

ANALISI I

Note del corso tenuto dal Prof. Umberto Massari

Corso di Laurea Triennale in Chimica.
Anno Accademico 2017-2018

1 I NUMERI REALI

L'argomento centrale di questo corso di Analisi I è lo studio delle principali proprietà dei numeri reali e di alcune proprietà elementari delle funzioni reali di variabile reale.

Seguendo la linea dei più recenti libri che trattano questo argomento, anche in questo corso, l'insieme dei numeri reali verrà introdotto in via assiomatica. Verrà supposto cioè che esista un insieme, che indicheremo con la lettera $\mathcal{R}$ e che chiameremo l'insieme dei numeri reali, con tutte le proprietà che verranno elencate con sufficiente precisione e che sono, in fondo, le proprietà dei numeri che già in parte sono note.

La costruzione di $\mathcal{R}$ a partire dall'insieme dei numeri razionali, che può essere fatta in diversi modi e che forse qualche studente può aver già visto nella scuola media superiore, è, in ogni caso, lunga e laboriosa e richiederebbe troppo tempo. Pertanto in questo corso non verrà fatta. Noi supporremo quindi che i numeri reali esistano. Quello che faremo ora è fare un elenco abbastanza dettagliato delle loro principali proprietà.

1.1 Le proprietà dei numeri reali

Elencheremo in questo paragrafo le principali proprietà dell'insieme dei numeri reali, suddividendo tale elenco in tre parti:

- i) Proprietà delle operazioni,
- ii) Proprietà dell'ordinamento,
- iii) Proprietà di completezza.

i) - Proprietà delle operazioni

Sono definite in $\mathcal{R}$ due operazioni $+$ (più) e $\cdot$ (per) che hanno le seguenti proprietà:

- a) Proprietà commutativa:

$$\forall a, b \in \mathcal{R} \quad a + b = b + a ; a \cdot b = b \cdot a ;$$

- b) Proprietà associativa:

$$\forall a, b, c \in \mathcal{R} \quad (a + b) + c = a + (b + c) ; (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) ;$$

- c) Proprietà distributiva:

$$\forall a, b, c \in \mathcal{R} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c ;$$

- d) Esistenza degli elementi neutri:
 esistono in $\mathcal{R}$ due numeri 0 e 1 tali che

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a \quad \forall \quad a \in \mathcal{R};$$

- e) Esistenza dell'opposto e dell'inverso:

$$\forall a \in \mathcal{R} \quad \exists -a \in \mathcal{R} \quad \text{tale che} \quad a + (-a) = 0,$$

$$\forall a \in \mathcal{R} \quad a \neq 0 \quad \exists \frac{1}{a} \in \mathcal{R} \quad \text{tale che} \quad a \cdot \frac{1}{a} = 1.$$

ii) - Proprietà dell'ordinamento

Esiste in $\mathcal{R}$ una relazione di ordine totale che indicheremo con $\leq$ e chiameremo **relazione di minore o uguale** con le seguenti proprietà:

- a) Dicotomia:

$$\forall a, b \in \mathcal{R} \quad \text{risulta} \quad a \leq b \quad \text{oppure} \quad b \leq a;$$

- b) Proprietà antisimmetrica:

$$\forall a, b \in \mathcal{R} \quad \text{se} \quad a \leq b \quad \text{e} \quad b \leq a \quad \Rightarrow \quad a = b;$$

- c) Proprietà transitiva:

$$\forall a, b, c \in \mathcal{R} \quad \text{se} \quad a \leq b \quad \text{e} \quad b \leq c \quad \Rightarrow \quad a \leq c;$$

- d) Legame tra $\leq$ e $+$ (più):

$$\forall a, b, c \in \mathcal{R} \quad \text{se} \quad a \leq b \quad \Rightarrow \quad a + c \leq b + c;$$

- e) Legame tra $\leq$ e $\cdot$ (per):

$$\forall a, b, c \in \mathcal{R} \quad \text{se} \quad a \leq b \quad \text{e} \quad 0 \leq c \quad \Rightarrow \quad a \cdot c \leq b \cdot c.$$

iii) - Proprietà di completezza

Siano A e B due sottoinsiemi di $\mathcal{R}$. Diremo che A e B formano una **coppia di insiemi separati** se

$$\forall a \in A \quad \text{e} \quad \forall b \in B \quad \text{risulta} \quad a \leq b$$

La proprietà di completezza di $\mathcal{R}$ afferma che se A e B è una coppia di insiemi separati, allora esiste un numero reale c tale che:

$$a \leq c \leq b \quad \forall a \in A \quad \text{e} \quad \forall b \in B.$$

Il numero reale c viene chiamato **elemento di separazione** tra A e B .

A parole potremo quindi enunciare la proprietà di completezza di $\mathcal{R}$ affermando che ogni coppia di insiemi di numeri reali, che siano separati, ammette un elemento di separazione.

Osservazione Nel seguito useremo anche i simboli

$$\geq, <, >$$

che chiameremo rispettivamente **maggiore o uguale**, **minore** e **maggiore**, intendendo rispettivamente che $\forall a, b \in \mathcal{R}$

$$\begin{aligned} a \geq b &\Leftrightarrow b \leq a, \\ a < b &\Leftrightarrow a \leq b \quad \text{e} \quad a \neq b, \\ a > b &\Leftrightarrow b < a. \end{aligned}$$

Dalle proprietà delle operazioni e dell'ordinamento che abbiamo appena ricordato, si possono ricavare tutte le regole del calcolo letterale che verranno usate nella risoluzione degli esercizi. Alcune tra le più importanti sono le seguenti:

a) **(Legge di cancellazione rispetto alla somma e al prodotto)**

$$\forall a, b, c \in \mathcal{R} \text{ se } a + b = a + c \Rightarrow b = c ;$$

$$\forall a, b, c \in \mathcal{R} , a \neq 0 \text{ se } a \cdot b = a \cdot c \Rightarrow b = c ;$$

b) **(Legge di annullamento del prodotto)**

$$\forall a, b \in \mathcal{R} \text{ se } a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ o } b = 0 ;$$

c) **(Unicità dell'opposto e dell'inverso di un numero reale)**

– L'opposto di un numero reale è unico.

