$, ossia una soluzione dell'equazione considerata.

4.2 Teorema di Weierstrass e continuità dell'inversa

Un terzo teorema molto importante sulle funzioni continue è il seguente:

Teorema 4.3 Teorema di Weierstrass Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ una funzione continua. Allora esistono due punti $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che

$$f(x_1) \leq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$f(x_2) \geq f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Il punto x_1 viene chiamato il **punto di minimo (assoluto)** di f in $[a, b]$ e il valore $f(x_1)$ viene chiamato il **valore minimo** (sempre di f in $[a, b]$). Analogamente il punto x_2 viene chiamato il **punto di massimo (assoluto)** di f in $[a, b]$ e il valore $f(x_2)$ viene chiamato il **valore massimo** (sempre di f in $[a, b]$). **Dimostrazione.** Dimostriamo solo l'esistenza di un punto di massimo. L'esistenza di un punto di minimo si dimostra in modo analogo.

Primo passo Dimostriamo che l'insieme dei valori $f([a, b])$ è limitato superiormente, ragionando per assurdo. Se $f([a, b])$ non fosse limitato superiormente, allora

$$\forall M \in \mathcal{R} \quad \exists x_M \in [a, b] \quad \text{con} \quad f(x_M) > M.$$

Scegliendo $M = 1, 2, 3, \dots$ (ossia dando a M valori naturali) otterremmo dei numeri $x_n \in [a, b]$ con $f(x_n) > n$. La successione x_n è limitata, infatti

$$a \leq x_n \leq b \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Possiamo quindi applicare ad essa il teorema di Bolzano-Weierstrass ed estrarre da x_n una sottosuccessione convergente. Indichiamo tale sottosuccessione con

$$y_n = x_{k_n} \quad n \in \mathcal{N}$$

e supponiamo che sia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{x}.$$

Siccome

$$a \leq y_n = x_{k_n} \leq b \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

dal teorema della permanenza del segno, deve pure essere $a \leq \bar{x} \leq b$, ossia $\bar{x} \in [a, b]$ e quindi la funzione f è definita in $\bar{x}$. Essendo la funzione continua in $\bar{x}$, si ottiene:

$$f(\bar{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{k_n}) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} k_n = +\infty$$

(abbiamo usato la disuguaglianza $f(x_{k_n}) > k_n$ valida per la scelta di x_n). Si avrebbe quindi $f(\bar{x}) = +\infty$, mentre, essendo $\bar{x} \in [a, b]$, risulta $f(\bar{x}) \in \mathcal{R}$.

Secondo passo Indichiamo con $M = \sup f([a, b])$ e verifichiamo che esiste $\bar{x} \in [a, b]$ con $f(\bar{x}) = M$. Dalle proprietà caratteristiche dell'estremo superiore, si ricava che:

- i) $f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$,
- ii) $\forall \lambda \in \mathcal{R}, \lambda < M, \exists x_\lambda \in [a, b] \text{ con } f(x_\lambda) > \lambda$.

Applicando la seconda proprietà caratteristica dell'estremo superiore a $\lambda = M - \frac{1}{n}$ con $n \in \mathcal{N}$, otteniamo una successione $x_n \in [a, b]$ con $f(x_n) > M - \frac{1}{n}$. Ragionando ora come nel primo passo, applichiamo il teorema di Bolzano-Weierstrass, per ottenere una sottosuccessione $y_n = x_{k_n}$ con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{x} \in [a, b]$$

Allora, essendo la funzione f continua in $\bar{x}$:

$$f(\bar{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = M$$

(da notare che l'ultimo uguale nella relazione precedente deriva dal fatto che

$$M - \frac{1}{k_n} < f(y_n) \leq M)$$

q.e.d.

Osservazione Se $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ è una funzione continua, allora $f([a, b])$ è un intervallo per il teorema dei valori assunti che risulta essere un intervallo limitato e chiuso per il teorema di Weierstrass: Allora $f([a, b]) = [m, M]$.

Concludiamo questo capitolo con alcuni teoremi che legano i concetti di continuità e di iniettività.

Teorema 4.4 Sia $f : A \rightarrow \mathcal{R}$ una funzione continua e supponiamo che A sia un intervallo. Supponiamo inoltre che f sia iniettiva. Allora f è:

- i) o strettamente crescente ,
- ii) o strettamente decrescente.

Dimostrazione. Siano $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$. Supponiamo, dovendo essere $f(x_1) \neq f(x_2)$, che sia $f(x_1) < f(x_2)$ e proviamo che allora la funzione f è strettamente crescente. Osserviamo in primo luogo che se $x \in A$ e $x < x_1$, allora $f(x) < f(x_1)$. Infatti se fosse $f(x_1) < f(x) < f(x_2)$, per il teorema dei valori assunti, esisterebbe $\bar{x} \in (x_1, x_2)$ con $f(\bar{x}) = f(x)$, contro l'ipotesi che f è iniettiva (infatti $\bar{x} \neq x$). In modo analogo si può vedere che non può essere $f(x_1) < f(x_2) < f(x)$. In modo del tutto simile si prova che se $x \in A$ e $x_1 < x < x_2$, allora $f(x_1) < f(x) < f(x_2)$ e che se $x \in A$ e $x_2 < x$ allora $f(x_2) < f(x)$. Ragionando nello stesso modo si può infine verificare che se $x, y \in A$ e $x < y$, allora $f(x) < f(y)$. q.e.d.

Teorema 4.5 Sia $f : A \rightarrow \mathcal{R}$ una funzione monotona definita in un intervallo A . Supponiamo inoltre che $f(A)$ sia pure un intervallo. Allora f è continua.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia crescente. Se x_0 è un punto interno ad A , allora esistono i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

Risulta inoltre

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L = \sup\{f(x) ; x \in A, x < x_0\} \leq f(x_0)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = M = \inf\{f(x) ; x \in A, x > x_0\} \geq f(x_0)$$

Si tratta quindi di dimostrare che $L = M = f(x_0)$.

Supponiamo, ragionando per assurdo, che sia $L < f(x_0)$. Osserviamo che se $x < x_0$, allora $f(x) \leq L$, mentre se $x \geq x_0$, allora $f(x) \geq f(x_0)$. Ne deriverebbe quindi che $f(A)$ non è un intervallo. Analogamente si prova che deve essere $M = f(x_0)$. q.e.d.

Teorema 4.6 *Continuità della funzione inversa* Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione continua, iniettiva e suriettiva e sia A un intervallo. Allora la funzione inversa $f^{-1} : B \rightarrow A$ è pure una funzione continua.

Dimostrazione. Per il teorema dei valori assunti, $B = f(A)$ è un intervallo. Per il teorema 4.4 inoltre f è o strettamente crescente o strettamente decrescente. La funzione inversa f^{-1} è monotona dello stesso tipo della diretta, è definita in un intervallo: B e $f^{-1}(B) = A$ è ancora un intervallo. Allora per il teorema 4.5, f^{-1} è una funzione continua. q.e.d.

Consideriamo infine alcuni esempi.

- **La funzione arcseno**

La funzione $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ definita da $f(x) = \sin x$ è iniettiva e suriettiva. Infatti f è strettamente crescente. Questo si può verificare usando la formula:

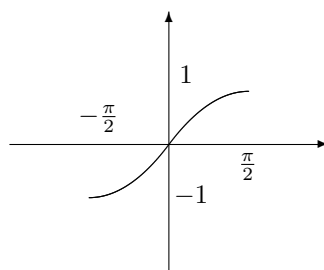
$$\sin y - \sin x = 2 \cos \left(\frac{y+x}{2} \right) \sin \left(\frac{y-x}{2} \right)$$

osservando che se $-\frac{\pi}{2} \leq x < y \leq \frac{\pi}{2}$, allora

$$\frac{y+x}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad e \quad \frac{y-x}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

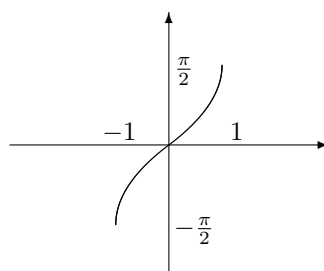
e pertanto

$$\cos \left(\frac{y+x}{2} \right) > 0 \quad e \quad \sin \left(\frac{y-x}{2} \right) > 0$$



La funzione inversa $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ viene chiamata **arcseno** ed indicata con $f^{-1}(y) = \arcsin y$.

Il suo grafico è dato da:

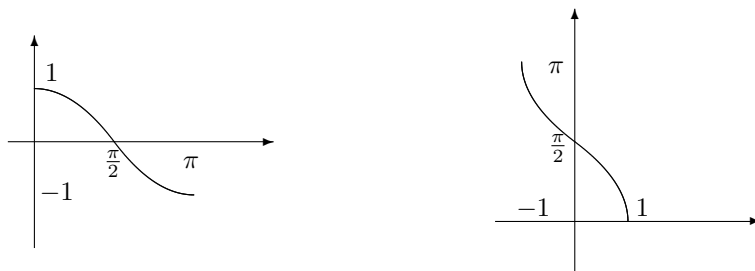


Da ricordare le due identità:

- $\sin(\arcsin y) = y \quad \forall y \in [-1, 1],$
- $\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$

• **La funzione arcocoseno**

La funzione $f(x) = \cos x$ con $x \in [0, \pi]$ è strettamente decrescente (verificarlo per esercizio). Pertanto $f : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ è una funzione iniettiva e suriettiva. La funzione inversa $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ viene indicata col simbolo $f^{-1}(y) = \arccos y$. I grafici delle due funzioni (coseno ed arcocoseno) sono riportati nella seguente figura:



Da ricordare anche in questo caso le due identità:

- $\cos(\arccos y) = y \quad \forall y \in [-1, 1],$
- $\arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in [0, \pi].$

• **La funzione arcotangente**

La funzione

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

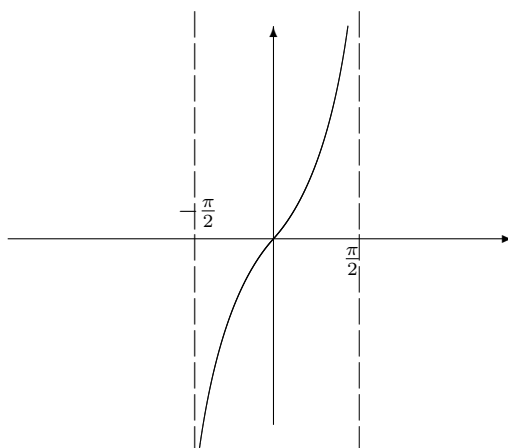
è una funzione continua e strettamente crescente. Infatti se $-\frac{\pi}{2} < x < y < \frac{\pi}{2}$, si ottiene

$$\tan y - \tan x = \frac{\sin y}{\cos y} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin y \cos x - \sin x \cos y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(y-x)}{\cos x \cos y} > 0$$

Infatti $\cos x > 0$, $\cos y > 0$ ed, essendo $y - x \in (0, \pi)$, si ha pure $\sin(y - x) > 0$. Osserviamo infine che

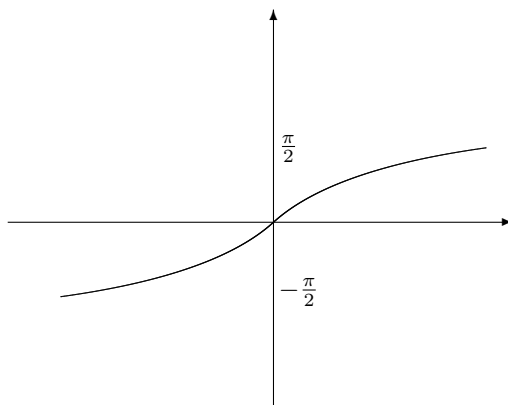
$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$$

Pertanto la funzione tangente è una funzione iniettiva e suriettiva tra $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $\mathcal{R}$.



La sua funzione inversa $f^{-1} : \mathcal{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ viene chiamata **arcotangente** ed indicata col simbolo

$f^{-1}(y) = \arctan y$ Il grafico dell'arcotangente è dato dalla figura:



Da notare infine le due identità:

- $\arctan(\tan x) = x \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$
- $\tan(\arctan y) = y \quad \forall y \in \mathcal{R}.$

4.3 Alcuni esercizi di ripasso

1. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1+n}{1+2^n}}$$

Risulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1+n}{1+2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \sqrt[n]{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2^n}}} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

2. Sia a_n la successione così definita:

$$a_n = \frac{n}{2} - \left[\frac{n}{2} \right]$$

Dire se a_n ha limite.

Da notare che se n è pari, ossia se $n = 2h$ con $h \in \mathcal{N}$, risulta:

$$a_{2h} = h - [h] = 0$$

D'altra parte se n è dispari, ossia se $n = 2h - 1$ con $h \in \mathcal{N}$, si ha:

$$a_{2h-1} = h - \frac{1}{2} - \left[h - \frac{1}{2} \right] = h - \frac{1}{2} - (h - 1) = \frac{1}{2}$$

ne deriva quindi che la successione a_n non ha limite.

3. Verificare che la successione

$$a_n = \sqrt{n^2 + 2n + 3} - n$$

è strettamente decrescente e calcolarne il limite.

Risulta:

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n &\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 2n + 1 + 2n + 5} - n - 1 < \sqrt{n^2 + 2n + 3} - n \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 4n + 6} < 1 + \sqrt{n^2 + 2n + 3} \Leftrightarrow n^2 + 4n + 6 < 1 + n^2 + 2n + 3 + 2\sqrt{n^2 + 2n + 3} \\ &\Leftrightarrow n + 1 < \sqrt{n^2 + 2n + 3} \Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 < n^2 + 2n + 3 \Leftrightarrow 1 < 3 \end{aligned}$$

Infine

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 3 - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n + 3} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}} = \frac{2}{2} = 1$$

4. Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

Risulta

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(\frac{(1+x)^2}{1+x^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(\frac{1+2x+x^2}{1+x^2} \right) = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{2x}{1+x^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \left(1 + \frac{2x}{1+x^2} \right)}{\frac{2x}{1+x^2}} \cdot \frac{2x}{1+x^2} x = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1 \end{aligned}$$

5. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 10^n}{n^2 + n!}$$

Indichiamo con

$$a_n = \frac{n^2 10^n}{n^2 + n!}$$

e applichiamo il criterio del rapporto. Risulta:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 10^{n+1}}{(n+1)^2 + (n+1)!} \cdot \frac{n^2 + n!}{n^2 + 10^n} = \left(\frac{n+1}{n} \right) \frac{10}{n+1} \frac{1 + \frac{n^2}{n!}}{1 + \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

Possiamo dunque concludere che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 10^n}{n^2 + n!} = 0$$

6. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \cos x}{x}$$

Razionalizzando, ottengo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \cos x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - \cos^2 x}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x} + \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\sin^2 x}{x} \right) \frac{1}{\sqrt{1+x} + \cos x} = (1+0) \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

7. Sia a_n la successione definita dalla seguente legge ricorsiva:

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{2} \\ a_n &= \sqrt{2 + a_{n-1}} \quad \text{se } n \in \mathcal{N}, n \geq 2 \end{aligned}$$

Verificare che a_n è strettamente crescente e limitata superiormente e calcolarne il limite.

Ragioniamo per induzione. Risulta $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ e quindi $a_1 < a_2$. D'altra parte, se supponiamo $a_n < a_{n+1}$ per un certo numero naturale n , ottengo

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + a_{n+1}} = a_{n+2}$$

Verifichiamo infine sempre ragionando per induzione che

$$0 < a_n < 2 \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Infatti $0 < a_1 = \sqrt{2} < 2$ e, se supponiamo che, per un certo numero naturale n valga $0 < a_n < 2$, otteniamo

$$0 < a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$$

Per il teorema sull'esistenza del limite di una successione monotona, esiste dunque finito il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Dalla relazione

$$a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$$

deve essere $L = \sqrt{2 + L}$, ossia $L^2 - L - 2 = 0$. Ne deriva quindi che

$$L = \frac{1 \mp \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$$

Ricordando infine che deve essere $0 \leq L \leq 2$, si ottiene $L = 2$.

8. Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^2 - 1}$$

Il polinomio che sta al numeratore si annulla per $x = 1$ e pertanto è divisibile per $x - 1$. Facendo la divisione ottengo:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + x^2 + x - 3 & x - 1 \\ -x^3 + x^2 & \hline 2x^2 + x - 3 & \\ -2x^2 + 2x & \\ \hline 3x - 3 & \\ -3x + 3 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Pertanto:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + 2x + 3)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1} = \frac{6}{2} = 3$$

9. Calcolare i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 5} \right)^x, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}}{1 - \cos x}$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 5} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{2x + 5} \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 - \frac{1}{\frac{2x+5}{2}} \right)^{\frac{2x+5}{2}} \right]^{\frac{2x}{2x+5}} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Razionalizzando, ottengo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{1 - x^2}}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{(\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2})(1 - \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 - x^2}} \cdot \frac{1}{\frac{1 - \cos x}{x^2}} = \frac{2}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

10. Dire se esiste il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sin x}{1+x^2}$$

Poniamo

$$f(x) = \frac{x^2 \sin x}{1+x^2}$$

e osserviamo che se indichiamo con $x_n = 2\pi n$ otteniamo una successione con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$$

D'altra parte se indichiamo con $y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ otteniamo una seconda successione con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n^2}{1+y_n^2} = 1$$

Pertanto il limite di partenza non esiste.