– L'inverso di un numero reale è unico.

d) $\forall a, b \in \mathcal{R}$, risulta:

$$(-a) \cdot b = -a \cdot b ;$$

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b ;$$

e) $\forall a \in \mathcal{R}$:

$$a > 0 \Leftrightarrow -a < 0 ;$$

$$a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0 ;$$

f) $\forall a \in \mathcal{R} , a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$;

g) $\forall a, b \in \mathcal{R} \Rightarrow a \leq b \Leftrightarrow a - b \leq 0$.

h) **(Regola dei segni)** $\forall a, b \in \mathcal{R}$, risulta

$$a \cdot b \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} a \leq 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$$

$$\frac{a}{b} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} a \leq 0 \\ b < 0 \end{cases}$$

1.2 Alcuni esercizi

Applichiamo ora le proprietà dell'ordinamento che abbiamo ricordato sopra per studiare alcune disuguaglianze.

Vogliamo mettere prima in risalto un fatto che può causare errori negli esercizi e cioè che l'implicazione

$$a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$$

è vera soltanto se $0 \leq c$, mentre se $a \leq b$ e $c \leq 0 \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$ e non $a \cdot c \leq b \cdot c$.

1. Determinare l'insieme:

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R} ; \frac{x^2 + 2}{x - 1} > x + 2 \right\} \quad (1)$$

Risulta

$$\frac{x^2 + 2}{x - 1} > x + 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2 - x^2 + x - 2x + 2}{x - 1} > 0 \Leftrightarrow \frac{-x + 4}{x - 1} > 0$$

Ora l'ultimo quoziente è positivo se e solo se

$$\begin{cases} -x + 4 > 0 \\ x - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} -x + 4 < 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases}$$

ossia se e solo se

$$\begin{cases} x < 4 \\ x > 1 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x > 4 \\ x < 1 \end{cases}$$

Siccome le ultime due richieste sono incompatibili, risulta:

$$A = (1, 4) = \{x \in \mathcal{R}; 1 < x < 4\}.$$

NOTA BENE Il seguente modo di risolvere questo esercizio è sbagliato.

$$\frac{x^2 + 2}{x - 1} > x + 2 \Leftrightarrow x^2 + 2 > x^2 + 2x - x - 2 \Leftrightarrow x < 4$$

Nel primo passaggio ho moltiplicato la disuguaglianza da studiare per $x - 1$, mantenendo sempre tra i due membri della disuguaglianza stessa il segno di $>$, cosa sbagliata se $x - 1 < 0$.

2. Determinare l'insieme:

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R}; \frac{x}{x+1} > \frac{x+2}{x-1} \right\} \quad (2)$$

Risulta:

$$\frac{x}{x+1} > \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - x^2 - 2x - x - 2}{(x+1)(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{-4x-2}{(x+1)(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x+1)(x-1)} < 0$$

Studiando separatamente il segno del numeratore e del denominatore, risulta :

$\begin{array}{ccccccc} - & - & - & + & + & + & + \\ -\frac{1}{2} \end{array}$	Numeratore
$\begin{array}{ccccccccccc} + & + & + & - & - & - & - & - & - & + & + & + \\ -1 & & & & & & & & & 1 & & \end{array}$	Denominatore

Ne deriva che l'insieme A contiene i punti dove il segno di numeratore e denominatore sono discordi, ossia $A = (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, 1)$.

3. Determinare l'insieme:

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R}, \frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} > 2 \right\} \quad (3)$$

Risulta:

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} > 2 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-2) + (x-1)(x+2) - 2(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} > 0$$

Sviluppando il numeratore, risulta:

$$x^2 - 2x + x - 2 + x^2 + 2x - x - 2 - 2x^2 + 4x + 2x - 4 = 6x - 8$$

Si ottiene pertanto:

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} > 2 \Leftrightarrow \frac{6x-8}{(x-1)(x-2)} > 0$$

Studiando separatamente il segno del numeratore e del denominatore, risulta :

$\begin{array}{ccccccc} - & - & - & - & + & + & + \\ \frac{4}{3} \end{array}$	Numeratore
$\begin{array}{ccccccccccc} + & + & + & - & - & - & - & - & - & + & + & + \\ 1 & & & & & & & & & 2 & & \end{array}$	Denominatore

Ne deriva che l'insieme A contiene i punti dove il segno di numeratore e denominatore sono concordi, ossia $A = (1, 4/3) \cup (2, +\infty)$.

4. Determinare l'insieme:

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R}, \frac{x+3}{x-2} \leq \frac{x+1}{x+2} \right\} \quad (4)$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x-2} \leq \frac{x+1}{x+2} &\iff \frac{x+3}{x-2} - \frac{x+1}{x+2} = \\ &= \frac{x^2 + 2x + 3x + 6 - (x^2 - 2x + x - 2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{6x+8}{(x-2)(x+2)} \leq 0 \end{aligned}$$

Studiando separatamente il segno del numeratore e del denominatore, risulta :

$\frac{\begin{array}{ccccccc} - & - & - & - & + & + & + & + \\ \hline & & & & -\frac{4}{3} & & & \end{array}}{-2 \qquad \qquad \qquad 2}$	Numeratore
$\frac{\begin{array}{ccccccccccc} + & + & + & - & - & - & - & - & - & + & + & + \\ \hline & & & & & & & & & & & \end{array}}{-2 \qquad \qquad \qquad 2}$	Denominatore