11. Calcolare il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{10^n n!}$$

Poniamo

$$a_n = \frac{n^n}{10^n n!}$$

e applichiamo il criterio del rapporto. Ottengo:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{10^{n+1} (n+1)!} \frac{10^n n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} \frac{1}{10} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{10}$$

Ne deriva quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{10} < 1$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{10^n n!} = 0$$

12. Verificare che l'equazione $\tan x = x$ ha infinite soluzioni.

Sia $a_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. La funzione $f(x) = \tan x - x$ è definita in ogni intervallo del tipo $A_k = (a_{k-1}, a_k)$ ($k \in \mathbb{Z}$) e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow a_{k-1}^+} f(x) = -\infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow a_k^-} f(x) = +\infty$$

Possiamo quindi applicare il teorema degli zeri per ottenere che esiste $z_k \in (a_{k-1}, a_k)$ con $f(z_k) = 0$ ossia con $\tan(z_k) = z_k$.

13. Calcolare i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^2} \log \left(\frac{x^2+x}{x^2-x} \right), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n+3^n}{4^n+n!}}$$

Risulta:

$$\sqrt{1+x^2} \log \left(\frac{x^2+x}{x^2-x} \right) = \sqrt{1+x^2} \log \left(1 + \frac{2x}{x^2-x} \right) = \frac{\log \left(1 + \frac{2x}{x^2-x} \right)}{\frac{2x}{x^2-x}} \frac{2x}{x^2-x} \sqrt{1+x^2}$$

Ne deriva quindi che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1+x^2} \log \left(\frac{x^2+x}{x^2-x} \right) = 1 \cdot 2 = 2$$

Raccogliendo 3^n a numeratore e $n!$ a denominatore, ottengo:

$$\sqrt[n]{\frac{2^n + 3^n}{4^n + n!}} = \frac{3}{\sqrt[n]{n!}} \sqrt[n]{\frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \frac{4^n}{n!}}}$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n + 3^n}{4^n + n!}} = \frac{3}{+\infty} \cdot 1 = 0$$

14. Dire se esiste il limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 + \sin x)$$

Indichiamo con $f(x) = x(1 + \sin x)$ e osserviamo che se poniamo $x_n = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ $n \in \mathcal{N}$ otteniamo una successione che verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$$

D'altra parte, se poniamo $y_n = 2n\pi$ con $n \in \mathcal{N}$, otteniamo una seconda successione che verifica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$$

Allora il limite di partenza non esiste.

15. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 + \sin x)$$

Essendo $2 + \sin x \geq 1$ se $x > 0$ si ottiene

$$x(2 + \sin x) \geq x$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(2 + \sin x) = +\infty.$$

16. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 8^n}{n^2 + n!}$$

Posto

$$a_n = \frac{n^2 8^n}{n^2 + n!}$$

usando il criterio del rapporto, ottengo:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2 8^{n+1}}{(n+1)^2 + (n+1)!} \frac{n^2 + n!}{n^2 8^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 8 \left(\frac{1}{n+1}\right) \frac{1 + \frac{n^2}{n!}}{1 + \frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}$$

Pertanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

e quindi risulta zero anche il limite considerato.

17. Verificare che l'equazione

$$x \sin x = 10$$

ammette infinite soluzioni:

Se poniamo

$$a_k = 2k\pi \quad e \quad b_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathcal{N}$$

ed indichiamo con $f(x) = x \sin x$, si ottiene

$$f(a_k) = 0 \quad e \quad f(b_k) = b_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

Pertanto se $k \in \mathcal{N}$ è scelto in modo che

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi > 10$$

per il teorema dei valori assunti, esiste $x_k \in (a_k, b_k)$ con $f(x_k) = 10$, ossia una soluzione dell'equazione considerata.

18. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \left(\frac{2n+6}{n^2+n+3} \right)$$

Risulta

$$n \sin \left(\frac{2n+6}{n^2+n+3} \right) = n \frac{\sin \left(\frac{2n+6}{n^2+n+3} \right)}{\frac{2n+6}{n^2+n+3}} \frac{2n+6}{n^2+n+3}$$

Ne deriva che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \left(\frac{2n+6}{n^2+n+3} \right) = 2$$

19. Calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+x^2} - e^{-2x}}{\sin(3x)} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} \right)$$

Nel primo limite, raccogliendo e^{-2x} , si ottiene:

$$e^{-2x} \frac{e^{3x+x^2} - 1}{\sin(3x)} = e^{-2x} \left(\frac{e^{3x+x^2} - 1}{3x+x^2} \right) \frac{3x+x^2}{\sin(3x)}$$

Possiamo quindi concludere che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+x^2} - e^{-2x}}{\sin(3x)} = 1$$

Nel secondo, razionalizzando, si ottiene:

$$\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} \right) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x} \right) = 1$$

20. Calcolare i limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{2^n + n^n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n) \log \cos \left(\frac{3}{n+1} \right)$$

Nel primo limite, posto

$$a_n = \frac{(n!)^2}{2^n + n^n}$$

usando il criterio del rapporto, si ottiene:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[(n+1)!]^2}{2^{n+1} + (n+1)^{n+1}} \frac{2^n + n^n}{(n!)^2} = (n+1) \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \frac{1 + \frac{2^n}{n^n}}{1 + \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}$$

Si ottiene quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$$

e quindi vale anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{2^n + n^n} = +\infty$$

Per calcolare il secondo limite, osserviamo che

$$\begin{aligned}(n^2 + n) \log \cos \left(\frac{3}{n+1} \right) &= (n^2 + n) \log \left[1 + \left(\cos \left(\frac{3}{n+1} \right) - 1 \right) \right] = \\ &= \frac{\log \left[1 + \left(\cos \left(\frac{3}{n+1} \right) - 1 \right) \right]}{\left(\cos \left(\frac{3}{n+1} \right) - 1 \right)} \frac{\left(\cos \left(\frac{3}{n+1} \right) - 1 \right)}{\left(\frac{3}{n+1} \right)^2} \left(\frac{3}{n+1} \right)^2 (n^2 + n)\end{aligned}$$

Ne deriva quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n) \log \cos \left(\frac{3}{n+1} \right) = -\frac{9}{2}$$

21. Dire se esiste il

$$\lim_{x \rightarrow 0} x e^{-\frac{1}{x}}$$

Ponendo $y = \frac{1}{x}$, si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{e^{-y}}{y} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{e^{-y}}{y} = -\infty$$

e quindi il limite iniziale non esiste.

22. Verificare che valgono le seguenti identità:

- a) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2} \quad \forall x \in [-1, 1]$,
- b) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad \forall x \in [-1, 1]$,
- c) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1]$.

Siccome $\arccos x \in [0, \pi]$, risulta:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - (\cos(\arccos x))^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

Analogamente, si verifica la b).

Per ottenere la c), ricordiamo che $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, intervallo in cui il seno è strettamente crescente.

Ne deriva che:

$$\begin{aligned}\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} &\Leftrightarrow \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x \Leftrightarrow x = \sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos(\arccos x) - \sin(\arccos x) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = x\end{aligned}$$

23. Calcolare i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos(3x)} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) \log \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-x+3} \right)$$

Nel primo limite, razionalizzando, si ottiene:

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos(3x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} \frac{x^2}{1-\cos(3x)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1} \frac{(3x)^2}{1-\cos(3x)} \frac{1}{9}$$

Possiamo quindi concludere che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos(3x)} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

Nel secondo limite, osservo che:

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 3} = \frac{x^2 - x + 3 + 3x - 2}{x^2 - x + 3} = 1 + \frac{3x - 2}{x^2 - x + 3}$$

Posso quindi scrivere:

$$(x + 2) \log \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 3} \right) = \frac{\log \left(1 + \frac{3x-2}{x^2-x+3} \right)}{\frac{3x-2}{x^2-x+3}} \cdot \frac{3x-2}{x^2-x+3} (x+2)$$

Ne deriva quindi che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2) \log \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - x + 3} \right) = 1 \cdot 3 = 3$$

24. Calcolare i limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1 + n + n^2 + n^3}{2^n + 3^n}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n + \sqrt{n}} \right)^n$$

Per calcolare il primo limite, osserviamo che:

$$\sqrt[n]{\frac{1 + n + n^2 + n^3}{2^n + 3^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^3}}{3} \sqrt[n]{\frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}}$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1 + n + n^2 + n^3}{2^n + 3^n}} = \frac{1}{3}$$

Nel secondo limite, osserviamo che:

$$\left(\frac{n+1}{n + \sqrt{n}} \right)^n = \left(1 + \frac{1 - \sqrt{n}}{n + \sqrt{n}} \right)^n = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n + \sqrt{n}}{1 - \sqrt{n}}} \right)^{\frac{n + \sqrt{n}}{1 - \sqrt{n}}} \right]^{\frac{1 - \sqrt{n}}{n + \sqrt{n}} n}$$

Ricordando che

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{y} \right)^y = e$$

si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n + \sqrt{n}} \right)^n = e^{-\infty} = 0$$

25. Dire se esiste il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} \cos \left(n \frac{\pi}{2} \right)$$

Poniamo

$$a_n = \frac{n+1}{n+2} \cos \left(n \frac{\pi}{2} \right)$$

Osserviamo, in primo luogo, che se n è dispari, ossia se $n = 2h + 1$, otteniamo

$$\cos \left(n \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(h \pi + \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

e quindi $b_h = a_{2h+1} = 0$. D'altra parte se n è multiplo di 4, ossia se $n = 4h$, risulta

$$\cos \left(n \frac{\pi}{2} \right) = \cos (2h \pi) = 1$$

e quindi:

$$c_h = a_{4h} = \frac{4h+1}{4h+2}$$

e quindi

$$\lim_{h \rightarrow \infty} c_h = 1$$

La successione a_n ammette due sottosuccessioni con limiti diversi e quindi non é dotata di limite.

26. Verificare che l'equazione

$$\frac{x}{3} = \log x$$

ammette almeno due soluzioni. Poniamo

$$f(x) = \frac{x}{3} - \log x$$

e osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

e che

$$f(e) = \frac{e}{3} - \log e = \frac{e}{3} - 1 < 0$$

Dalla definizione di limite, possiamo ora trovare due numeri a, b con $0 < a < e < b$ tali che $f(a) > 0$ e $f(b) > 0$. Possiamo quindi applicare il teorema degli zeri per affermare che esistono due punti x_1, x_2 con $a < x_1 < e < x_2 < b$ con $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

27. Sia

$$A = \left\{ \sqrt{n^2 - n + 1} - n, n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare $\sup A$ e $\inf A$.

Posto $a_n = \sqrt{n^2 - n + 1} - n$, verifichiamo che la successione a_n è decrescente. Infatti risulta:

$$\begin{aligned} a_{n+1} < a_n &\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 2n + 1} - n - 1 < \sqrt{n^2 - n + 1} - n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + n + 1} < \sqrt{n^2 - n + 1} + 1 \Leftrightarrow n^2 + n + 1 < n^2 - n + 1 + 1 + 2\sqrt{n^2 - n + 1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2n + 1 < 2\sqrt{n^2 - n + 1} \Leftrightarrow 4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 4n + 4 \end{aligned}$$

Ne deriva quindi che

$$\begin{aligned} \sup A &= \max A = a_1 = 0 \\ \inf A &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n + 2}{\sqrt{n^2 - n + 1} + n} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

5 DERIVATE

5.1 Definizione e prime proprietà

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ una data funzione e sia $x_0 \in [a, b]$. La funzione

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad x \in [a, b] - \{x_0\},$$

viene chiamata il **rapporto incrementale** di f in x_0 . Diremo che la funzione f è **derivabile** in x_0 se esiste finito il limite :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tale limite viene chiamato la **derivata** di f nel punto x_0 ed è indicato, di solito, con il simbolo $f'(x_0)$. Pertanto

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Usando la ε -definizione di limite possiamo scrivere che :

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che $\forall x \in [a, b]$ con $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$ si ha

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Consideriamo ora alcuni esempi:

1. Sia $f(x) = x^2$ e sia x_0 un qualunque numero reale, risulta:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

2. Sia $f(x) = x^3$ e sia x_0 un qualunque numero reale, risulta:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x x_0 + x_0^2)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + x x_0 + x_0^2) = 3x_0^2 \end{aligned}$$

3. Sia $f(x) = \sqrt{x}$ con $x \geq 0$ e sia x_0 un numero reale positivo, risulta:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

D'altra parte nel punto $x_0 = 0$, risulta:

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Pertanto la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ non è derivabile in $x_0 = 0$.

4. Sia $f(x) = \sin x$ e sia x_0 un qualunque numero reale. Usando la formula

$$\sin x - \sin x_0 = 2 \sin \left(\frac{x - x_0}{2} \right) \cos \left(\frac{x + x_0}{2} \right)$$

risulta:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \left(\frac{x - x_0}{2} \right) \cos \left(\frac{x + x_0}{2} \right)}{\frac{x - x_0}{2}} = \cos x_0$$

5. Sia $f(x) = \cos x$ e sia x_0 un qualunque numero reale. Usando la formula

$$\cos x - \cos x_0 = -2 \sin \left(\frac{x - x_0}{2} \right) \sin \left(\frac{x + x_0}{2} \right)$$

risulta:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \left(\frac{x - x_0}{2} \right) \sin \left(\frac{x + x_0}{2} \right)}{\frac{x - x_0}{2}} = - \sin x_0$$

6. Sia $f(x) = e^x$ e sia x_0 un qualunque numero reale, risulta:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0}$$

7. Sia $f(x) = \log x$ con $x > 0$ e sia x_0 un qualunque numero reale positivo, risulta:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log x - \log x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log \frac{x}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\log \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0} \right)}{x - x_0} = \frac{1}{x_0}$$

5.2 Osservazione

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ è una funzione derivabile in un punto $x_0 \in [a, b]$, allora f è continua in x_0 . Infatti risulta:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

Pertanto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) = f'(x_0) 0 = 0.$$

Il viceversa di questa affermazione non è vera; ossia una funzione può essere continua in un punto senza essere ivi derivabile. Un esempio è la funzione $f(x) = |x|$. Infatti tale funzione è continua in ogni punto e se consideriamo il punto $x_0 = 0$, risulta:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

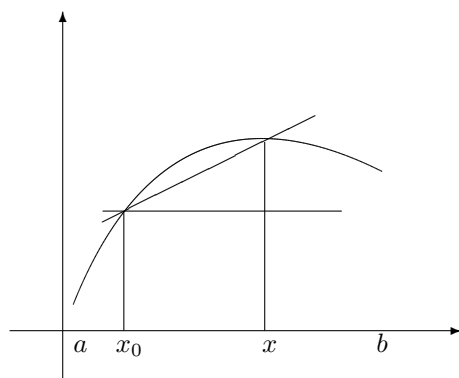
Pertanto f non è derivabile in 0.

5.3 Significato geometrico del concetto di derivata

Fissati due punti x_0 ed x nell'intervallo $[a, b]$, indichiamo con r la retta passante per i punti del piano di coordinate $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$. Se indichiamo con α la misura in radianti dell'angolo che la retta r forma con l'asse delle x , risulta:

$$\tan \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Il rapporto incrementale quindi della funzione f nel punto x_0 ha il significato geometrico di coefficiente angolare ($\tan \alpha$) della retta secante (la retta per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$).



Se f è derivabile nel punto x_0 , il rapporto incrementale tende a $f'(x_0)$ quando x tende a x_0 e la retta secante (che varia la variare di x) tende ad una retta limite: la retta che passa per il punto $(x_0, f(x_0))$ ed ha coefficiente angolare $f'(x_0)$. Tale retta viene chiamata la **retta tangente** al grafico della funzione f nel punto $(x_0, f(x_0))$. La sua equazione risulta quindi:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) .$$

Da notare che, se indichiamo con:

$$d(x) = f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))$$

la distanza con segno, sulla retta verticale, dei punti, rispettivamente sul grafico di f e sul grafico della tangente, che si proiettano in x , risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{d(x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$$

Da notare inoltre che la proprietà di limite indicata è vera solo per la retta tangente, infatti se

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$

è l'equazione di un'altra retta passante per il punto del piano $(x_0, f(x_0))$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + m(x - x_0))}{x - x_0} = f'(x_0) - m \neq 0 \text{ se } m \neq f'(x_0).$$

5.4 Regole di derivazione della somma, del prodotto e del quoziente

Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ due funzioni derivabili in un punto $x_0 \in [a, b]$, allora

i) la funzione somma $f+g$ è derivabile nel punto x_0 e vale la formula:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0) ;$$

ii) la funzione prodotto fg è derivabile in x_0 e vale la formula:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) ;$$

iii) se $g(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$, allora la funzione quoziente $\frac{f}{g}$ è derivabile nel punto x_0 e vale la formula:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Dimostrazione

i) Lasciata per esercizio.

ii) Risulta:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}\end{aligned}$$

Passando quindi al limite per x tendente ad x_0 , si ottiene la seconda formula, ricordando che g , essendo derivabile in x_0 , è anche continua in tale punto.

iii) Risulta:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} = \\ &= \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0) + f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)} = \\ &= \frac{[f(x) - f(x_0)]g(x_0) - f(x_0)[g(x) - g(x_0)]}{g(x)g(x_0)}\end{aligned}$$

Dividendo ora per $x - x_0$ e facendo tendere x a x_0 , si ottiene la formula di derivazione del quoziente cercata.

5.5 Regola di derivazione della funzione composta

Siano $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ e $g : [c, d] \rightarrow \mathcal{R}$ due funzioni. Supponiamo che $f([a, b]) \subset [c, d]$ in modo che si possa considerare la funzione composta:

$$h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Supponiamo inoltre che la funzione f sia derivabile nel punto x_0 e che la funzione g sia derivabile nel punto corrispondente $y_0 = f(x_0)$. Allora la funzione composta h è derivabile nel punto x_0 e vale la seguente formula:

$$h'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

Dimostrazione Poniamo:

$$\sigma(y, y_0) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} & \text{se } y \in [c, d] - \{y_0\} \\ g'(y_0) & \text{se } y = y_0 \end{cases}$$

Dalla definizione di derivata, si ottiene che :

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \sigma(y, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0) = \sigma(y_0, y_0)$$

e quindi la funzione $\sigma : [c, d] \rightarrow \mathcal{R}$ è una funzione continua in y_0 . Inoltre, dalla definizione di σ , si ottiene per ogni $y \in [c, d]$:

$$g(y) - g(y_0) = \sigma(y, y_0) (y - y_0)$$

Ponendo infine $y = f(x)$, nella formula precedente e dividendo per $x - x_0$, si ottiene:

$$\frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \sigma(f(x), y_0) \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Usando infine il teorema sul limite della funzione composta, otteniamo che

$$\begin{aligned}h'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \sigma(y, y_0) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \sigma(y_0, y_0) f'(x_0) = g'(y_0) f'(x_0)\end{aligned}$$

5.6 Regola di derivazione della funzione inversa

Sia $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ una funzione continua e invertibile, ossia continua, iniettiva e suriettiva. Indichiamo con $g : [c, d] \rightarrow [a, b]$ la sua funzione inversa. Supponiamo che la funzione diretta f sia derivabile in un punto $x_0 \in [a, b]$ e che si abbia $f'(x_0) \neq 0$. Allora la funzione inversa g è derivabile nel punto $y_0 = f(x_0)$ e risulta:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

Dimostrazione Ponendo $y = f(x)$, per il teorema sul limite della funzione composta, ottengo:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} .$$

5.7 Alcuni esempi

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

1.

$$f(x) = x \cos x$$

Se $x_0 \in \mathbb{R}$, risulta:

$$f'(x_0) = \cos x_0 - x_0 \sin x_0$$

2.

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$$

Se $x_0 \in \mathbb{R}$, risulta:

$$f'(x_0) = \frac{(2x_0 + 1)(x_0^2 + 1) - (x_0^2 + x_0 + 1) 2x_0}{(x_0^2 + 1)^2}$$

3.

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} , \quad x \neq \pi/2 + k\pi , \quad k \in \mathbb{Z}$$

In ogni punto $x_0 \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, risulta:

$$f'(x_0) = \frac{\cos x_0 \cos x_0 - \sin x_0 (-\sin x_0)}{\cos^2 x_0} = \frac{1}{\cos^2 x_0} = 1 + \tan^2 x_0$$

4.

$$f(x) = x^n , \quad n \in \mathbb{N}$$

Se $x_0 \in \mathbb{R}$, risulta:

$$f'(x_0) = n x_0^{n-1}$$

(Verifichiamo questa formula, ragionando per induzione su n). Se $n = 1$, la formula è vera. Supponiamo ora che la formula sia vera per un certo numero naturale n , allora si ha:

$$(x^{n+1})'(x_0) = (x^n x)'(x_0) = (x^n)'(x_0) x_0 + x_0^n = n x_0^{n-1} x_0 + x_0^n = (n+1) x_0^n$$

e quindi la formula vale per $n+1$. Pertanto vale per ogni n .

5.

$$h(x) = \log(1 + x^2)$$

Cosideriamo la funzione h come composta delle due funzioni $g(y) = \log y$ e $f(x) = 1 + x^2$. Dalla formula di derivazione della composta, si ottiene:

$$h'(x_0) = \frac{1}{1 + x_0^2} 2x_0 .$$

6.

$$g(y) = \arctan y \quad y \in \mathcal{R}$$

Posto $f(x) = \tan x \quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$, risulta, se $x_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ e $y_0 = \tan x_0$:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{1 + \tan^2 x_0} = \frac{1}{1 + y_0^2}.$$

7.

$$g(y) = \arcsin y \quad y \in [-1, 1]$$

Posto $f(x) = \sin x \quad x \in [-\pi/2, \pi/2]$, risulta, se $y_0 \in (-1, 1)$ e $x_0 \in (-\pi/2, \pi/2)$ sono tali che $y_0 = \sin x_0$:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\cos x_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x_0}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y_0^2}}.$$

8.

$$f(x) = x^x \quad x > 0$$

Si ha che $f(x) = e^{x \log x}$, pertanto per la regola di derivazione della funzione composta, si ha se $x_0 > 0$:

$$f'(x_0) = e^{x_0 \log x_0} (\log x_0 + x_0 \frac{1}{x_0}) = x_0^{x_0} (\log x_0 + 1).$$

9.

$$h(x) = (f(x))^{g(x)}$$

dove supponiamo che $f(x) > 0 \quad \forall x$ appartenente al suo insieme di definizione. Essendo

$$h(x) = e^{g(x) \log f(x)}$$

si ha:

$$h'(x_0) = e^{g(x_0) \log f(x_0)} \left(g'(x_0) \log f(x_0) + g(x_0) \frac{f'(x_0)}{f(x_0)} \right)$$

Come caso speciale, vogliamo mettere in risalto la formula quando $f(x) = x$ e $g(x) = \alpha$ con $\alpha \in \mathcal{R}$. Si ottiene allora la funzione $h(x) = x^\alpha$ e risulta:

$$h'(x_0) = \alpha x_0^{\alpha-1}$$

10.

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0$$

Se $x_0 \neq 0$, si ottiene:

$$f'(x_0) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{x_0})^2} \left(-\frac{1}{x_0^2}\right) = -\frac{1}{1 + x_0^2}$$

11.

$$f(x) = \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

Si ha:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{x_0 + \sqrt{1 + x_0^2}} \left(1 + \frac{2x_0}{2\sqrt{1 + x_0^2}}\right) = \frac{\sqrt{1 + x_0^2} + x_0}{x_0 + \sqrt{1 + x_0^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + x_0^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + x_0^2}} \end{aligned}$$

12. Le funzioni iperboliche Poniamo

$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$g(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Le due funzini f e g godono delle seguenti proprieta :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$f'(x_0) = \frac{e^{x_0} + e^{-x_0}}{2} = g(x_0)$$

$$g'(x_0) = \frac{e^{x_0} - e^{-x_0}}{2} = f(x_0)$$

6 APPLICAZIONE DELLE DERIVATE ALLO STUDIO DI FUNZIONI

In questo capitolo illustreremo alcuni metodi analitici utili per studiare il grafico di una funzione.

6.1 Massimi e minimi relativi e teorema di Fermat

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ una data funzione e sia $x_0 \in [a, b]$. Diremo che il punto x_0 è un **punto di minimo (massimo) relativo** se :

$\exists r > 0$ tale che $\forall x \in [a, b] \cap [x_0 - r, x_0 + r]$ vale la disuguaglianza

$$f(x) \geq f(x_0) \text{ (} f(x) \leq f(x_0) \text{)}.$$

Molto importante è il seguente:

Teorema 6.1 (Teorema di Fermat) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ una data funzione e sia $x_0 \in [a, b]$. Supponiamo che:

- i) il punto x_0 sia un punto di minimo (massimo) relativo per f ;
- ii) x_0 sia un punto interno all'intervallo $[a, b]$: ossia $x_0 \in (a, b)$;
- iii) la funzione f sia derivabile nel punto x_0 .

Allora risulta $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione. Supponiamo che il punto x_0 sia un punto di minimo relativo. Allora $\exists r > 0$ tale che $\forall x \in [a, b] \cap [x_0 - r, x_0 + r]$ vale la disuguaglianza $f(x) \geq f(x_0)$. Inoltre, usando la seconda ipotesi e scegliendo r eventualmente più piccolo, posso supporre che $(x_0 - r, x_0 + r) \subset [a, b]$. Ne deriva quindi che:

$$\forall x \in (x_0 - r, x_0 + r) \text{ si ha } f(x) - f(x_0) \geq 0.$$

Allora il rapporto incrementale della funzione f nel punto x_0 ha il seguente segno:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leq 0 & \text{se } x < x_0 \\ \geq 0 & \text{se } x > x_0 \end{cases}$$

Possiamo quindi concludere, essendo f derivabile in x_0 , che:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

e quindi che deve essere $f'(x_0) = 0$.

q.e.d.

Osservazioni

- se il punto di minimo (massimo) relativo x_0 non è interno all'intervallo $[a, b]$: ossia se $x_0 = a$ o $x_0 = b$ (e quindi la seconda ipotesi del teorema di Fermat non è verificata), allora in generale non si ha che $f'(x_0) = 0$. Infatti, se consideriamo la funzione $f(x) = x$ con $x \in [0, 1]$, risulta che $x_0 = 0$ è il punto di minimo di f in $[0, 1]$ (e quindi anche un punto di minimo relativo) e risulta $f'(0) = 1$;
- la condizione $f'(x_0) = 0$ è una condizione solo necessaria a che x_0 sia punto di minimo o di massimo relativo. In altre parole, una funzione può avere derivato zero in un punto senza che questo punto sia di minimo né di massimo relativi per la funzione. Ad esempio la funzione $f(x) = x^3$ ($x \in \mathcal{R}$) è una funzione strettamente crescente anche se $f'(0) = 0$.

Teorema 6.2 (Teorema di Rolle) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ una data funzione. Supponiamo che:

- i) f sia continua in ogni punto dell'intervallo chiuso $[a, b]$;
- ii) f sia derivabile in ogni punto dell'intervallo aperto (a, b) ;
- iii) $f(a) = f(b)$.

Allora:

$$\exists c \in (a, b) \text{ tale che } f'(c) = 0 .$$

Dimostrazione. Essendo f una funzione continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$, posso applicare il teorema di Weierstrass e affermare che :

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] \text{ tali che } f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in [a, b] .$$

(ossia la funzione f assume in $[a, b]$ sia valore minimo che valore massimo). Consideriamo ora i seguenti casi:

- se il punto di minimo x_1 è interno all'intervallo $[a, b]$: ossia se $x_1 \in (a, b)$, allora, per il teorema di Fermat, $f'(x_1) = 0$ e il teorema di Rolle è dimostrato prendendo $c = x_1$;
- se x_1 coincide con a o con b , consideriamo il punto x_2 e supponiamo che x_2 sia interno all'intervallo $[a, b]$: ossia $x_2 \in (a, b)$, allora sempre per il teorema di Fermat, si ha $f'(x_2) = 0$ e il teorema di Rolle è dimostrato prendendo $c = x_2$;
- infine se x_1 e x_2 coincidono entrambi con gli estremi (per esempio $x_1 = a$ e $x_2 = b$), allora dall'ipotesi $f(a) = f(b)$, si ha che il valore minimo di f coincide col suo valore massimo, pertanto in questo caso f è costante ($f(x) = f(a) = f(b) \quad \forall x \in [a, b]$). Allora $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

q.e.d.

Teorema 6.3 (Teorema di Lagrange) Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ una data funzione . Supponiamo che:

- i) f sia continua in ogni punto dell'intervallo chiuso $[a, b]$;
- ii) f sia derivabile in ogni punto dell'intervallo aperto (a, b) .

Allora:

$$\exists c \in (a, b) \text{ tale che } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Dimostrazione. Consideriamo l'equazione della retta secante passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Risulta:

$$y = s(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Notiamo infine che la funzione differenza:

$$g(x) = f(x) - s(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right)$$

verifica le ipotesi del teorema di Rolle: infatti g è continua nell'intervallo chiuso $[a, b]$ perchè f ed s lo sono, è derivabile nell'intervallo aperto (a, b) , sempre perchè f e s lo sono ed inoltre risulta $g(a) = g(b) = 0$. Allora per il teorema di Rolle esiste un punto c tale che $g'(c) = 0$. Ossia:

$$0 = g'(c) = f'(c) - s'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Pertanto il teorema di Lagrange è dimostrato.

q.e.d.

6.2 Conseguenze del teorema di Lagrange

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ una funzione derivabile in ogni punto di $[a, b]$.

- Se $f'(x) > 0 \ \forall x \in [a, b]$, allora f è strettamente crescente in $[a, b]$. Infatti se $x_1, x_2 \in [a, b]$ sono tali che $x_1 < x_2$, applicando il teorema di Lagrange all'intervallo $[x_1, x_2]$, si ottiene che esiste un punto $c \in (x_1, x_2)$, con:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

ed essendo $f'(x) > 0 \ \forall x \in [a, b]$, risulta:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$$

e quindi $f(x_2) > f(x_1)$;

- se $f'(x) < 0 \ \forall x \in [a, b]$, allora f è strettamente decrescente in $[a, b]$;
- se $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$, allora f è crescente in $[a, b]$;
- se $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in [a, b]$, allora f è decrescente in $[a, b]$;
- se $f'(x) = 0 \ \forall x \in [a, b]$, allora f è costante in $[a, b]$.

Usando questi fatti, potremo enunciare i seguenti criteri per stabilire se un punto x_0 è un punto di massimo o minimo relativi.

Supponiamo che $x_0 \in (a, b)$, che $r > 0$ sia tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \subset [a, b]$ e che $f'(x_0) = 0$. Allora

- se $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (x_0 - r, x_0)$ e $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (x_0, x_0 + r)$, allora x_0 è un punto di minimo relativo;
- se $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (x_0 - r, x_0)$ e $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (x_0, x_0 + r)$, allora x_0 è un punto di massimo relativo;
- se $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ (oppure $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$), allora x_0 non è un punto nè di massimo nè di minimo relativo.

Riassumendo quanto visto a parole, possiamo dire che se la derivata prima di una funzione è nulla in un punto interno x_0 ed ha valori di segno diverso in un intorno sinistro e destro di x_0 , allora il punto x_0 è un punto di massimo o minimo relativi. Invece se la derivata si annulla in x_0 , ma poi ha valori dello stesso segno in un intorno sinistro e destro di x_0 , allora il punto x_0 non è nè di massimo nè di minimo relativo.

6.3 Derivate di ordine superiore

Se $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ è una funzione derivabile in ogni punto di $[a, b]$, possiamo considerare la funzione derivata $f' : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$, cioè la funzione che ad ogni $x \in [a, b]$ associa $f'(x)$. Se la funzione f' è derivabile in un punto $x_0 \in [a, b]$ diremo che la funzione f è **derivabile due volte** in x_0 e chiameremo tale derivata la **derivata seconda** di f in x_0 e la indicheremo col simbolo $f''(x_0)$. Pertanto :

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

Ad esempio:

•

$$f(x) = x \sin x$$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x$$

$$f''(x) = \cos x + \cos x - x \sin x = 2 \cos x - x \sin x .$$

•

$$f(x) = \tan x \quad x \neq \pi/2 + k\pi \quad k \text{ intero relativo}$$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$f''(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$$

Da notare il seguente criterio per individuare i punti di massimo e minimo relativi.

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ una funzione dotata di derivata seconda continua in ogni punto di $[a, b]$ e $x_0 \in (a, b)$. Supponiamo che $f'(x_0) = 0$ e che $f''(x_0) > 0$. Allora il punto x_0 è un punto di minimo relativo per f . Infatti, essendo $f''(x_0) > 0$ ed essendo f'' una funzione continua, allora per il teorema della permanenza del segno, esiste $r > 0$ tale che $(x_0 - r, x_0 + r) \subset [a, b]$ e $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, allora f' è una funzione crescente (avendo derivata positiva) e siccome $f'(x_0) = 0$, risulta $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + r)$ e $f'(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0 - r, x_0)$. Pertanto x_0 è punto di minimo relativo.

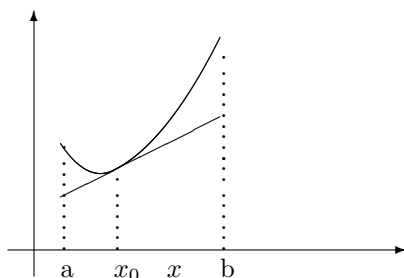
Analogamente se $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) < 0$ allora il punto x_0 è un punto di massimo relativo per f .