Pertanto si ha:

$$A = (-\infty, -2) \cup \left[-\frac{4}{3}, 2 \right)$$

1.3 Esercizi proposti

Determinare:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ x \in \mathcal{R}; \frac{x-3}{x+1} \leq 3 \right\}, \quad B = \left\{ x \in \mathcal{R}; \frac{x+6}{x+2} > \frac{x+1}{x-3} \right\}, \\ C &= \left\{ x \in \mathcal{R}; \frac{x^2+2}{x-2} > x-1 \right\}, \quad D = \left\{ x \in \mathcal{R}; \frac{x+3}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} \leq 2 \right\}, \\ E &= \left\{ x \in \mathcal{R}; \frac{x-1}{x+2} \leq \frac{x+4}{x-3} \right\}. \end{aligned}$$

(La soluzione si trova alla fine del Capitolo)

1.4 Una conseguenza della proprietà di completezza di $\mathcal{R}$: esistenza della radice quadrata di un numero non negativo

Una conseguenza molto importante della proprietà di completezza di $\mathcal{R}$ è l'esistenza della radice quadrata di ogni numero non negativo. Vale infatti il seguente:

Teorema 1.1 $\forall a \in \mathcal{R} \quad a \geq 0 \quad \exists \text{ unico } b \in \mathcal{R} \quad b \geq 0 \text{ tale che } b^2 = a.$

Questo unico $b \geq 0$ verrà indicato col simbolo $\sqrt{a}$ e chiamato la **radice quadrata** di a .

Dimostrazione. Supponiamo $a > 0$. Indichiamo con:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathcal{R}; x > 0, x^2 \leq a\} \\ B &= \{y \in \mathcal{R}; y > 0, a \leq y^2\} \end{aligned}$$

Verifichiamo che A e B sono separati. Infatti:

$$\text{se } x \in A \text{ e } y \in B \Rightarrow x^2 \leq a \leq y^2 \Rightarrow x^2 \leq y^2 \Rightarrow (x-y)(x+y) \leq 0.$$

Siccome $x+y > 0$, ne deriva che $x-y \leq 0$, ossia $x \leq y$. Esiste allora, per la proprietà di completezza, un numero reale b che separa A e B , cioè tale che:

$$x \leq b \leq y \quad \forall x \in A \text{ e } \forall y \in B$$

Verifichiamo che deve essere $b^2 = a$, ragionando per assurdo.

Primo caso. Supponiamo che sia $b^2 < a$. Se indichiamo con ε un numero tra 0 e 1 ($0 < \varepsilon < 1$), abbiamo:

$$(b + \varepsilon)^2 = b^2 + 2b\varepsilon + \varepsilon^2 < b^2 + 2b\varepsilon + \varepsilon$$

(Abbiamo usato il fatto che se $\varepsilon \in (0, 1)$, allora $\varepsilon^2 < \varepsilon$). Pertanto se $\varepsilon \in (0, 1)$ è scelto in modo tale che $b^2 + \varepsilon(2b + 1) \leq a$, ossia se

$$\varepsilon \leq \frac{a - b^2}{1 + 2b}, \quad (5)$$

allora risulta $(b + \varepsilon)^2 < a$ (da notare che, siccome stiamo supponendo $b^2 < a$, il quoziente a secondo membro della (5) è positivo).

Ne deriva quindi che il numero $x = b + \varepsilon \in A$, infatti $b + \varepsilon > 0$ e $(b + \varepsilon)^2 < a$. Inoltre risulta $x = b + \varepsilon > b$ e questo contrasta col fatto che b è elemento di separazione tra A e B , in particolare col fatto che deve essere $x \leq b \forall x \in A$.

Secondo caso. Supponiamo che sia $b^2 > a$. Indicando in questo caso con ε un numero tra 0 e b , si avrebbe $b - \varepsilon > 0$ e

$$(b - \varepsilon)^2 = b^2 - 2b\varepsilon + \varepsilon^2 > b^2 - 2b\varepsilon$$

Pertanto se ε è scelto in modo che $b^2 - 2b\varepsilon \geq a$, ossia se

$$\varepsilon \leq \frac{b^2 - a}{2b}, \quad (6)$$

risulta $(b - \varepsilon)^2 > a$ (da notare che anche in questo caso, il secondo membro della (6) è positivo). Pertanto il numero $y = b - \varepsilon \in B$ e $y = b - \varepsilon < b$, contro il fatto che b è elemento di separazione tra A e B , in particolare col fatto che deve essere $b \leq y \forall y \in B$.

Deve quindi essere $b^2 = a$.

Verificare infine, per esercizio, che il numero $b \geq 0$ con la proprietà ora trovata ($b^2 = a$) è unico. q.e.d.

Concludiamo questa parte sui numeri reali, ricordando le disequaglianze di secondo grado.

Disequaglianze di secondo grado Determinare:

$$A = \{x \in \mathcal{R} ; ax^2 + bx + c > 0\}$$

dove $a, b, c \in \mathcal{R}$ sono numeri fissati con $a > 0$.

Se indichiamo con

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

allora:

i) se $\Delta > 0$, posto:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

risulta $A = (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$;

ii) se $\Delta = 0$, allora posto

$$x_1 = \frac{-b}{2a}$$

si ottiene $A = \{x \in \mathcal{R} ; x \neq x_1\}$,

iii) se infine $\Delta < 0$, si ottiene $A = \mathcal{R}$.

Infatti, completando il quadrato, si ottiene:

$$\begin{aligned} a x^2 + b x + c &= a \left[x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right] = \\ &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

Si ottiene quindi il risultato sopra enunciato.