6.4 Funzioni convesse

Definizione 6.1 Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ una funzione derivabile in ogni punto di $[a, b]$. Diremo che f è **convessa** nell'intervallo $[a, b]$ se :

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in [a, b] .$$

Da notare che il significato geometrico della definizione di convessità è la seguente: il grafico della funzione sta sempre "sopra" la retta tangente (qualunque sia il punto in cui tale tangente viene considerata).



Un criterio per stabilire se una funzione è convessa è il seguente:

Criterio di convessità Se una funzione è dotata di derivata seconda e risulta $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$, allora f è convessa in $[a, b]$.

Infatti se la derivata seconda è maggiore o uguale a zero, allora la derivata prima è crescente e quindi, supponendo $x_0 < x$ e applicando il teorema di Lagrange, ottengo che $\exists c \in (x_0, x)$ tale che:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c) \geq f'(x_0)$$

e quindi la funzione f è convessa.

Una funzione viene detta poi **concava** se la funzione $-f$ è convessa. In altre parole se :

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \forall x, x_0 \in [a, b] .$$

Da un ragionamento simile a quello fatto in precedenza risulta che se $f''(x) \leq 0 \forall x \in [a, b]$, allora f è concava in $[a, b]$.

Diremo infine che il punto $x_0 \in (a, b)$ è un **flesso** per la funzione f se esiste un numero $r > 0$ tale che f è convessa nell'intervallo $[x_0 - r, x_0]$ ed è concava nell'intervallo $[x_0, x_0 + r]$ (o viceversa).

6.5 Studio del grafico di una funzione

Applicheremo le considerazioni dei paragrafi precedenti allo studio del grafico di una funzione. Indichiamo il metodo generale di procedere:

- Determinare il dominio (o insieme di definizione) D della funzione e calcolare i limiti quando x tende agli estremi di D .
- Evidenziare qualche proprietà qualitativa di f (se evidente). Per esempio se f è pari o dispari, dove la funzione si annulla o dove la funzione è positiva o negativa.
- Calcolare la derivata prima e studiarne il segno, per vedere dove la funzione è crescente o decrescente e per trovare gli eventuali punti di massimo o minimo relativi.
- Calcolare la derivata seconda della funzione e studiarne il segno per vedere dove la funzione è convessa e dove è concava e per trovare gli eventuali punti di flesso.
- Vedere se la funzione ha **asintoti obliqui**, ossia vedere se esiste una retta di equazione $y = mx + q$ tale che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0$$

(asintoto a $+\infty$); oppure tale che:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0$$

(asintoto a $-\infty$).

Da notare che una retta di equazione $y = mx + q$ è asintoto di una funzione f a $+\infty$ se e solo se :

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad e \quad q = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$$

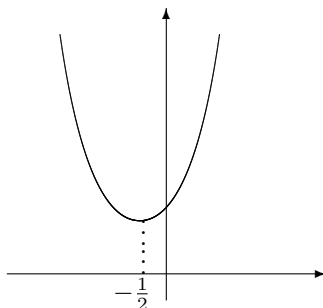
Analogamente una retta di equazione $y = mx + q$ è asintoto di una funzione f a $-\infty$ se e solo se :

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad e \quad q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx)$$

Consideriamo ora alcuni esempi.

1. Tracciare il grafico della funzione : $f(x) = x^2 + x + 2$.

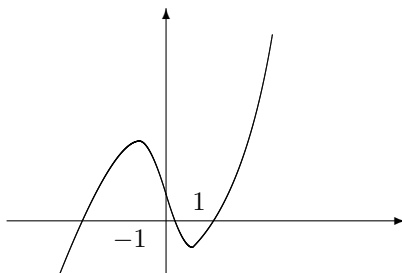
Il dominio della funzione risulta $D = \mathcal{R}$. Inoltre $f'(x) = 2x + 1$ e quindi il punto $x = -\frac{1}{2}$ è un punto di minimo relativo per f . Inoltre risulta $f(-\frac{1}{2}) = \frac{7}{4}$. Pertanto il grafico della funzione f è del tipo :



2. Tracciare il grafico della funzione: $f(x) = x^3 - 3x + 1$.
Il dominio della funzione risulta $D = \mathcal{R}$. Inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Inoltre $f'(x) = 3x^2 - 3$ e quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $x < -1$ o $x > 1$. Il punto $x = -1$ pertanto é un punto di massimo relativo per f , mentre il punto $x = 1$ é un punto di minimo relativo. Da notare che risulta $f(-1) = 3$ e $f(1) = -1$. Risulta infine $f''(x) = 6x$. Pertanto la funzione é convessa nell'intervallo $[0, +\infty)$ ed é concava nell'intervallo $(-\infty, 0]$. Pertanto il grafico della funzione f é del tipo :



3. Tracciare il grafico della funzione :

$$f(x) = x + \frac{2}{x}$$

Il dominio della funzione risulta $D = \{x \in \mathcal{R} ; x \neq 0\}$ e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Risulta inoltre

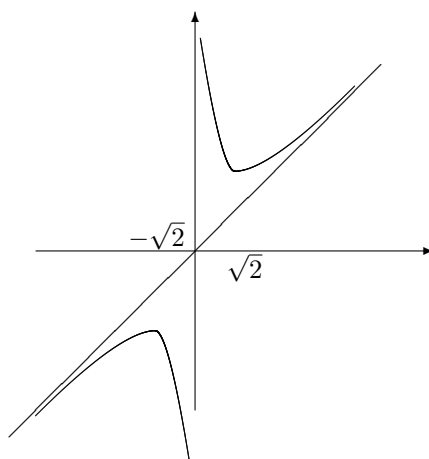
$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2}$$

e quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $x < -\sqrt{2}$ o $x > \sqrt{2}$. Il punto $x = -\sqrt{2}$ pertanto é un punto di massimo relativo per f , mentre il punto $x = \sqrt{2}$ é un punto di minimo relativo. Da notare che risulta $f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$ e $f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$. Infine $f''(x) = \frac{4}{x^3}$. Pertanto la funzione é convessa nell'intervallo $(0, +\infty)$ ed é concava nell'intervallo $(-\infty, 0)$. Osserviamo ancora che la funzione é dispari e che si ha :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$$

Pertanto la retta di equazione $y = x$ é asintoto al grafico di f sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Il grafico della funzione f é quindi del tipo:



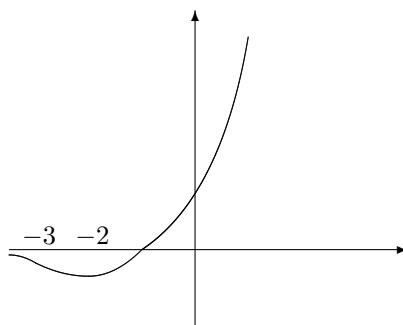
4. Tracciare il grafico della funzione: $f(x) = (x+1)e^x$.

Il dominio della funzione risulta $D = \mathcal{R}$ e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Come si vede facilmente, la funzione é positiva se $x > -1$.

Risulta $f'(x) = e^x(1+x+1) = e^x(x+2)$ e quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $x > -2$. Il punto $x = -2$ é un punto di minimo relativo. Da notare che risulta $f(-2) = -e^{-2}$. Infine $f''(x) = e^x(x+3)$. Pertanto la funzione é convessa nell'intervallo $[-3, +\infty)$ ed é concava nell'intervallo $(-\infty, -3]$. Il grafico della funzione f é quindi del tipo :



5. Tracciare il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

Il dominio della funzione risulta $D = \mathcal{R}$ e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Come si vede facilmente , la funzione é positiva se $x > -1$.

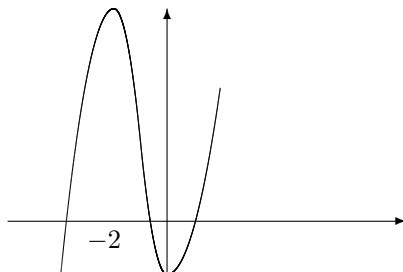
Risulta

$$f'(x) = \frac{x^2+x+1-(x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-x(x+2)}{(x^2+x+1)^2}$$

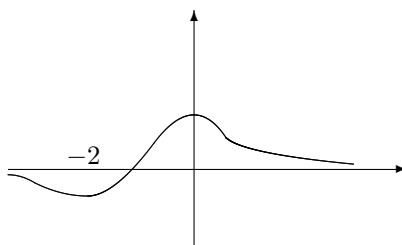
quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in (-2, 0)$. Il punto $x = -2$ é un punto di minimo relativo e il punto $x = 0$ é un punto di massimo relativo. Da notare che risulta $f(-2) = -1/3$ e $f(0) = 1$. Infine

$$f''(x) = -\frac{(2x+2)(x^2+x+1)^2 - (x^2+2x)2(x^2+x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^4} = \frac{2x^3+6x^2-2}{(x^2+x+1)^3}$$

Osserviamo che il segno della derivata seconda, essendo il denominatore sempre positivo, é determinato dal segno del numeratore che é un polinomio di terzo grado. Per studiare il segno di tale numeratore, indichiamolo con $g(x)$, ossia $g(x) = 2x^3 + 6x^2 - 2$ e facciamo un rapido studio di questa funzione. Risulta $g'(x) = 6x^2 + 12x = 6x(x+2)$ e quindi $g'(x) > 0$ se e solo se $x < -2$ o $x > 0$. Essendo $g(-2) > 0$ e $g(0) < 0$, otteniamo per la funzione g un grafico del tipo:



Ne deriva pertanto che la funzione g si annulla in tre punti: x_1, x_2, x_3 con $x_1 < -2$, $-1 < x_2 < 0$ e $0 < x_3 < 1$ e il segno della funzione g é quello indicato in figura. Pertanto la funzione f é convessa negli intervalli $[x_1, x_2]$ e $[x_3, +\infty)$ ed é concava negli intervalli $(-\infty, x_1]$ e $[x_2, x_3]$. Il grafico della funzione f é quindi del tipo:



6. Tracciare il grafico della funzione: $f(x) = x - \sqrt{4-x^2}$.

Dovendo essere $4-x^2 \geq 0$, il dominio della funzione é : $D = [-2, 2]$. Da notare inoltre che $f(-2) = -2$, $f(2) = 2$ e $f(0) = -2$. Inoltre:

$$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x > \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow x > 0 \text{ e } x^2 \geq 4-x^2 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{2}$$

Risulta inoltre:

$$f'(x) = 1 - \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \frac{\sqrt{4-x^2} + x}{\sqrt{4-x^2}}$$

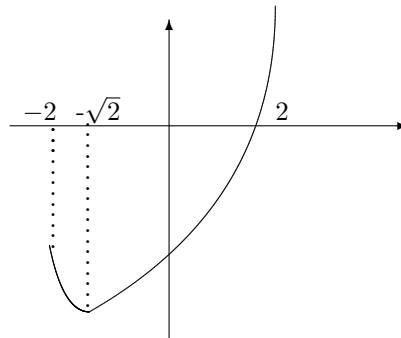
Pertanto

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2} \geq -x.$$

Notiamo ora che se $x \geq 0$ l'ultima disuguaglianza é sempre verificata, mentre se $x < 0$ l'ultima disuguaglianza si riduce a: $4-x^2 \geq x^2$ e quindi $-\sqrt{2} \leq x < 0$. Possiamo quindi concludere che $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq 2$. Il punto $-\sqrt{2}$ é quindi un punto di minimo relativo. Risulta infine:

$$f''(x) = \left(\sqrt{4-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \right) \frac{1}{4-x^2} = \frac{4}{(4-x^2)^{3/2}}$$

Pertanto la funzione considerata é convessa. Il grafico sará del tipo :



7. Tracciare il grafico della funzione:

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)(x+2)}$$

Il dominio di questa funzione é l'insieme $D = \{x \in \mathcal{R} ; x \neq -2, x \neq 1\}$. La funzione f é positiva negli intervalli $(-2, 0)$ e $(1, +\infty)$, mentre é negativa in $(-\infty, -2)$ e $(0, 1)$. Risulta inoltre:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{aligned}$$

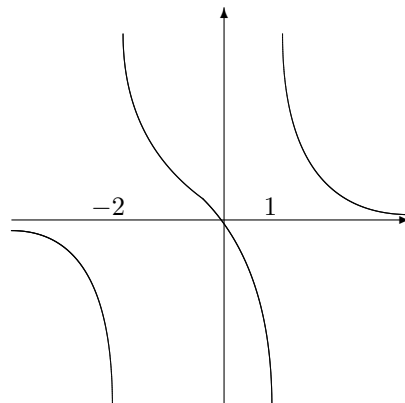
Calcolando la derivata prima si ha:

$$f'(x) = \frac{(x^2 + x - 2) - x(2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2} = -\frac{2 + x^2}{(x^2 + x - 2)^2}$$

Ne deriva che la derivata prima é sempre negativa. Risulta ora:

$$f''(x) = -\frac{2x(x^2 + x - 2)^2 - (2 + x^2)(2x + 1)2(x^2 + x - 2)}{(x^2 + x - 2)^4} = \frac{2(x^3 + 6x + 2)}{(x^2 + x - 2)^3}$$

Posto infine $g(x) = x^3 + 6x + 2$, osserviamo che $g'(x) = 3(x^2 + 2)$. Pertanto la funzione g é strettamente crescente e, siccome $g(-1) = -5$ e $g(0) = 2$, allora esiste un unico punto $x_0 \in (-1, 0)$ tale che $g(x) > 0$ se e solo se $x > x_0$. Ne deriva quindi che la funzione di partenza f é convessa negli intervalli $(-2, x_0)$ e $(1, +\infty)$ ed é concava negli intervalli $(-\infty, -2)$ e $(x_0, 1)$. Il grafico della funzione f é pertanto del tipo :



8. Tracciare il grafico della funzione: $f(x) = x - \sqrt{x(x-2)}$. Il dominio della funzione é: $D = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$. Risulta inoltre $f(0) = 0$, $f(2) = 2$ e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 2x)}{x + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 2/x}} = 1.$$

Calcoliamo ora la derivata prima. Si ha:

$$f'(x) = 1 - \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = 1 - \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

Pertanto $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x} \geq x-1$. Ora se $x < 1$ la disuguaglianza precedente é verificata, mentre se $x \geq 1$ la disuguaglianza precedente risulta equivalente alla disuguaglianza $x^2 - 2x \geq x^2 - 2x + 1$, e questa disuguaglianza non é vera. Possiamo concludere quindi che $f'(x) > 0$ se $x < 0$, mentre $f'(x) < 0$ se $x > 2$. Calcoliamo ora la derivata seconda:

$$f''(x) = - \left(\sqrt{x^2-2x} - (x-1) \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \right) \frac{1}{x^2-2x} = \frac{1}{\sqrt{x^2-2x}(x^2-2x)}$$

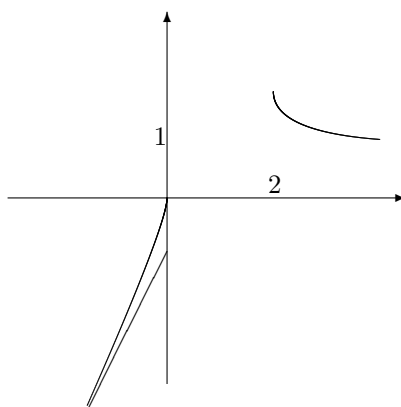
Ne deriva quindi che la derivata seconda é sempre positiva. Verifichiamo infine che la funzione ha un asintoto a $-\infty$. Infatti, ricordando che se $x < 0$ si ha $\sqrt{x^2} = -x$ si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + \sqrt{1 - 2/x}) = 2$$

ed inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - \sqrt{x^2-2x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-x + \sqrt{x^2-2x}} = -1$$

Pertanto la retta $y = 2x - 1$ é asintoto di f . Il grafico risulta quindi del tipo :



6.6 Regole di De l'Hospital

Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ due funzioni derivabili nell'intervallo $[a, b]$ e supponiamo che $x_0 \in (a, b)$ sia un punto tale che $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Allora se esiste il limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad (L \neq \pm \infty)$$

allora esiste anche il limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ed ha lo stesso valore. Pertanto, se esiste il secondo limite, possiamo scrivere che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Un teorema simile si può enunciare anche se, invece della forma indeterminata $\frac{0}{0}$, devo studiare una forma indeterminata del tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. In particolare :

Siano $x_0 \in (a, b)$ e $f, g : [a, b] - \{x_0\} \rightarrow R$ due funzioni derivabili. Supponiamo inoltre che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ (o } -\infty \text{) e che } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty \text{ (o } -\infty \text{)}$$

Allora se esiste il limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ (o } \pm\infty \text{)}$$

allora esiste anche il limite :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ed ha lo stesso valore. Pertanto , se esiste il secondo limite possiamo scrivere che :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

La stessa regola si può usare pure per calcolare limiti del tipo

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

sempre che tale limite sia della forma indeterminata $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
Consideriamo alcuni esempi.

- Calcolare :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \log(1+x)}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{\sin x + x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)(\sin x + x \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x)(\frac{\sin x}{x} + \cos x)} = \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

- Calcolare il :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{\log(1+x)(1-\cos x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\log(1+x)} \frac{x^2}{1-\cos x} \frac{\sin x - x}{x^3} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

7 INTEGRALE DI RIEMANN

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ una funzione limitata. Indichiamo con :

$$m = \inf\{f(x) ; x \in [a, b]\}$$

$$M = \sup\{f(x) ; x \in [a, b]\}$$

Chiameremo **partizione** dell'intervallo $[a, b]$ un numero finito di punti :

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

con $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Indicheremo infine con $\mathcal{P}$ l'insieme di tutte la partizioni dell'intervallo $[a, b]$.

Se $P, P' \in \mathcal{P}$, diremo che P' è più fine di P se $P \subset P'$.

Fissata una partizione $P \in \mathcal{P}$, indicheremo con :

$$m_i = \inf\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i = \sup\{f(x) ; x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

e porremo:

$$s(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1})$$

$s(f, P)$ e $S(f, P)$ vengono chiamate rispettivamente **somme integrale inferiore** e **somma integrale superiore** di f (relativamente alla partizione P). Dalla disuguaglianza:

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M$$

valida $\forall i = 1, 2, \dots, n$, si ricava la disuguaglianza:

$$m(b-a) \leq s(f, P) \leq S(f, P) \leq M(b-a)$$

Osserviamo che se $P, P' \in \mathcal{P}$ sono due partizione con P' più fine di P , allora:

$$s(f, P) \leq s(f, P')$$

$$S(f, P') \leq S(f, P)$$

Verifichiamo, per esempio, la prima disuguaglianza nel caso che P' si ottenga da P aggiungendo un punto:

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$P' = \{x_0, c, x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Indicato ora con:

$$m'_1 = \inf\{f(x) ; x \in [x_0, c]\}$$

$$m'_2 = \inf\{f(x) ; x \in [c, x_1]\}$$

risulta $m'_1 \geq m_1$ e $m'_2 \geq m_1$ (dove ricordiamo $m_1 = \inf\{f(x) ; x \in [x_0, x_1]\}$) e quindi:

$$s(f, P') - s(f, P) = m'_1 (c - x_0) + m'_2 (x_1 - c) - m_1 (x_1 - x_0) \geq 0$$

D'altra parte se $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ sono due partizioni generiche di $[a, b]$, la partizione $P_1 \cup P_2$ è più fine sia di P_1 che di P_2 , ne deriva quindi che:

$$s(f, P_1) \leq s(f, P_1 \cup P_2) \leq S(f, P_1 \cup P_2) \leq S(f, P_2)$$

Pertanto se poniamo:

$$A = \{s(f, P) \mid P \in \mathcal{P}\}$$

$$B = \{S(f, P) \mid P \in \mathcal{P}\}$$

otteniamo una coppia di sottoinsiemi di $\mathcal{R}$ separata. Ne deriva quindi che:

$$\sup A \leq \inf B$$

Definizione 7.1 Noi diremo che una funzione limitata f è **integrabile (secondo Riemann)** nell'intervallo $[a, b]$ se:

$$\sup A = \inf B$$

In tal caso, il valore comune verrà chiamato **integrale (definito)** della funzione f nell'intervallo $[a, b]$ ed indicato col simbolo :

$$\int_a^b f(x) dx$$

Dalla definizione si ricava che:

una funzione limitata f è integrabile in un intervallo $[a, b]$ se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists P_\varepsilon \in \mathcal{P} \text{ tale che } S(f, P_\varepsilon) - s(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$$

Indicheremo con $\mathcal{R}([a, b])$ l'insieme delle funzioni che sono integrabili (secondo Riemann). Alcune proprietà di $\mathcal{R}([a, b])$ sono le seguenti:

1. **Linearità dell'integrale** Se $f_1, f_2 \in \mathcal{R}([a, b])$, allora $f_1 + f_2 \in \mathcal{R}([a, b])$ e vale la formula:

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$$

Inoltre se $f \in \mathcal{R}([a, b])$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $\lambda f \in \mathcal{R}([a, b])$ e vale la formula:

$$\int_a^b (\lambda f(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

2. **Proprietà additiva dell'integrale** Se $f \in \mathcal{R}([a, b])$ e $c \in (a, b)$, allora $f \in \mathcal{R}([a, c]) \cap \mathcal{R}([c, b])$ e vale la formula:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

3. **Monotonia dell'integrale** Se $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$ e $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$, allora:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

4. **Integrabilità del modulo** Se $f \in \mathcal{R}([a, b])$, allora $|f| \in \mathcal{R}([a, b])$, e vale la disegauaglianza:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

5. **Teorema della media integrale** Sia $f \in \mathcal{R}([a, b])$, indichiamo con:

$$m = \inf\{f(x) ; x \in [a, b]\}$$

$$M = \sup\{f(x) ; x \in [a, b]\}$$

Allora vale la disuguaglianza:

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M$$

Il quoziente che compare nella disuguaglianza precedente viene chiamato **la media integrale** di f (sull'intervallo $[a, b]$). Da notare che la media integrale è l'altezza che deve avere un rettangolo la cui base sia l'intervallo $[a, b]$ in modo che la sua area sia uguale all'integrale $\int_a^b f(x) dx$.

Se supponiamo che la funzione f oltre che integrabile sia anche continua nell'intervallo $[a, b]$, allora per il teorema dei valori assunti, esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che:

$$\frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = f(c)$$

6. **Integrabilità delle funzioni continue** Se f è una funzione continua nell'intervallo $[a, b]$, allora f è integrabile in tale intervallo.

7. **Integrabilità delle funzioni monotone** Se f è una funzione monotona nell'intervallo $[a, b]$, allora f è integrabile in tale intervallo.

8. **Integrabilità delle funzioni continue a tratti** Se f è una funzione limitata ed ha nell'intervallo $[a, b]$ un numero finito di punti di discontinuità, allora f è integrabile in tale intervallo.

7.1 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f \in \mathcal{R}([a, b])$, consideriamo la funzione $F : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ definita dalla seguente legge :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad x \in [a, b]$$

La funzione F viene chiamata la **funzione integrale** di f . Vale il seguente importante:

Teorema 7.1 Teorema fondamentale del calcolo integrale Se $f \in \mathcal{R}([a, b])$ è continua nell'intervallo $[a, b]$, allora la funzione F è derivabile nell'intervallo $[a, b]$ e :

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Dimostrazione. Siano $x_0, x \in [a, b]$ con $x_0 < x$, usando la proprietà additiva dell'integrale, si ottiene :

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt}{x - x_0} = \\ &= \frac{\int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt}{x - x_0} = \frac{\int_{x_0}^x f(t) dt}{x - x_0} \end{aligned}$$

Applicando infine il teorema della media integrale alla funzione f nell'intervallo $[x_0, x]$ (ricordare che stiamo supponendo f continua), si ottiene l'esistenza di un punto $c_x \in (x_0, x)$ tale che:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(c_x)$$

D'altra parte se x tende a x_0 anche c_x tende a x_0 ed essendo f continua in x_0 , si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(c_x) = f(x_0) .$$

q.e.d.

7.2 Formula fondamentale del calcolo integrale

Data una funzione $f : [a, b] \rightarrow R$, una funzione $G : [a, b] \rightarrow R$ si dice una **primitiva** di f se G é derivabile e risulta :

$$G'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

Vale il seguente :

Teorema 7.2 Formula fondamentale del calcolo integrale Sia $f : [a, b] \rightarrow R$ una funzione continua e G una sua primitiva. Allora :

$$\int_a^b f(x) \, dx = G(b) - G(a)$$

Dimostrazione. Ricordando il teorema fondamentale del calcolo integrale, abbiamo che la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$ e la funzione G hanno la stessa derivata, infatti :

$$F'(x) = f(x) = G'(x)$$

Allora F e G differiscono per una costante, ossia

$$F(x) = G(x) + k \quad \forall x \in [a, b]$$

In particolare :

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) \, dx$$

q.e.d.

7.3 Alcune primitive immediate

Elenchiamo di seguito alcune primitive immediate.

- $f(x) = \sin x$ ha come primitiva $G(x) = -\cos x$, $f(x) = \cos x$ ha come primitiva $G(x) = \sin x$;
- $f(x) = e^x$ ha come primitiva $G(x) = e^x$;
- $f(x) = x^\alpha$ con $x > 0$ e $\alpha \in \mathcal{R}$, allora:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} & \text{se } \alpha + 1 \neq 0 \\ \log x & \text{se } \alpha + 1 = 0 \end{cases}$$

- Da notare che se considero la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$), allora la funzione $G(x) = \log |x|$ ($x \neq 0$) é una primitiva di f ;
- la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ha come primitiva $G(x) = \arctan x$;

- la funzione

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

ha una primitiva che si può calcolare nel seguente modo. Sommando e sottraendo 1 a numeratore, ottengo :

$$f(x) = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

Allora una primitiva di f é : $G(x) = x - \log |x+1|$;

- la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$$

con $a \neq 0$ ha la seguente primitiva. Raccogliendo a^2 si ottiene :

$$f(x) = \frac{1}{a^2} \frac{1}{1 + (\frac{x}{a})^2}$$

Pertanto $G(x) = \frac{1}{a} \arctan(\frac{x}{a})$.

7.4 Integrali per decomposizione

Vediamo, in questo paragrafo, come si calcola una primitiva di una funzione razionale del tipo:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dove Q è un polinomio di secondo grado del tipo $Q(x) = x^2 + bx + c$.

Primo caso Supponiamo che il polinomio a denominatore abbia $\Delta = b^2 - 4c > 0$, così che il polinomio si può decomporre in $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)$ con

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Nel caso che $P(x)$ sia un polinomio di primo grado (ad esempio $P(x) = \alpha x + \beta$), allora la funzione f si può decomporre nel seguente modo:

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + bx + c} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2}$$

dove A, B son due opportuni numeri reali che si ottengono osservando che:

$$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{x - x_2} = \frac{A(x - x_2) + B(x - x_1)}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{(A + B)x - Ax_2 - Bx_1}{x^2 + bx + c}$$

e quindi se voglio che valga la decomposizione deve essere:

$$\begin{cases} A + B = \alpha \\ -Ax_2 - Bx_1 = \beta \end{cases}$$

Si tratta quindi di risolvere questo sistema. Trovate A e B , una primitiva della funzione f é del tipo :

$$G(x) = A \log|x - x_1| + B \log|x - x_2|$$

Nel caso che $P(x)$ sia un polinomio di grado ≥ 2 , allora dividendo il polinomio $P(x)$ per il polinomio $Q(x)$, si ottiene:

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$$

dove $R(x)$ é un polinomio di grado minore o uguale a uno. Pertanto in questo caso:

$$f(x) = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

e quindi posso procedere come nel caso precedente. Vediamo per concludere alcuni esempi.

1. Sia

$$f(x) = \frac{x + 1}{(x - 1)(x + 4)}$$

Risulta:

$$\frac{x+1}{(x-1)(x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+4} = \frac{A(x+4) + B(x-1)}{(x-1)(x+4)}$$

Pertanto deve essere

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 4A-B=1 \end{cases}$$

Sommando le due equazioni ottengo $5A=2$ ossia $A=\frac{2}{5}$ e quindi $B=1-A=\frac{3}{5}$. Ne deriva che una primitiva di f è data da:

$$G(x) = \frac{2}{5} \log|x-1| + \frac{3}{5} \log|x+4|$$

2. Sia

$$f(x) = \frac{x^3+x+1}{x^2-1}$$

Facendo la divisione tra i due polinomi, si ha:

$$\frac{x^3+x+1}{x^2-1} = x + \frac{2x+1}{x^2-1}$$

D'altra parte:

$$\frac{2x+1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{x^2-1}$$

Abbiamo quindi:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ 4A-B=1 \end{cases}$$

Se ne ricava quindi che $A=3/2$ e $B=1/2$. Pertanto una primitiva di f è data da:

$$G(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \log|x-1| + \frac{1}{2} \log|x+1|$$

Secondo caso Vediamo come si calcola una primitiva di una funzione razionale con denominatore un polinomio di secondo grado del tipo $Q(x) = x^2 + bx + c$ con $\Delta = b^2 - 4c \leq 0$ e il numeratore è un polinomio di primo grado del tipo $P(x) = \alpha x + \beta$.

Consideriamo in primo luogo il caso in cui $\Delta = 0$. In tal caso Q è un quadrato, infatti essendo $b^2 = 4c$, risulta:

$$Q(x) = x^2 + bx + c = Q(x) = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = (x - x_1)^2$$

dove abbiamo posto $x_1 = -\frac{b}{2}$. Consideriamo ora la decomposizione del tipo:

$$\frac{\alpha x + \beta}{x^2 + bx + c} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2}$$

Per ricavare A e B , procediamo come nel primo caso considerato, ossia:

$$\frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2} = \frac{A(x - x_1) + B}{(x - x_1)^2} = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + bx + c}$$

se e solo se A e B verificano il sistema:

$$\begin{cases} A = \alpha \\ -Ax_1 + B = \beta \end{cases}$$

Una primitiva della funzione f è data dunque in questo caso da

$$G(x) = A \log|x - x_1| - \frac{B}{x - x_1}$$

Consideriamo infine il caso in cui sia $\Delta < 0$. Completando il quadrato, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = \\ &= \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4} = \frac{-\Delta}{4} \left[1 + \left(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Pertanto ottengo

$$\frac{1}{Q(x)} = -\frac{4}{\Delta} \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)^2}$$

Possiamo quindi concludere che una primitiva di $\frac{1}{Q}$ è data dalla funzione

$$-\frac{4}{\Delta} \arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)$$

Scriviamo infine f nel modo seguente

$$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + bx + c} = \frac{\alpha}{2} \frac{2x+b}{x^2 + bx + c} + \left(\frac{2\beta - \alpha b}{2}\right) \frac{1}{x^2 + bx + c}$$

e ricordando quanto detto sopra, possiamo concludere che una primitiva di f è data dalla funzione:

$$G(x) = \frac{\alpha}{2} \log(x^2 + bx + c) + \frac{(2\beta - \alpha b)}{\sqrt{-\Delta}} \arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-\Delta}}\right)$$

Consideriamo ora alcuni esempi.

1. Calcolare una primitiva della funzione:

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 2x + 1}$$

Il polinomio a denominatore ha $\Delta = 0$ e quindi è un quadrato. In particolare $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, cerchiamo allora una decomposizione del tipo :

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1) + B}{x^2 + 2x + 1}$$

Deve quindi essere

$$\begin{cases} A = 1 \\ A + B = -1 \end{cases}$$

Si ottiene quindi $B = -2$. Pertanto:

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

Allora una primitiva di f è data da :

$$G(x) = \log|x+1| + \frac{2}{x+1}$$

2. Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{x+3}{x^2 + 2x + 2}$$

Il polinomio di secondo grado a denominatore ha Δ negativo. Il primo passo consiste nel far comparire a numeratore la derivata del denominatore. Ossia :

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \frac{2}{x^2+2x+2}$$

Osservo ora che, completando il quadrato, posso scrivere:

$$x^2 + 2x + 2 = 1 + (x+1)^2$$

In conclusione ottengo la decomposizione :

$$\frac{x+3}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+2} + \frac{2}{1+(x+1)^2}$$

Posso concludere che una primitiva di f é :

$$G(x) = \frac{1}{2} \log(x^2+2x+2) + 2 \arctan(x+1)$$

3. Calcolare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$$

Completando il quadrato, posso scrivere:

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{4}{3} \left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{3}{4} \left(1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$$

Ne deriva quindi che :

$$\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{4}{3} \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

Possiamo quindi concludere che una primitiva é del tipo :

$$G(x) = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

4. Calcolare una primitiva della funzione:

$$f(x) = \frac{x^4+x^2+x+1}{x^2+x+2}$$

Essendo il grado del denominatore piú grande del grado del numeratore, facciamo in primo luogo la divisione dei due polinomi. Risulta :

$$x^4+x^2+x+1 = (x^2+x+2)(x^2-x) + 3x+1$$

e quindi:

$$\frac{x^4+x^2+x+1}{x^2+x+2} = x^2-x + \frac{3x+1}{x^2+x+2}$$

Ricordando ora che :

$$x^2+x+2 = (x+1/2)^2 + 7/4 = \frac{7}{4} \left(1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2\right)$$

ottengo

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - x + \frac{3}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+2} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2+x+2} = \\ &= x^2 - x + \frac{3}{2} \frac{2x+1}{x^2+x+2} - \frac{4}{14} \frac{1}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)^2} \end{aligned}$$

Posso quindi concludere che una primitiva di f é data da:

$$G(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \log(x^2+x+2) - \frac{1}{\sqrt{7}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\right)$$

7.5 Formula di integrazione per parti

Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ due funzioni derivabili in $[a, b]$ con derivata prima continua. Dalla formula di derivazione del prodotto, ottengo:

$$(f g)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$

Integrando tale relazione su $[a, b]$ e ricordando che:

$$\int_a^b (f g)'(x) dx = f(b) g(b) - f(a) g(a)$$

ottengo la seguente:

Formula di integrazione per parti

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b f(x) g'(x) dx = f g \Big|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

Vediamo ora alcuni esempi.