1.5 Alcuni altri esercizi

1. Determinare:

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R} ; \frac{x+1}{x+2} - \frac{x+2}{x-3} \geq 1 \right\}$$

Risulta:

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+2}{x-3} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-3) - (x+2)^2 - (x+2)(x-3)}{(x+2)(x-3)} \geq 0$$

Sviluppando il numeratore, ottengo:

$$x^2 - 3x + x - 3 - x^2 - 4x - 4 - x^2 + 3x - 2x + 6 = -x^2 - 5x - 1$$

e quindi:

$$\frac{x+1}{x+2} - \frac{x+2}{x-3} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 5x + 1}{(x+2)(x-3)} \leq 0$$

Ora il numeratore si annulla nei due punti

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2} , \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$$

Osservando infine che

$$x_1 < -2 < x_2 < 0$$

il segno di numeratore e denominatore è dato da:

$\begin{array}{cccccccccccc} + & + & + & - & - & - & - & + & + & + & + \\ \hline & & & x_1 & & & & x_2 & & & \end{array}$	Numeratore
$\begin{array}{cccccccccccc} + & + & + & - & - & - & - & - & - & - & + & + & + \\ \hline & & & -2 & & & & & & & 3 & & \end{array}$	Denominatore

Possiamo quindi concludere che

$$A = [x_1, -2) \cup [x_2, 3)$$

2. Determinare

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R}; 2x + 1 \leq \sqrt{x^2 + x + 4} \right\}$$

Osserviamo in primo luogo che $x^2 + x + 4 > 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}$ e che se $2x + 1 < 0$, ossia se $x < -\frac{1}{2}$, la disuguaglianza è verificata. Pertanto

$$\left(-\infty, -\frac{1}{2} \right) \subset A .$$

D'altra parte se $2x + 1 \geq 0$, ossia se $x \geq -\frac{1}{2}$, si ha

$$2x + 1 \leq \sqrt{x^2 + x + 4} \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 \leq x^2 + x + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 \leq 0$$

Ora l'ultima disequaglianza è verificata se

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Tenendo conto che sto supponendo che $x \geq -\frac{1}{2}$, possiamo concludere che

$$A = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left[-\frac{1}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right] = \left(-\infty, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right].$$

3. Determinare

$$A = \left\{x \in \mathcal{R} ; 1 - 2x \leq \sqrt{x - x^2 + 2}\right\}$$

Osserviamo in primo luogo che deve essere $x - x^2 + 2 \geq 0$ ossia $x^2 - x - 2 \leq 0$. Pertanto deve essere $x \in [-1, 2]$. Osserviamo ora che, se $1 - 2x < 0$ ossia se $x > \frac{1}{2}$, la disequaglianza è verificata e quindi

$$\left(\frac{1}{2}, 2\right] \subset A.$$

D'altra parte se $1 - 2x \geq 0$ ossia se $x \leq \frac{1}{2}$, si ha

$$1 - 2x \leq \sqrt{x - x^2 + 2} \Leftrightarrow 1 - 4x + 4x^2 \leq x - x^2 + 2 \Leftrightarrow 5x^2 - 5x - 1 \leq 0$$

Ora l'ultima disequaglianza è verificata se

$$\frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} \leq x \leq \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}.$$

Notando infine che

$$\frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} > \frac{1}{2} \quad e \quad \frac{5 - 3\sqrt{5}}{10} > -1,$$

possiamo concludere che

$$A = \left[\frac{5 - 3\sqrt{5}}{10}, 2\right].$$

4. Determinare

$$A = \left\{x \in \mathcal{R} ; \sqrt{x^2 - x - 2} \leq \frac{x - 1}{2}\right\}$$

Osserviamo in primo luogo che deve essere $x^2 - x - 2 \geq 0$ ossia $x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$. Osserviamo infine che deve essere anche $x \geq 1$. Infatti, in caso contrario la disequaglianza non è verificata. Con queste limitazioni risulta:

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \leq \frac{x - 1}{2} \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq \frac{x^2 - 2x + 1}{4} \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 9 \leq 0$$

Osserviamo infine che le radici dell'ultimo polinomio di secondo grado sono:

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{28}}{3} \quad e \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{28}}{3}$$

Siccome $x_2 > 2$, possiamo concludere che $A = [2, x_2]$.

5. Sia λ un parametro reale, indichiamo con

$$A_\lambda = \{x \in \mathcal{R}; x^2 - 2x + \lambda > 0\}$$

Determinare A_λ al variare di $\lambda \in \mathcal{R}$.

Risulta $\Delta(\lambda) = 4 - 4\lambda$ e quindi se $\lambda > 1$, $\Delta(\lambda) < 0$, ne deriva allora che $A_\lambda = \mathcal{R}$. D'altra parte se $\lambda = 1$, la disuguaglianza diventa

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 > 0$$

e quindi $A_1 = \{x \in \mathcal{R}, x \neq 1\}$. Infine se $\lambda < 1$, $\Delta(\lambda) > 0$ e quindi posto

$$x_1(\lambda) = 1 - \sqrt{1 - \lambda}, \quad x_2(\lambda) = 1 + \sqrt{1 - \lambda}$$

risulta

$$A_\lambda = (-\infty, x_1(\lambda)) \cup (x_2(\lambda), +\infty).$$

6. Per quali valori di $b \in \mathcal{R}$, l'equazione (nella incognita x):

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = b$$

ammette almeno una soluzione?

Ricordando che $x^2 + x + 1 > 0 \forall x \in \mathcal{R}$, risulta

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = b \Leftrightarrow bx^2 + (b-1)x + b-1 = 0$$

Ora, se $b = 0$, l'equazione ottenuta non è di secondo grado, ma di primo e diventa: $-x - 1 = 0$, che ha l'unica soluzione $x = -1$. Se $b \neq 0$, l'equazione ha soluzioni se e solo se

$$\Delta(b) = (b-1)^2 - 4b(b-1) \geq 0$$

ossia $(b-1)(b-1-4b) = (b-1)(-3b-1) \geq 0$. In conclusione

$$\Delta(b) \geq 0 \Leftrightarrow b \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$$

L'equazione iniziale quindi ha almeno una soluzione se e solo se $b \in [-\frac{1}{3}, 1]$.