1. Calcolare l'integrale

$$\int_0^\pi x \sin x dx$$

Scegliendo $g(x) = x$ e $f'(x) = \sin x$ (e quindi $f(x) = -\cos x$), ottengo:

$$\int_0^\pi x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = \pi .$$

2. - Trovare una primitiva della funzione $f(x) = \arctan x$. Scegliendo $f'(x) = 1$ e $g(x) = \arctan x$, ottengo:

$$\int_0^x \arctan t dt = t \arctan t \Big|_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt = x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2) .$$

3. Calcolare

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx$$

Risulta :

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx = \int_0^\pi \sin x \sin x dx = -\cos x \sin x \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 x dx = \int_0^\pi (1 - \sin^2 x) dx$$

Ne deriva quindi che:

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}$$

Da notare che l'integrale ora calcolato, poteva essere calcolato in modo diverso usando la formula di trigonometria:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Infatti usando tale formula si ottiene:

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx = \int_0^\pi \frac{1}{2} dx - \int_0^\pi \frac{\cos(2x)}{2} dx = \left(\frac{1}{2} x - \frac{\sin(2x)}{4} \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2} .$$

4. Calcolare $\int_0^1 \log(1+x^2) dx$. Risulta :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \log(1+x^2) dx &= x \log(1+x^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x \cdot 2x}{1+x^2} dx = \log 2 - 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \\ &= \log 2 - 2 + 2 \arctan 1 = \log 2 - 2 + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

5. Calcolare $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx$. Risulta :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx &= \int_0^{\pi/2} \cos x \cos^2 x \, dx = \sin x \cos^2 x \Big|_0^{\pi/2} + 2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, dx = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} (\cos x - \cos^3 x) \, dx \end{aligned}$$

e quindi :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx = \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \frac{2}{3}$$

6. Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = \log x$. Calcoliamo per esempio :

$$F(x) = \int_1^x \log t \, dt = t \log t \Big|_1^x - \int_1^x dt = x \log x - x + 1 = x(\log x - 1) + 1$$

7. Calcolare l'integrale:

$$\int_0^1 x \log(x^2 + x + 1) \, dx$$

Integrando per parti, ottengo:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \log(x^2 + x + 1) \, dx &= \frac{x^2}{2} \log(x^2 + x + 1) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \frac{2x+1}{x^2+x+1} \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x^3 + x^2}{x^2 + x + 1} \, dx \end{aligned}$$

D'altra parte, facendo la divisione dei due polinomi che compaiono nell'integrale, ottengo

$$\frac{2x^3 + x^2}{x^2 + x + 1} = 2x - 1 + \frac{-x + 1}{x^2 + x + 1}$$

Allora:

$$\int_0^1 x \log(x^2 + x + 1) \, dx = \frac{1}{2} \log 3 - \frac{1}{2} \left(x^2 - x \Big|_0^1 \right) + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{-x + 1}{x^2 + x + 1} \, dx$$

Applicando infine la formula ottenuta sopra, posso concludere che:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \log(x^2 + x + 1) \, dx &= \frac{1}{2} \log 3 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \log(x^2 + x + 1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \Big|_0^1 \right) = \\ &= \frac{3}{4} \log 3 + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\arctan \sqrt{3} - \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

7.6 Formula di integrazione per sostituzione

Teorema 7.3 Formula di integrazione per sostituzione Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathcal{R}$ una funzione continua e sia $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ una funzione derivabile con derivata prima continua. Supponiamo che $\varphi(\alpha) = a$ e che $\varphi(\beta) = b$. Allora vale la formula :

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt$$

Dimostrazione. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale, la funzione integrale $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ é derivabile e risulta $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a, b]$. Consideriamo ora la funzione :

$$H(t) = F(\varphi(t)) ; t \in [\alpha, \beta]$$

Derivando ottengo:

$$H'(t) = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

e quindi integrando sull'intervallo $[\alpha, \beta]$, ottengo:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} H'(t) dt = H(\beta) - H(\alpha) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

q.e.d.

Vediamo ora alcuni esempi.

1. Calcolare

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Usando la sostituzione $x = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$, ottengo:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{\pi}{4}$$

2. Calcolare

$$\int_0^1 x \sqrt{4-x} dx$$

Ponendo $4-x=t$, ottengo :

$$\int_0^1 x \sqrt{4-x} dx = - \int_4^3 (4-t) \sqrt{t} dt = \int_3^4 4 t^{1/2} dt - \int_3^4 t^{3/2} dt = \left(4 \frac{2}{3} t^{3/2} - \frac{2}{5} t^{5/2} \right) \Big|_3^4$$

3. Calcolare

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$$

Usiamo la sostituzione $x = \sinh t$. Risulta $\alpha = 0$. Per ricavare β devo risolvere l'equazione

$$1 = \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{ossia} \quad e^t - \frac{1}{e^t} = 2$$

Posto $y = e^t$, ottengo l'equazione di secondo grado $y^2 - 2y - 1 = 0$ che ha le soluzioni $y = 1 \pm \sqrt{2}$. Risulta dunque $t = \beta = \log(1 + \sqrt{2})$. Possiamo quindi concludere che :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx &= \int_0^{\beta} \sqrt{1+\sinh^2 t} \cosh t dt = \int_0^{\beta} \cosh^2 t dt = \\ &= \int_0^{\beta} \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2}{4} dt = \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{-2t}}{2} + 2t \right) \Big|_0^{\beta} \end{aligned}$$

4. Da notare che l'integrale precedente si poteva calcolare anche integrando per parti. Infatti :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx &= x \sqrt{1+x^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = x \sqrt{1+x^2} \Big|_0^1 - \\ &- \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \end{aligned}$$

Possiamo allora concludere che :

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{1+x^2} + \log \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) \right) \Big|_0^1$$

5. Mostriamo infine un ulteriore modo per calcolare lo stesso integrale. Consideriamo la sostituzione

$$\sqrt{1+x^2} = t - x$$

ossia $1+x^2 = t^2 - 2tx + x^2$ o

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t}$$

Otteniamo allora :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx &= \int_1^{1+\sqrt{2}} \left(t - \frac{t^2-1}{2t} \right) \frac{1}{2} \frac{2t^2 - t^2 + 1}{t^2} dt = \frac{1}{4} \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{t^4 + 2t^2 + 1}{t^3} dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_1^{1+\sqrt{2}} \left(t + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \frac{1}{4} \left(\frac{t^2}{2} + 2 \log |t| - \frac{1}{2t^2} \right) \Big|_1^{1+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

6. Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \sqrt{1+x+x^2} dx$$

Essendo

$$1+x+x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \left(1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$$

con la sostituzione : $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = t$ ossia $x = \frac{\sqrt{3}t-1}{2}$, ottengo:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x+x^2} dx = \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1+t^2} \frac{\sqrt{3}}{2} dt = \frac{3}{4} \frac{1}{2} \left(t \sqrt{1+t^2} + \log(t + \sqrt{1+t^2}) \right) \Big|_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}$$

7. Calcolare l'integrale

$$\int_0^2 \sqrt{x(2-x)} dx$$

Notiamo che:

$$x(2-x) = 2x - x^2 = -(x-1)^2 + 1$$

e quindi se pongo $x-1 = t$, ottengo:

$$\int_0^2 \sqrt{x(2-x)} dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{2}$$

8. Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x} dx$$

Ricordando la formula di trigonometria:

$$\sin x = 2 \sin(x/2) \cos(x/2) = \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan^2(x/2)}$$

consideriamo la sostituzione $\tan(x/2) = t$ ossia $x = 2 \arctan t$. Otteniamo:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = 2 \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} = -\frac{2}{t+1} \Big|_0^1 = 1$$

9. Calcolare l'integrale

$$\int_1^2 \sqrt{x^2 - 1} \, dx$$

Usiamo la sostituzione $\sqrt{x^2 - 1} = t - x$, ossia $x^2 - 1 = x^2 - 2tx + t^2$ e quindi $x = \frac{t^2+1}{2t}$. Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{x^2 - 1} \, dx &= \int_1^{2+\sqrt{3}} \left(t - \frac{t^2+1}{2t} \right) \frac{1}{2} \frac{2t^2 - t^2 - 1}{t^2} dt = \frac{1}{4} \int_1^{2+\sqrt{3}} \frac{(t^2 - 1)^2}{t^3} dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_1^{2+\sqrt{3}} \left(t - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \frac{1}{4} \left(\frac{t^2}{2} - 2 \log |t| - \frac{1}{2t^2} \right) \Big|_1^{2+\sqrt{3}} \end{aligned}$$

10. Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \, dx$$

Usando la sostituzione $x = 2 \sin t$, ottengo:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} \, dx &= \int_0^{\pi/6} \frac{4 \sin^2 t}{2 \cos t} 2 \cos t \, dt = \int_0^{\pi/6} 4 \sin^2 t \, dt = \\ &= 2 \int_0^{\pi/6} (1 - \cos(2t)) \, dt = 2 \left(t - \frac{\sin(2t)}{2} \right) \Big|_0^{\pi/6} \end{aligned}$$

11. Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} \sin(3x) \cos(5x) \, dx$$

Notiamo che sommando le due formule trigonometriche

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

si ottiene :

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

Ne deriva quindi che:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(3x) \cos(5x) \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} (\sin(8x) - \sin(2x)) \, dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos(8x)}{8} + \frac{\cos(2x)}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2}$$

12. Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{1-e^x}{1+e^x} \, dx$$

Usando la sostituzione $e^x = t$, ossia $x = \log t$, ottengo:

$$\int_0^1 \frac{1-e^x}{1+e^x} \, dx = \int_1^2 \frac{1-t}{1+t} \frac{1}{t} \, dt$$

D'altra parte

$$\frac{1-t}{1+t} \frac{1}{t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A(1+t) + Bt}{t(1+t)}$$

e si ricava che deve essere $A = 1$ e da $A + B = -1$ si ottiene $B = -2$. Ne deriva quindi che

$$\int_0^1 \frac{1-e^x}{1+e^x} \, dx = \int_1^e \left(\frac{1}{t} - \frac{2}{1+t} \right) \, dt = (\log |t| - 2 \log |1+t|) \Big|_1^e$$

13. Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\pi/2} x \sin^2 x \, dx$$

Integrando per parti si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \sin^2 x \, dx &= \int_0^{\pi/2} \sin x (x \sin x) \, dx = -\cos x x \sin x \Big|_0^{\pi/2} + \\ &+ \int_0^{\pi/2} \cos x (\sin x + x \cos x) \, dx = -\cos x (x \sin x) \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \sin x \, dx + \int_0^{\pi/2} x \cos^2 x \, dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos x \sin x \, dx + \int_0^{\pi/2} x (1 - \sin^2 x) \, dx \end{aligned}$$

Se ne ricava che

$$\int_0^{\pi/2} x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} (\sin^2 x + x^2) \Big|_0^{\pi/2}$$

7.7 Alcuni esercizi di ripasso

1. Calcolare il :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \arctan x}$$

Applicando la regola di De l'Hospital, ottengo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \arctan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{\arctan x + \frac{x}{1+x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\frac{1}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}} = 0 \end{aligned}$$

2. Calcolare :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\log \cos x}{x^2}}$$

Considerando solo l'esponente si ha :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

3. Calcolare:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{x^2} - \frac{1}{1 - \cos x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x) - x^2}{x^2(1 - \cos x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - 2x}{2x(1 - \cos x) + x^2 \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos x - 1)}{2(1 - \cos x) + 4x \sin x + x^2 \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2(\cos x - 1)}{x^2}}{\frac{2(1 - \cos x)}{x^2} + 4 \frac{\sin x}{x} + \cos x} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

4. Calcolare :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1+x^3}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x^3}} \right) = \left(y = \frac{1}{x} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+y^2} - \sqrt[3]{1+y^3}}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} - \frac{y^2}{(\sqrt[3]{1+y^3})^2}}{2y} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

5. Dire, al variare di $\lambda \in \mathcal{R}$, quante soluzioni ha l'equazione

$$e^x = \lambda x .$$

Ovviamente se $\lambda = 0$, l'equazione non ha nessuna soluzione. Se $\lambda \neq 0$, possiamo scrivere l'equazione nella forma:

$$x e^{-x} = \frac{1}{\lambda}$$

Se studiamo la funzione

$$f(x) = x e^{-x}$$

e ne disegniamo il grafico, potremo determinare il numero di soluzioni dell'equazione dal numero di intersezioni che il grafico di f ha con la retta orizzontale di equazione $y = \frac{1}{\lambda}$.

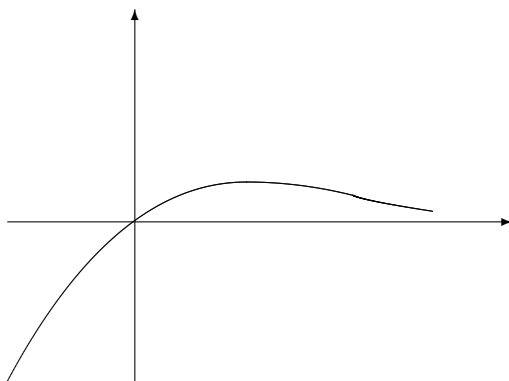
Il dominio della funzione f é $D = \mathcal{R}$ e risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

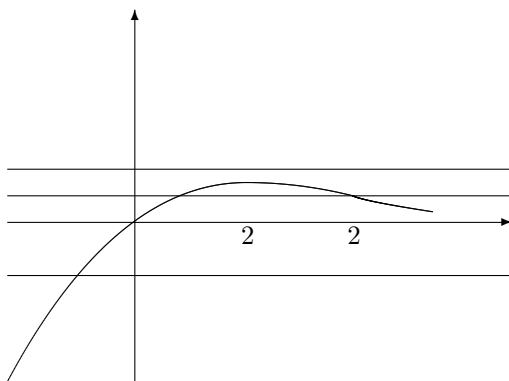
Inoltre $f(x) > 0$ se e solo se $x > 0$ e $f(0) = 0$. Derivando si ottiene:

$$f'(x) = e^{-x} (1 - x)$$

e quindi $f'(x) > 0$ se e solo se $x < 1$. Pertanto il punto $x = 1$ é un punto di massimo relativo e $f(1) = \frac{1}{e}$. Infine $f''(x) = e^{-x} (-1 - 1 + x) = e^{-x} (x - 2)$ e quindi la funzione f é convessa se e solo se $x > 2$. Il grafico della funzione f dunque é del tipo.



Visto il grafico di f e ricordando che l'equazione da considerare é $f(x) = \frac{1}{\lambda}$, possiamo concludere che (vedi anche il disegno):



- i) - se $\lambda < 0$, l'equazione ha una unica soluzione (negativa);
- ii) - se $0 < \frac{1}{\lambda} < \frac{1}{e}$, ossia se $\lambda > e$, allora l'equazione ha due soluzioni;
- iii) - se $\lambda = e$, allora l'equazione ha una soluzione ($x = 1$);
- iv) - se $\frac{1}{\lambda} > \frac{1}{e}$, ossia se $0 < \lambda < e$, allora l'equazione non ha nessuna soluzione.