7. Determinare:

$$A = \{x \in \mathcal{R}; x^3 - 4x + 3 > 0\}$$

Osserviamo che, posto

$$p(x) = x^3 - 4x + 3$$

risulta $p(1) = 0$. Pertanto il polinomio di terzo grado $p(x)$, per il Teorema di Ruffini, è divisibile per $x - 1$. Facendo la divisione, risulta:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 - 4x + 3 & x - 1 \\ -x^3 + & x^2 \\ \hline & x^2 - 4x + 3 \\ & -x^2 + x \\ \hline & -3x + 3 \\ & 3x - 3 \\ \hline & 0 \end{array}$$

Possiamo quindi concludere che

$$x^3 - 4x + 3 = (x - 1)(x^2 + x - 3)$$

Studiando il segno dei due fattori, si ottiene:

$$\begin{array}{rcl} \frac{- \ - \ - \ - \ + \ + \ + \ +}{1} & \text{Primo fattore} \\ + \ + \ + \ - \ - \ - \ - \ + \ + \ + & \text{Secondo fattore} \\ x_1 & x_2 \end{array}$$

dove

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \quad e \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} .$$

(Da notare che $x_2 > 1$. Infatti

$$x_2 > 1 \Leftrightarrow \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} > 1 \Leftrightarrow \sqrt{13} > 3 \Leftrightarrow 13 > 9) .$$

Possiamo quindi concludere che

$$A = \left(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}, 1 \right) \cup \left(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, +\infty \right) .$$

1.6 Esercizi proposti

Determinare i seguenti insiemi:

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R}; \frac{x+1}{x-2} \leq \frac{2x-3}{x+2} \right\} , \quad B = \left\{ x \in \mathcal{R}; \sqrt{(x+1)(2-x)} \leq x-1 \right\} ,$$

$$C = \left\{ x \in \mathcal{R}; \frac{x^2+x+1}{x-3} \geq 2x+1 \right\} , \quad D = \left\{ x \in \mathcal{R}; \sqrt{(x+2)(x-1)} \leq \frac{x+3}{2} \right\}$$

(La soluzione si trova alla fine del Capitolo).

1.7 Particolari sottoinsiemi di $\mathcal{R}$

L'insieme dei numeri reali contiene come sottoinsiemi alcuni altri insiemi numerici che useremo spesso nel seguito e che quindi vogliamo mettere in risalto.

L'insieme $\mathcal{N}$ dei **numeri naturali**:

$$\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots\} .$$

L'insieme $\mathcal{Z}$ dei **numeri interi relativi**:

$$\mathcal{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} .$$

L'insieme $\mathcal{Q}$ dei **numeri razionali**:

$$\mathcal{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; \quad p \in \mathcal{Z} , \quad q \in \mathcal{N} \right\} .$$

Ricordiamo brevemente che ogni numero razionale si può rappresentare in infiniti modi come una frazione, infatti se $p q' = p' q$ $p, p' \in \mathcal{Z}$, $q, q' \in \mathcal{N}$ si ha

$$r = \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$$

È possibile inoltre rappresentare un numero razionale r come frazione $\frac{p}{q}$ con p e q numeri primi tra loro, ossia privi di fattori comuni (oltre 1).
È evidente che risulta

$$\mathcal{N} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{Q} \subset \mathcal{R}$$

e che l'inclusione è stretta.

Verifichiamo per esempio che $\mathcal{Q}$ è un sottoinsieme proprio di $\mathcal{R}$ provando che $\sqrt{2} \notin \mathcal{Q}$.
Supponiamo infatti, ragionando per assurdo, che esista un numero razionale r con $r^2 = 2$. Possiamo rappresentare r come $\frac{p}{q}$ con $p, q \in \mathcal{N}$ e p e q primi tra loro. Risulta dunque:

$$r^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$$

Ne deriva quindi che p^2 è un numero pari, ma allora anche p è un numero pari, ossia $p = 2p'$. Otteniamo allora

$$p^2 = 4p'^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2p'^2$$

Se ne conclude che q^2 è pari e quindi che anche q è pari. Ma se p e q sono entrambi pari non sono primi tra loro come avevamo supposto all'inizio e questo porta ad una contraddizione.

Esercizio

Verificare che l'insieme $\mathcal{Q}$ dei numeri razionali non ha la proprietà di completezza. In particolare verificare che i due sottoinsiemi di $\mathcal{Q}$:

$$A = \{r \in \mathcal{Q}; r > 0, r^2 \leq 2\}$$

$$B = \{s \in \mathcal{Q}; s > 0, s^2 \geq 2\}$$

sono separati, ma non esiste in $\mathcal{Q}$ nessun elemento di separazione.

(Suggerimento. Verificare che se esistesse tale elemento di separazione $c \in \mathcal{Q}$ dovrebbe essere $c^2 = 2$)

1.8 Estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme

Fondamentale in tutto il corso di Analisi I saranno i concetti di estremo superiore ed estremo inferiore di un insieme. Cominciamo col dare alcune definizioni preliminari.

Definizione 1.1 (Definizione di massimo e minimo elemento di un insieme)

Diremo che $m \in \mathcal{R}$ è il **massimo** di un insieme A se

$$m \in A \text{ e } a \leq m \quad \forall a \in A.$$

Diremo similmente che $m' \in \mathcal{R}$ è il **minimo** di un insieme A se

$$m' \in A \text{ e } m' \leq a \quad \forall a \in A.$$

Useremo rispettivamente le notazioni

$$\max A \text{ e } \min A$$

per indicare il massimo e il minimo elemento di A , quando questi numeri esistono.

Da notare il fatto, come vedremo con semplici esempi, che un insieme A può non avere massimo o minimo o nè massimo e nè minimo. Ad esempio:

- i) se $A = (0, 1) = \{x \in \mathcal{R}; 0 < x < 1\}$, A non ha nè massimo nè minimo;

ii) se

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} ; n \in \mathcal{N} \right\}$$

allora $m = \frac{1}{2}$ è il minimo di A , mentre A non ha massimo (verificare queste affermazioni per esercizio);

iii) infine se $A = [-1, 1] = \{x \in \mathcal{R} ; -1 \leq x \leq 1\}$, allora A ha massimo e minimo e $-1 = \min A$, $1 = \max A$.

Definizione 1.2 (Definizione di maggiorante e di minorante)

Diremo che un numero $b \in \mathcal{R}$ è un **maggiorante** di A se

$$a \leq b \quad \forall a \in A .$$

Analogamente diremo che un numero $d \in \mathcal{R}$ è un **minorante** di A se

$$d \leq a \quad \forall a \in A .$$

Se esiste almeno un maggiorante di A , diremo che A è **superiormente limitato**, mentre se esiste almeno un minorante di A , diremo che A è **inferiormente limitato**.

NOTA BENE È interessante notare che, se le proprietà ora definite vengono espresse mediante i quantificatori matematici $\forall$ ed $\exists$, allora la negazione di tali proprietà si può esprimere scambiando formalmente i due quantificatori. Infatti

- A è superiormente limitato se $\exists b \in \mathcal{R}$ tale che $\forall a \in A \quad a \leq b$.
- A non è superiormente limitato se $\forall b \in \mathcal{R} \quad \exists a \in A$ con $a > b$.

Analogamente

- $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante di A se $\forall a \in A \quad a \leq b$.
- $b \in \mathcal{R}$ non è un maggiorante di A se $\exists a \in A$ con $a > b$.

Alcuni esempi

1. Verificare che l'insieme

$$A = \left\{ \frac{x+1}{x^2+x+3} ; x \in \mathcal{R} \right\}$$

è superiormente limitato .

Osserviamo che dalla definizione si ha che l'insieme A è superiormente limitato se $\exists b \in \mathcal{R}$ tale che

$$\frac{x+1}{x^2+x+3} \leq b \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

Osserviamo preliminarmente che, siccome per $x = 0$ la frazione considerata assume il valore $1/3$, se un b con le proprietà richieste esiste deve essere $b \geq 1/3$. Risulta, essendo $x^2 + x + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}$:

$$\frac{x+1}{x^2+x+3} \leq b \Leftrightarrow x+1 \leq bx^2+bx+3b \Leftrightarrow bx^2+(b-1)x+3b-1 \geq 0$$

Pertanto la disuguaglianza di partenza è vera $\forall x \in \mathcal{R}$ se e solo se $\Delta(b) = (b-1)^2 - 4b(3b-1) \leq 0$.
Ossia se e solo se $11b^2 - 2b - 1 \geq 0$ e questo vale se e solo se

$$b \geq b_2 = \frac{1+2\sqrt{3}}{11}$$

Allora b è maggiorante l'insieme A se e solo se $b \geq b_2$.

2. Verificare che l'insieme

$$B = \left\{ 2\sqrt{x^2 + x} - x ; x \in \mathcal{R}, x \geq 0 \right\}$$

non è superiormente limitato.

Sia $b \in \mathcal{R}$ un numero positivo, allora

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x^2 + x} - x > b &\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + x} > x + b \\ &\Leftrightarrow 4(x^2 + x) > x^2 + 2xb + b^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 2(2-b)x - b^2 > 0 \end{aligned}$$

Il delta dell'ultimo polinomio di secondo grado è dato da :

$$\Delta(b) = 4(2-b)^2 + 12b^2 > 0$$

Pertanto, qualunque sia $b > 0$, la disequaglianza

$$2\sqrt{x^2 + x} - x > b$$

è verificata $\forall x \in \mathcal{R}$ con

$$x > \frac{-2(2-b) + \sqrt{\Delta(b)}}{6}$$

Ne deriva quindi che B non è superiormente limitato .

Da notare che un modo, forse più semplice, per ottenere lo stesso risultato poteva essere quello di notare che:

$$2\sqrt{x^2 + x} - x \geq 2\sqrt{x^2} - x = x \quad \forall x \geq 0 .$$

3. Dire se l'insieme:

$$C = \left\{ \frac{x}{x-1} ; x \in \mathcal{R} \quad x \neq 1 \right\}$$

è limitato inferiormente.

Proviamo a verificare che C non è limitato inferiormente, ossia proviamo a verificare che $\forall d \in \mathcal{R}$ la disequaglianza

$$\frac{x}{x-1} < d$$

ha almeno una soluzione. Possiamo supporre che sia $d < 0$, allora risulta:

$$\frac{x}{x-1} < d \Leftrightarrow \frac{x-dx+d}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(1-d)x+d}{x-1} < 0$$

Osserviamo ora che il numeratore si annulla in

$$\frac{-d}{1-d} = \frac{1-d-1}{1-d} = 1 - \frac{1}{1-d} < 1$$

Pertanto se $d < 0$, la disuguaglianza

$$\frac{x}{x-1} < d \quad \text{è verificata} \quad \forall x \in \left(\frac{-d}{1-d}, 1 \right) .$$

Pertanto C non è inferiormente limitato.

4. Dire se l'insieme:

$$D = \left\{ \frac{x-2}{x^2-2x+3} ; x \in \mathcal{R} \right\}$$

è limitato superiormente.