6. Studiare il grafico della funzione :

$$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$$

Il dominio della funzione è $D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$. La funzione è dispari e risulta $f(x) > 0$ se $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, mentre $f(x) < 0$ se $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$. Risultano pure immediati i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

Calcoliamo ora la derivata prima, si ha :

$$f'(x) = \frac{3x^2(1-x^2) + x^3 2x}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

Pertanto $f'(x) > 0$ se e solo se $3-x^2 > 0$ ossia $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, $x \neq 0$. Allora $x = \sqrt{3}$ è un punto di massimo relativo, mentre $x = -\sqrt{3}$ è un punto di minimo relativo. Calcoliamo infine la derivata seconda.

$$f''(x) = \frac{(6x-4x^3)(1-x^2)^2 + (3x^2-x^4)2(1-x^2)2x}{(1-x^2)^4} = \frac{x(6+x^2)}{(1-x^2)^3}$$

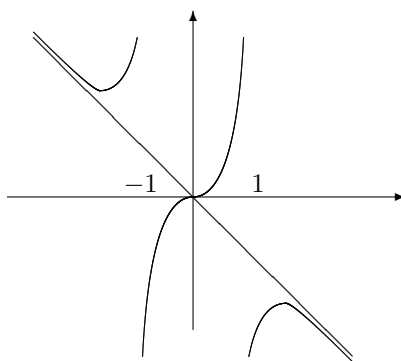
Pertanto la funzione è convessa negli intervalli $(-\infty, -1)$ e $(0, 1)$ ed è concava negli intervalli $(-1, 0)$ e $(1, +\infty)$. Osserviamo infine che :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

e che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) + x) = 0$$

Pertanto la retta di equazione $y = -x$ è asintoto di f sia a $+\infty$ che a $-\infty$. Il grafico quindi è del tipo:



7. Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} \cos x - 1 - x}{x^3}$$

Applicando le regole di De l'Hospital, ottengo:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} \cos x - 1 - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} (\cos^2 x - \sin x) - 1}{3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} (\cos^3 x - 3 \sin x \cos x - \cos x)}{6x} = \\ &= \frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} \left[\cos x \frac{\cos^2 x - 1}{x} - 3 \cos x \frac{\sin x}{x} \right] = \frac{1}{6} \cdot 1[1 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 1] = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

8. Calcolare l'integrale:

$$\int_0^x e^t \sin t \, dt$$

Integrando per parti, ottengo:

$$\begin{aligned}\int_0^x e^t \sin t \, dt &= e^t \sin t \Big|_0^x - \int_0^x e^t \cos t \, dt = \\ &= e^x \sin x - \left[e^t \cos t \Big|_0^x + \int_0^x e^t \sin t \, dt \right] = e^x \sin x - e^x \cos x + 1 - \int_0^x e^t \sin t \, dt\end{aligned}$$

Se ne ricava che

$$\int_0^x e^t \sin t \, dt = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}$$

9. Calcolare l'integrale:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} \, dx$$

Usando la sostituzione $\tan(x/2) = t$, ottengo:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x} \, dx = \int_{\tan(\pi/8)}^1 \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} \, dt = \int_{\tan(\pi/8)}^1 \frac{1}{t} \, dt = -\log(\tan(\pi/8))$$

10. Calcolare l'integrale:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{1 - \sin x} \, dx$$

Sempre usando la sostituzione $\tan(x/2) = t$, ottengo:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{1 - \sin x} \, dx = \int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{2t}{(1+t^2)(1-\frac{2t}{1+t^2})} \frac{2}{1+t^2} \, dt = \int_0^{\tan(\pi/8)} \frac{4t}{(1+t^2)(t-1)^2} \, dt$$

Per proseguire devo trovare una decomposizione del tipo:

$$\frac{4t}{(1+t^2)(t-1)^2} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{(t-1)^2}$$

Deve quindi essere :

$$(At+B)(t^2-2t+1) + C(1+t^2)(t-1) + D(1+t^2) = 4t$$

Otengo quindi il sistema :

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -2A+B-C+D=0 \\ A-2B+C=0 \\ B-C+D=0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $A = C = 0, B = -2, D = 2$. Pertanto :

$$\frac{4t}{(1+t^2)(t-1)^2} = \frac{-2}{1+t^2} + \frac{2}{(t-1)^2}$$

Posso quindi concludere che

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{1 - \sin x} dx = -2 \arctan t - \frac{2}{t-1} \Big|_0^{\tan(\pi/8)}$$

11. Studiare il grafico della funzione :

$$f(x) = \arctan\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Il dominio della funzione é $D = \{x \in R ; x \neq 0\}$, la funzione è dispari e quindi basta studiarla per $x > 0$. Risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \quad e \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

Derivando , si ha :

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + (x + 1/x)^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + (x^2 + 1)^2}$$

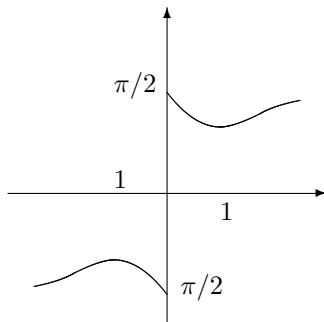
Pertanto $f'(x) > 0$ se e solo se $x > 1$. Pertanto il punto $x = 1$ è un punto di minimo relativo per f .Calcoliamo anche la derivata seconda :

$$f''(x) = \frac{2x[x^2 + (x^2 + 1)^2] - (x^2 - 1)(2x + 4x(x^2 + 1))}{(x^2 + (x^2 + 1)^2)^2}$$

Prendendo in esame solo il numeratore $n(x)$, si ottiene :

$$n(x) = -2x^5 + 4x^3 + 8x = -2x(x^4 - 2x^2 - 4)$$

Ne deriva che $f''(x) > 0$ solo se $0 < x < \sqrt{1 + \sqrt{5}}$. Pertanto il punto $x = \sqrt{1 + \sqrt{5}}$ é un flesso per f . Il grafico risulta quindi essere del tipo :



12. Calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x \log(1+x)}$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \arctan x}{x \log(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \frac{1}{1+x^2}}{\log(1+x) + \frac{x}{1+x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x + \frac{2x}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2}} = 0 \end{aligned}$$

13. Calcolare l'integrale:

$$\int_0^1 \arcsin x \, dx$$

Integrando per parti ottengo:

$$\int_0^1 \arcsin x \, dx = x \arcsin x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \arcsin x + (1-x^2)^{1/2} \Big|_0^1$$

7.8 Esercizi proposti

1. Studiare il grafico delle funzioni:

a) $f(x) = 2 \cos x - \cos(2x)$

b) $f(x) = \frac{\log|x|}{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{2-x}$

2. Calcolare i limiti:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^3} - \sqrt{1-x^3}}{x \tan x \log(1+x)}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2(e^x - 1 - x)}{x^3} - \frac{1}{x} \right]$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x - \sin x}{x \tan x}$

3. Calcolare gli integrali:

a) $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx$

b) $\int_2^3 x \log(x^2 + x - 2) \, dx$

7.9 Soluzioni degli esercizi proposti nel paragrafo 8.10

Esercizio 1-a) Tracciare il grafico della funzione $f(x) = 2 \cos x - \cos 2x$. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, è periodica di periodo 2π ed è pari ossia $f(-x) = f(x)$. Possiamo quindi studiarla solo nell'intervallo $[0, \pi]$. Osserviamo inoltre che :

$$f(x) = 2 \cos x - \cos^2 x + \sin^2 x = 2 \cos x - 2 \cos^2 x + 1.$$

Risulta quindi che $f(x) = 0$ se e solo se $\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$. Ricordando che la soluzione $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ va scartata essendo > 1 , si ottiene :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \alpha = \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)$$

Osserviamo infine che $f(0) = 1$, $f(\pi/2) = 1$ e $f(\pi) = -3$. Calcoliamo ora la derivata prima. Si ha:

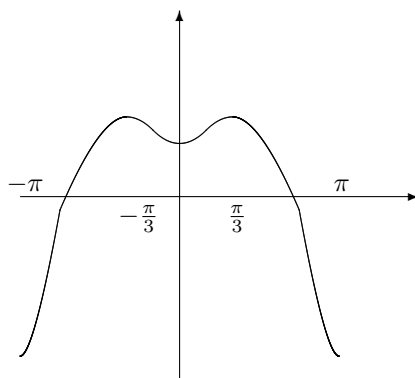
$$f'(x) = 4 \cos x \sin x - 2 \sin x = 2 \sin x (2 \cos x - 1).$$

Quindi, se $x \in [0, \pi]$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \pi, x = \frac{\pi}{3}$ e $f'(x) > 0$ se e solo se $x \in (0, \pi/3)$. $x = \pi/3$ è quindi un punto di massimo relativo e $f(\pi/3) = 3/2$. Passando infine alla derivata seconda si ha :

$$f''(x) = 2 \cos x (2 \cos x - 1) - 4 \sin^2 x = 8 \cos^2 x - 2 \cos x - 4$$

Ne deriva quindi che $f''(x) = 0$ se e solo se $\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}$, ossia se e solo se $x = \beta = \arccos \frac{1+\sqrt{33}}{8}$ e $x = \gamma = \arccos \frac{1-\sqrt{33}}{8}$. Per di più : $f''(x) > 0$ se e solo se $x \in (0, \beta) \cup (\gamma, \pi)$. Il grafico dunque risulta del

tipo :



Esercizio 1-b) Il dominio della funzione é $D = \{x \in \mathbb{R} ; x \neq 0\}$, la funzione é dispari e quindi basta studiarla per $x > 0$. Risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad e \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

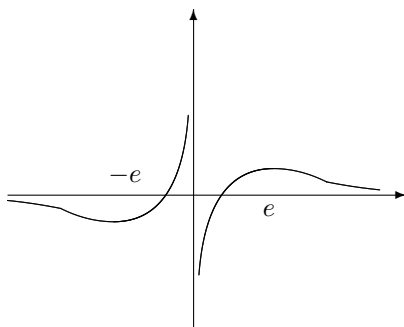
Derivando, si ha :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

Allora $f'(x) > 0$ se e solo se $1 - \log x > 0$ ossia $0 < x < e$. Pertanto il punto $x = e$ é un punto di massimo relativo e risulta $f(e) = \frac{1}{e}$. La derivata seconda é :

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1 - \log x)2x}{x^4} = \frac{2 \log x - 3}{x^3}$$

Ne deriva che la funzione é convessa per $x > e^{3/2}$. Il grafico dunque é del tipo :



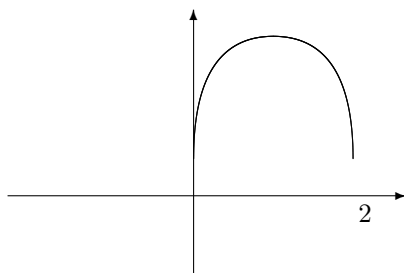
Esercizio 1-c) Il dominio della funzione é $D = [0, 2]$ e $f(0) = \sqrt{2} = f(2)$. La derivata prima risulta:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{2-x}} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}$$

Pertanto $f'(x) > 0$ se e solo se $\sqrt{2-x} > \sqrt{x}$ ossia se e solo se $2-x > x$ e quindi se e solo se $x < 1$. $x = 1$ é quindi punto di massimo relativo e $f(1) = 2$. Infine la derivata seconda é :

$$f''(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(x^{-3/2} + (2-x)^{-3/2}\right)$$

Pertanto é sempre negativa e quindi la funzione é concava. Il grafico risulta quindi del tipo:



Esercizio 2-a) Razionalizzando, risulta:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^3} - \sqrt{1-x^3}}{x \tan x \log(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x^3} + \sqrt{1-x^3}} \frac{2x^2}{\tan x \log(1+x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x^3} + \sqrt{1-x^3}} \frac{x}{\tan x} \frac{x}{\log(1+x)} = 1\end{aligned}$$

Esercizio 2-b) Risulta :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{2(e^x - 1 - x)}{x^3} - \frac{1}{x} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^x - 1 - x) - x^2}{x^3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^x - 1) - 2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(e^x - 1)}{6x} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Esercizio 2-c) Risulta :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x - \cos x}{x \tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x e^x - \cos x}{\tan x + x(1 + \tan^2 x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x + x e^x + \sin x}{2(1 + \tan^2 x) + x 2 \tan x(1 + \tan^2 x)} = 1\end{aligned}$$

Esercizio 3-a) Integrando per parti, si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx &= \int_0^{\pi/2} \sin x \sin^3 x \, dx = -\cos x \sin^3 x \Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x 3 \sin^2 x \cos x \, dx = \\ &= 3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \, dx = 3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx - 3 \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx\end{aligned}$$

Pertanto, possiamo scrivere:

$$4 \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx = 3 \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = 3 \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(2x)}{2} \, dx = 3 \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2}$$

Esercizio 3-b) Integrando per parti, si ottiene:

$$\int_2^3 x \log(x^2 + x - 2) \, dx = \frac{x^2}{2} \log(x^2 + x - 2) \Big|_2^3 - \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{x^2(2x+1)}{x^2 + x - 2} \, dx$$

Dividendo ora i due polinomi si ottiene:

$$\frac{x^2(2x+1)}{x^2 + x - 2} = 2x - 1 + \frac{5x - 2}{x^2 + x - 2}$$

Osservando infine che $x^2 + x - 2$ si annulla per $x = -2$ e $x = 1$, ricerchiamo una decomposizione del tipo:

$$\frac{5x - 2}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}$$

Essendo

$$\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + B(x - 1)}{x^2 + x - 2}$$

deve essere $A + B = 5$ e $2A - B = -2$, ossia $A = 1$ e $B = 4$. Possiamo quindi concludere che una primitiva della funzione integranda é data dalla funzione:

$$\frac{x^2}{2} \log(x^2 + x - 2) - \frac{1}{2} (x^2 - x + \log|x - 1| + 4 \log|x + 2|)$$

8 SERIE NUMERICHE

8.1 Serie numeriche

Definizione 8.1 Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Consideriamo la nuova successione così definita :

$$\begin{aligned}s_1 &= a_1 \\s_2 &= a_1 + a_2 \\s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\&\vdots \\s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{j=1}^n a_j \\&\vdots\end{aligned}$$

La successione $\{s_n\}$ viene chiamata **serie** costruita a partire dalla successione $\{a_n\}$ o di termine generale $\{a_n\}$.

Se esiste finito il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

diremo che la serie $\{s_n\}$ è **convergente**. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty \quad (o \quad -\infty)$$

diremo che la serie $\{s_n\}$ è **divergente** a più infinito (o a meno infinito). Infine se il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

non esiste, diremo che la serie $\{s_n\}$ è indeterminata o oscillante.

Se una serie è convergente, spesso il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

viene indicato con il simbolo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Con abuso di notazione, con lo stesso simbolo viene indicata anche la serie il cui termine generale è $\{a_n\}$. Ricordiamo, per comodità, la definizione di limite.

Dire che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s$$

significa che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \nu_\varepsilon \in \mathcal{R} \quad \text{tale che} \quad |s_n - s| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_\varepsilon.$$

D'altra parte, dire che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$$

significa che

$$\forall M \in \mathcal{R} \quad \exists \nu_M \in \mathcal{R} \quad \text{tale che} \quad s_n > M \quad \forall n > \nu_M.$$

8.2 Esempi

1. Studiare la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Osservando che

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

risulta :

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Ne deriva quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Pertanto la serie considerata è convergente.

2. (**Serie geometrica**) Sia $q \in \mathcal{R}$ un numero fissato, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots$$

viene chiamata **serie geometrica di ragione q** . Per studiare il comportamento di tale serie, indichiamo con

$$s_n = \sum_{j=1}^n q^j$$

e ricordiamo che vale la formula :

$$s_n = \begin{cases} n & \text{se } q = 1 \\ \frac{q - q^{n+1}}{1 - q} & \text{se } q \neq 1 \end{cases}$$

Infatti se $q \neq 1$, risulta

$$\begin{aligned} s_n &= q + q^2 + q^3 + \dots + q^n \\ q s_n &= q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1} \end{aligned}$$

Sottraendo, membro a membro, si ottiene infine:

$$(1 - q) s_n = q - q^{n+1}$$

e quindi la formula scritta sopra. Ricordando infine che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q > 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Si ottiene che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \begin{cases} \frac{q}{1-q} & \text{se } |q| < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Pertanto una serie geometrica di ragione q converge soltanto se $|q| < 1$ e, in tal caso risulta:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$$

3. A volte dovremo considerare una serie geometrica il cui primo addendo è $q^0 = 1$ invece di $q^1 = q$, ossia la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$$

Ovviamente risulta se $|q| < 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = 1 + \frac{q}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

4. (**Serie armonica**) Viene chiamata serie armonica la seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

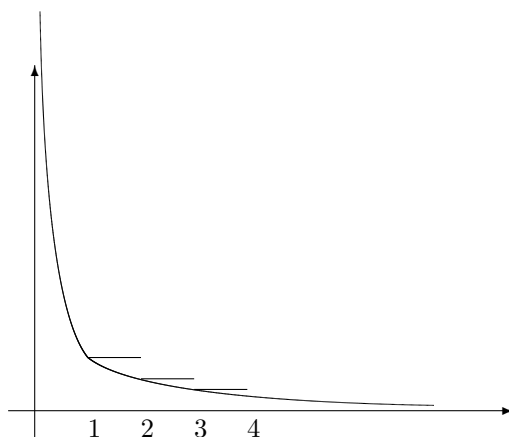
Posto

$$s_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{j}$$

risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = +\infty$$

Per verificare questo fatto, ragioniamo sulla figura seguente, dove è tracciato il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ per $x \in \mathcal{R}, x > 0$.



Da considerazioni geometriche, confrontando l'area dei rettangoli con l'area del sottografico si ha:

$$1 > \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{2} > \int_2^3 \frac{1}{x} dx$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n} > \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

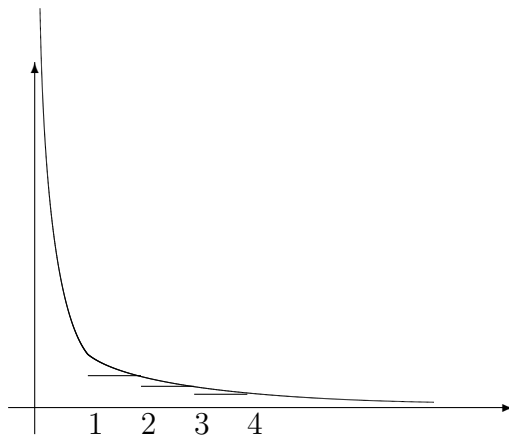
e quindi

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx + \dots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx =$$

$$= \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \log(n+1)$$

Si può concludere quindi che la serie armonica è una serie divergente (a $+\infty$).