Proviamo a verificare che D non è limitato superiormente, ossia proviamo a verificare che $\forall b \in \mathcal{R}$ la disequaglianza

$$\frac{x-2}{x^2-2x+3} > b$$

ha almeno una soluzione. Possiamo supporre che sia $b > 0$. Risulta:

$$\frac{x-2}{x^2-2x+3} > b \Leftrightarrow bx^2 - 2bx + 3b - x + 2 = bx^2 - (2b+1)x + 3b + 2 < 0$$

Ora questa ultima disequazione ha almeno una soluzione se e solo se

$$\Delta(b) = (2b+1)^2 - 4b(3b+2) = 4b^2 + 4b + 1 - 12b^2 - 8b = -(8b^2 + 4b - 1) > 0$$

Ora il polinomio di secondo grado trovato ha come radici:

$$b_1 = \frac{-2 - \sqrt{4+8}}{8} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{4} \quad e \quad b_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{4}$$

e quindi $\Delta(b) > 0$ se e solo se

$$b \in \left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{3}}{4} \right)$$

Ne deriva, in particolare, che se $b > \frac{-1+\sqrt{3}}{4}$, la disequaglianza

$$\frac{x-2}{x^2-2x+3} > b$$

non ha soluzioni e quindi

$$\frac{x-2}{x^2-2x+3} \leq b \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

e quindi b è un maggiorante di D e D è superiormente limitato.

5. Verificare che l'insieme

$$E = \left\{ \sqrt{x^2+x} - x ; x \in \mathcal{R}, x \geq 0 \right\}$$

è superiormente limitato.

Sia $b \in \mathcal{R}$ un numero positivo, allora

$$\sqrt{x^2+x} - x \leq b \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x} \leq x + b$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x \leq x^2 + 2xb + b^2 \Leftrightarrow (1-2b)x \leq b^2$$

Siccome per $b = 1/2$ la disequaglianza si riduce all'identità $0 \leq 1/4$, si ottiene che $b = 1/2$ è un maggiorante dell'insieme E . Si può vedere anche facilmente (farlo per esercizio) che $1/2$ è il più piccolo dei maggioranti.

Vale il seguente

Teorema 1.2 Se $A \subset \mathcal{R}$ è un insieme superiormente limitato, allora l'insieme B dei maggioranti di A ha un elemento minimo.

Tale elemento minimo verrà indicato col simbolo $\sup A$ e chiamato l'**estremo superiore** di A .

Dimostrazione. La coppia di insiemi A e B è separata, infatti se $a \in A$ e $b \in B$ si ha che $a \leq b$ (essendo b un maggiorante di A). Allora per la proprietà di completezza di $\mathcal{R}$, esiste $c \in \mathcal{R}$ tale che

$$i) \quad a \leq c \quad \forall a \in A,$$

$$ii) \quad c \leq b \quad \forall b \in B.$$

La i) dice che c è un maggiorante di A e quindi $c \in B$, la ii) dice che $c = \min B$.

q.e.d.

L'estremo superiore è caratterizzato dalle seguenti proprietà.

Proprietà caratteristiche dell'estremo superiore

Sia $c \in \mathcal{R}$, allora $c = \sup A$ se e solo se:

- i) $a \leq c \quad \forall a \in A$;
- ii) $\forall \varepsilon \in \mathcal{R}, \varepsilon > 0, \exists a \in A$ con $a > c - \varepsilon$.

Consideriamo ora qualche esempio .

1. Sia

$$A = \left\{ \frac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 1} ; n \in \mathcal{N} \right\}$$

Verificare che $\sup A = 2$.

i) La prima verifica da fare è vedere se

$$\frac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 1} \leq 2 \quad \forall n \in \mathcal{N} .$$

Risulta

$$\frac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 1} \leq 2 \Leftrightarrow 2n^2 - n + 1 \leq 2n^2 + 2 \Leftrightarrow n \geq -1$$

Pertanto la disequaglianza considerata vale $\forall n \in \mathcal{N}$.

ii) Si tratta di verificare che, se $\varepsilon \in \mathcal{R}, \varepsilon > 0$, allora la disequaglianza (nella variabile $n \in \mathcal{N}$)

$$\frac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 1} > 2 - \varepsilon$$

ammette almeno una soluzione. Risulta

$$\frac{2n^2 - n + 1}{n^2 + 1} > 2 - \varepsilon \Leftrightarrow 2n^2 - n + 1 > 2n^2 + 2 - \varepsilon n^2 - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon n^2 - n + \varepsilon - 1 > 0$$

Ora il delta dell'ultimo polinomio di secondo grado è dato da

$$\Delta(\varepsilon) = 1 - 4\varepsilon(\varepsilon - 1)$$

Pertanto, supposto $\varepsilon < 1$, risulta $\Delta(\varepsilon) > 0$ e quindi la disequaglianza di partenza è vera $\forall n \in \mathcal{N}$, con

$$n > \frac{1 + \sqrt{\Delta(\varepsilon)}}{2\varepsilon}$$

2. Sia

$$A = \left\{ \frac{x+1}{x^2+1} ; x \in \mathcal{R} \right\}$$

Dire se A è limitato superiormente e, in caso affermativo, calcolare $\sup A$.