Da notare che se ragioniamo in modo simile sulla seguente figura :



otteniamo le disuguaglianze:

$$\frac{1}{2} < \int_1^2 \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{3} < \int_2^3 \frac{1}{x} dx$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{n} < \int_{n-1}^n \frac{1}{x} dx$$

e quindi

$$\begin{aligned} s_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} &< 1 + \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x} dx + \dots + \int_{n-1}^n \frac{1}{x} dx = \\ &= 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx = 1 + \log n \end{aligned}$$

Ne possiamo concludere che $\forall n \geq 1$:

$$\log(n+1) < s_n < 1 + \log n$$

e quindi:

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} < \frac{s_n}{\log n} < \frac{1 + \log n}{\log n}$$

Ne deriva che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{\log n} = 1$$

Concludiamo questo paragrafo introduttivo, osservando che vale il seguente:

Teorema 8.1 Se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente, allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

(Ossia se una serie è convergente il termine generale di tale serie è una successione che ha limite zero).

Dimostrazione. Dalla definizione stessa di serie si ricava che :

$$s_n = s_{n-1} + a_n \quad \forall n \geq 2$$

D'altra se la serie è convergente si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s \in R$$

e quindi, essendo $a_n = s_n - s_{n-1}$, si ottiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n-1} = s - s = 0$$

q.e.d.

Da notare che il teorema precedente dà solo una condizione necessaria affinché una serie converga ma non sufficiente, ossia se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

ma il fatto che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ non implica che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sia convergente. Infatti se consideriamo la serie armonica appena studiata, risulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

mentre la serie è divergente.

Dal teorema precedente si può ricavare però il seguente fatto che

se il $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ non è zero , allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non converge (e quindi o diverge o è indeterminata).

8.3 Serie a termini positivi

Vengono chiamate serie a termini positivi quelle serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ che verificano la condizione:

$$a_n > 0 \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Da notare che ,in questo caso, dalla relazione :

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}$$

si ricava che $s_{n+1} > s_n$ e quindi la successione $\{s_n\}$ è monotona strettamente crescente e quindi il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ esiste sempre finito o $+\infty$. In tal caso dunque la serie o converge o diverge a $+\infty$ (non risulta quindi mai indeterminata).

Per le serie a termini positivi enunceremo alcuni criteri che ci permettono di stabilire se la serie converge o diverge . Tali criteri vengono chiamati criteri di convergenza.

Criterio del confronto Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni di numeri positivi. Supponiamo che esista un numero naturale $h \in \mathcal{N}$ tale che:

$$a_n \leq b_n \quad \forall n \geq h$$

Allora

- se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, converge anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
- se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, diverge anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Dimostrazione. Posto:

$$s_n = \sum_{j=1}^n a_j \quad e \quad t_n = \sum_{j=1}^n b_j$$

risulta se $n \geq h$:

$$s_n = \sum_{j=1}^{h-1} a_j + \sum_{j=h}^n a_j \leq \sum_{j=1}^{h-1} a_j + \sum_{j=h}^n b_j = t_n + \sum_{j=1}^{h-1} a_j - \sum_{j=1}^{h-1} b_j$$

Ne deriva quindi che se $\{t_n\}$ ha limite finito, ha limite finito anche $\{s_n\}$; mentre se $\{s_n\}$ ha limite $+\infty$, ha limite $+\infty$ anche $\{t_n\}$. q.e.d.

Un modo molto pratico per utilizzare questo criterio è il seguente :
supponiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

Allora

- se $L \in \mathcal{R}$ e $L \neq 0$, allora le due serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hanno lo stesso comportamento;
- se $L = +\infty$ allora se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, converge anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$; se invece la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge, diverge anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
- infine se $L = 0$ allora se la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, converge anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$; se invece la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge, diverge anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Infatti, supponendo $L \in \mathcal{R}$, $L > 0$, dalla definizione di limite, scegliendo per esempio $\varepsilon = \frac{L}{2}$, si ottiene che esiste $h \in \mathcal{N}$ tale che

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - L \right| < \frac{L}{2} \quad \forall n \geq h$$

ossia

$$\frac{L}{2} b_n < a_n < \frac{3L}{2} b_n \quad \forall n \geq h$$

Possiamo quindi applicare il criterio del confronto ed ottenere il primo risultato.

Criterio del rapporto Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri positivi. Supponiamo che il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

Allora

- se $L < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente,
- se $L > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è divergente.

(Da notare che se $L = 1$ il criterio del rapporto è inefficace)

Dimostrazione. Supponiamo $L < 1$. Scelto ε in modo che sia $L + \varepsilon = q < 1$ (per esempio $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$), dalla definizione di limite, possiamo trovare $h \in \mathcal{N}$ tale che

$$a_{n+1} < (L + \varepsilon) a_n = q a_n \quad \forall n \geq h$$

Dando ora ad n i valori successivi $h, h+1, h+2, \dots, h+m$, si ottiene:

$$\begin{aligned} a_{h+1} &< q a_h \\ a_{h+2} &< q a_{h+1} < q^2 a_h \\ a_{h+3} &< q a_{h+2} < q^3 a_h \\ &\vdots \\ a_{h+m} &< q a_{h+m-1} < q^m a_h \end{aligned}$$

e quindi se poniamo $n = h + m$, si ottiene:

$$a_n < q^{n-h} a_h = \frac{a_h}{q^h} q^n \quad \forall n \geq h + 1$$

Siccome $q < 1$, la serie geometrica di ragione q converge e quindi, per il teorema del confronto, converge anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ q.e.d.

Criterio della radice Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri positivi. Supponiamo che il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

Allora

- se $L < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente,
- se $L > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è divergente.

(Da notare che se $L = 1$ il criterio della radice è inefficace)

Criterio integrale Sia $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, positiva e decrescente. Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ è convergente se e solo se risulta finito il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = \int_1^{+\infty} f(x) dx$$

8.4 Esercizi sullo studio del comportamento di alcune serie

1. Studiare il comportamento della serie (**Serie armonica generalizzata**)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad , \quad p \in \mathbb{R} \quad p > 0$$

Applicando il criterio integrale si ottiene :

$$\int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^n & \text{se } p \neq 1 \\ \log n & \text{se } p = 1 \end{cases}$$

Ne deriva quindi che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & \text{se } p > 1 \\ +\infty & \text{se } p \leq 1 \end{cases}$$

Ne deriva quindi che la serie considerata converge soltanto se $p > 1$, mentre diverge se $p \leq 1$.

2. Studiare il comportamento delle serie

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad , \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \quad , \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{3^n + 1}$$

a) Applichiamo il criterio del rapporto . Risulta :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n} = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n}$$

Otteniamo pertanto :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$$

Possiamo concludere quindi che la serie considerata converge .

b) Applichiamo ancora il criterio del rapporto . Otteniamo in questo caso :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$$

Otteniamo pertanto :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$$

Possiamo concludere quindi che la serie considerata converge .

c) Applichiamo il criterio della radice . Otteniamo :

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{3} \sqrt[n]{\frac{1+2^{-n}}{1+3^{-n}}}$$

Ricordando infine che se $\{b_n\}$ é una successione di numeri positivi con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L \in \mathcal{R} \quad L > 0$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = 1$$

si ottiene che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{3} < 1$$

Possiamo concludere quindi che la serie considerata converge .

3. Studiare il comportamento delle serie

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{n+6} \quad , \quad b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log n} \quad , \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(\sqrt{n}+3)}$$

a) Osserviamo che

$$\frac{\sqrt{n}+1}{n+6} = \frac{\sqrt{n}}{n} \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{6}{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{6}{n}}$$

Ne possiamo concludere che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{n}+1}{n+6}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$$

Per il criterio del confronto , allora la serie considerata si comporta come la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Pertanto tale serie é divergente .

b) Osserviamo che se $n \geq 3$, allora $\log n > 1$, pertanto :

$$\frac{1}{n^2 \log n} < \frac{1}{n^2}$$

Dal criterio del confronto , se ne ricava quindi che la serie considerata è convergente .

c) Osserviamo che risulta :

$$\frac{n+1}{n(\sqrt{n}+3)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}$$

Allora la serie considerata si comporta come la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Pertanto tale serie é divergente .

4. Studiare il comportamento delle serie

$$a) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} \quad , \quad b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\log n)^2} \quad , \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

a) Applichiamo il criterio integrale . Se $n \geq 2$, risulta

$$\int_2^n \frac{1}{x \log x} dx = \log (\log x) \Big|_2^n = \log (\log n) - \log (\log 2)$$

Ne possiamo concludere che

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_2^n \frac{1}{x \log x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \log (\log n) - \log (\log 2) = +\infty$$

La serie considerata é quindi divergente.

b) Applichiamo ancora il criterio integrale. In questo caso otteniamo:

$$\int_2^n \frac{1}{x (\log x)^2} dx = -\frac{1}{\log x} \Big|_2^n = -\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log 2}$$

Ne possiamo concludere in questo secondo caso che

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x (\log x)^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_2^n \frac{1}{x (\log x)^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{\log n} + \frac{1}{\log 2} = \frac{1}{\log 2}$$

Pertanto in questo caso la serie é convergente.

c) Applichiamo il criterio del confronto , ricondando che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log (1+x)}{x} = 1$$

Ne deriva quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

Pertanto la serie considerata si comporta come la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ e quindi é convergente.

8.5 Serie a termini di segno alterno

Data una successione $\{a_n\}$ di numeri positivi, chiamiamo **serie a termini di segno alterno** (o piú brevemente **serie alterna**) la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

Per le serie a termini di segno alterno vale il seguente:

Teorema 8.2 Teorema di Leibniz Sia $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ una serie a termini di segno alterno. Supponiamo che

- i) $\{a_n\}$ sia una successione decrescente,
- ii)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 .$$

allora le serie alterna é convergente.

Dimostrazione. (inserita solo per completezza, ma non fatta a lezione) Indichiamo con

$$s_n = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_j = a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{j+1} a_j + \dots + (-1)^{n+1} a_n$$

e con

•

$$p_n = s_{2n}$$

•

$$d_n = s_{2n+1}$$

Risulta :

$$p_{n+1} - p_n = s_{2n+2} - s_{2n} = (-1)^{2n+2} a_{2n+1} + (-1)^{2n+3} a_{2n+2} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0$$

per l'ipotesi i). Pertanto la successione $\{p_n\}$ é crescente .

Analogamente si prova che la successione $\{d_n\}$ é decrescente. Infatti

$$d_{n+1} - d_n = s_{2n+3} - s_{2n+1} = (-1)^{2n+4} a_{2n+3} + (-1)^{2n+3} a_{2n+2} = a_{2n+3} - a_{2n+2} \leq 0$$

Inoltre dalla relazione

$$d_n - p_n = s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} > 0$$

si ricava che $d_n > p_n \forall n \in \mathcal{N}$. Abbiamo quindi che

$$p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq \dots \leq p_n < d_n \leq \dots \leq d_3 \leq d_2 \leq d_1$$

Per il teorema sulle successioni monotone, esistono quindi finiti i due limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d \quad e \quad p \leq d$$

D'altra parte, per l'ipotesi ii) :

$$d - p = \lim_{n \rightarrow \infty} (d_n - p_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = 0$$

Allora $p = d$ e quindi esiste il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = p = d = s$$

ossia la serie considerata è convergente.

Da notare che risulta:

$$p_n = s_{2n} \leq s \leq d_n = s_{2n+1} \quad \forall n \in \mathcal{N} .$$

q.e.d.

Consideriamo per esempio la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Applicando il principio appena dimostrato si ottiene subito che questa serie è convergente.

8.6 Serie assolutamente convergenti

Sia $\{a_n\}$ una successione (non necessariamente di numeri positivi). La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ si dice **assolutamente convergente** se converge la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Vale il seguente :

Teorema 8.3 *Ogni serie assolutamente convergente è anche convergente.*

Importante è notare che il viceversa del teorema precedente è falso. Infatti una serie può essere convergente senza essere assolutamente convergente.

Un esempio è dato dalla serie a termini di segno alterno

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Infatti tale serie, per il teorema di Leibniz, è convergente. Ma se consideriamo la serie dei moduli otteniamo la serie armonica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

che è divergente.

8.7 Esempi

Studiare, al variare di $x \in R$, il comportamento delle serie:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n 3^n}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^n, \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + \sqrt{n}}$$

a) Supponiamo $x \neq 0$ e poniamo

$$a_n = \frac{x^n}{n 3^n}$$

Applicando il criterio del rapporto, ottengo:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{3} \frac{n}{n+1}$$

e quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{3}$$

Allora se $|x| < 3$, la serie converge assolutamente e quindi converge, se $|x| > 3$, la serie dei moduli diverge e $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$ e quindi la serie di partenza non converge.

Verifichiamo infine come si comporta la serie considerata se $|x| = 3$.

Se $x = 3$, allora $a_n = \frac{1}{n}$ e la serie diventa la serie armonica che diverge. Infine se $x = -3$, otteniamo la serie

:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

che, per il criterio di Leibnitz, converge. Ne possiamo quindi concludere che la serie considerata converge se e solo se $x \in [-3, 3]$.

b) La serie considerata è una serie geometrica di ragione

$$q = \frac{x+1}{x-1}$$

ed è quindi convergente se e solo se $|q| < 1$. Verifichiamo quindi quando questo è vero.

• i)

$$q = \frac{x+1}{x-1} < 1 \Leftrightarrow \frac{x+1-x+1}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

• ii)

$$q = \frac{x+1}{x-1} > -1 \Leftrightarrow \frac{x+1+x-1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x < 0 \text{ o } x > 1$$

Le due condizioni valgono dunque contemporaneamente se e solo se $x < 0$. Pertanto la serie considerata converge solo se $x < 0$.

c) Supposto $x \neq 0$, poniamo

$$a_n = \frac{x^n}{n + \sqrt{n}}$$

Applicando ora il criterio della radice alla serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, si ottiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \sqrt[n]{\frac{1}{n + \sqrt{n}}} = |x|$$

Pertanto se $|x| < 1$, la serie considerata converge assolutamente, mentre se $|x| > 1$, la serie considerata non converge (la serie dei moduli diverge a $+\infty$). Ora se $x = 1$, la serie diventa

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}}$$

Applicando il criterio del confronto, ottengo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n + \sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n + \sqrt{n}} = 1$$

Pertanto la serie considerata si comporta come la serie armonica che diverge. Infine se $x = -1$, la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sqrt{n}}$$

Siccome la successione $a_n = \frac{1}{n + \sqrt{n}}$ tende a zero decrescendo, per il principio di Leibniz sulle serie a termini di segno alterno, la serie considerata converge. Se ne conclude che la serie di partenza converge se e solo se $x \in [-1, 1)$.

9 PROGRAMMA DEL CORSO

Numeri reali. Proprietà dei numeri reali: proprietà delle operazioni, proprietà dell'ordinamento e proprietà di completezza. I numeri naturali, gli interi relativi e i numeri razionali. Estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme di numeri reali. Proprietà caratteristiche dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore. Principio di induzione. Coefficienti binomiali e binomio di Newton.

Funzioni. Generalità sulle funzioni. Grafico di una funzione. Funzioni monotone, funzioni iniettive e suriettive e funzioni invertibili. Richiamo di alcune funzioni elementari: funzioni lineari, valore assoluto, funzione esponenziale e logaritmo, funzione potenza e funzioni trigonometriche.

Limiti di funzioni. Definizione di limite di una funzione e per una successione e prime proprietà (unicità del limite e operazioni con i limiti). Successioni convergenti e successioni limitate. Teorema del confronto. Limiti infiniti e forme indeterminate. Successioni monotone. Il numero e . Sottosuccessioni di una data successione e teorema di Bolzano-Weierstrass. Limite della funzione composta. Limite destro e limite sinistro. Funzioni monotone. Alcuni limiti fondamentali.

Funzioni continue. Funzioni continue in intervalli : teorema degli zeri, teorema dei valori assunti, teorema di Weierstrass. Teorema sulla continuità della funzione inversa.

Derivate. Definizione di derivata. Proprietà elementari delle funzioni derivabili e significato geometrico del concetto di derivata. Regole di derivazione della somma, del prodotto e del quoziente di due funzioni. Formula di derivazione della funzione composta e della funzione inversa. I teoremi di Rolle e Lagrange. I teoremi di De l'Hopital. Derivate successive. Funzioni convesse. Applicazione del calcolo differenziale allo studio del grafico di una funzione.

Integrazione. Definizione di funzione integrabile secondo Riemann e di integrale definito. Proprietà elementari dell'integrale: linearità e proprietà additiva dell'integrale. Teorema della media integrale. Teorema fondamentale del calcolo integrale e formula fondamentale del calcolo integrale. Formule di integrazione per parti e per sostituzione. Integrali generalizzati.

Serie numeriche Definizione di serie e di serie convergente e divergente. Studio della serie geometrica. Serie a termini positivi e criteri di convergenza. Serie a termini di segno alterno. Serie assolutamente convergenti.