Ricordiamo che $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante dell'insieme A se

$$\frac{x+1}{x^2+1} \leq b \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

Studiamo ora questa disequaglianza osservando che possiamo supporre $b > 0$ (in effetti se poniamo $x = 0$, otteniamo che deve essere $1 \leq b$). Ora

$$\frac{x+1}{x^2+1} \leq b \Leftrightarrow bx^2 - x + b - 1 \geq 0$$

Ricordiamo ora che l'ultima disuguaglianza è vera $\forall x \in \mathcal{R}$ se e solo se

$$\Delta(b) = 1 - 4b(b-1) \leq 0 \quad \text{ossia} \quad 4b^2 - 4b - 1 \geq 0$$

Pertanto deve essere

$$b \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$$

Ricordando che $b \geq 1$, si ricava che b è un maggiorante di A se e solo se

$$b \in \left[\frac{1+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$$

Allora, ricordando che $\sup A$ è il più piccolo dei maggioranti di A , si ha

$$\sup A = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

Verifichiamo per concludere che $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ è anche il massimo di A , facendo vedere che $\frac{1+\sqrt{2}}{2} \in A$, ossia che l'equazione

$$\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

ammette almeno una soluzione. Infatti risulta

$$\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2(x+1) = (1+\sqrt{2})(x^2+1) \Leftrightarrow (1+\sqrt{2})x^2 - 2x + \sqrt{2} - 1 = 0$$

Infine, essendo

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 0,$$

otteniamo che l'equazione considerata ammette l'unica soluzione

$$x = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$

In maniera simile alla dimostrazione del Teorema 1.2, si può dimostrare il seguente:

Teorema 1.3 *Se $A \subset \mathcal{R}$ è un insieme inferiormente limitato, allora l'insieme dei minoranti di A ha un massimo.*

Il massimo dei minoranti di A verrà indicato con $\inf A$ e chiamato l'**estremo inferiore** di A . L'estremo inferiore è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

Proprietà caratteristiche dell'estremo inferiore

Sia $d \in \mathcal{R}$, allora $d = \inf A$ se e solo se:

- i) $d \leq a \quad \forall a \in A$;
- ii) $\forall \varepsilon \in \mathcal{R}, \varepsilon > 0, \exists a \in A$ con $a < d + \varepsilon$.

1.9 Alcuni esercizi sull'estremo superiore e sull'estremo inferiore

1. Sia

$$A = \left\{ \frac{n+5}{\sqrt{n^2+n}} ; n \in \mathcal{N} \right\} .$$

Verificare che $\inf A = 1$ e dire se $1 = \min A$.

Risulta

$$\frac{n+5}{\sqrt{n^2+n}} \geq 1 \Leftrightarrow n^2 + 10n + 25 \geq n^2 + n \Leftrightarrow 9n + 25 \geq 0$$

Pertanto il numero 1 verifica la prima proprietà caratteristica dell'estremo inferiore. D'altra parte se $\varepsilon > 0$, ottengo

$$\frac{n+5}{\sqrt{n^2+n}} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow n^2 + 10n + 25 < (1 + \varepsilon)^2(n^2 + n) \Leftrightarrow [(1 + \varepsilon)^2 - 1]n^2 + [(1 + \varepsilon)^2 - 10]n - 25 > 0$$

Siccome il coefficiente di n^2 : $(1 + \varepsilon)^2 - 1 = 2\varepsilon + \varepsilon^2$ è positivo e $\Delta(\varepsilon) > 0$, ottengo che la disuguaglianza ottenuta è verificata se

$$n > \frac{-[(1 + \varepsilon)^2 - 1] + \sqrt{\Delta(\varepsilon)}}{(1 + \varepsilon)^2 - 1}$$

Pertanto 1 verifica anche la seconda proprietà caratteristica dell'estremo inferiore. Osserviamo infine che $1 \notin A$ e quindi A non ha minimo.

2. Sia

$$A = \left\{ \frac{x+1}{x-1} ; x \in \mathcal{R}, x > 1 \right\}$$

Verificare che A non è superiormente limitato, che è inferiormente limitato e $\inf A = 1$.

Si tratta di provare che $\forall b \in \mathcal{R}$, la disuguaglianza

$$\frac{x+1}{x-1} > b$$

ha sempre almeno una soluzione $x > 1$. Essendo

$$\frac{x+1}{x-1} > 1 \quad \forall x \in \mathcal{R} \quad x > 1 ,$$

possiamo supporre che sia $b > 1$ (altrimenti, se fosse $b \leq 1$, avrei

$$\frac{x+1}{x-1} > 1 \geq b \quad \forall x > 1)$$

Ottengo quindi

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1} > b &\Leftrightarrow \frac{x+1-bx+b}{x-1} > 0 \Leftrightarrow (\text{essendo } x > 1) \quad (b-1)x < 1+b \\ &\Leftrightarrow (\text{essendo } b > 1) \quad x < \frac{1+b}{b-1} \end{aligned}$$

Notiamo infine che

$$\frac{1+b}{b-1} = \frac{2+b-1}{b-1} = 1 + \frac{2}{b-1} > 1$$

Possiamo concludere quindi che se $1 < x < 1 + \frac{2}{b-1}$, la disuguaglianza

$$\frac{x+1}{x-1} > b$$

è verificata. Infine per verificare che $\inf A = 1$, avendo già notato che 1 verifica la prima proprietà caratteristica dell'estremo inferiore, basta provare che verifica anche la seconda. Sia dunque $\varepsilon \in \mathcal{R}$ con $\varepsilon > 0$, risulta allora, se $x > 1$:

$$\frac{x+1}{x-1} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow x+1 < x-1 + \varepsilon x - \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon x > 2 + \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}$$

E quindi 1 verifica anche la seconda proprietà caratteristica dell'estremo inferiore.

3. Sia

$$A = \left\{ \sqrt{n^2 + n} - n ; n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare $\sup A$ e $\inf A$.

Ricordiamo che $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante di A se e solo se

$$\sqrt{n^2 + n} - n \leq b \quad , \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Essendo la differenza $\sqrt{n^2 + n} - n$ sempre positiva, posso supporre $b > 0$. Pertanto:

$$\sqrt{n^2 + n} - n \leq b \Leftrightarrow \sqrt{n^2 + n} \leq n + b \Leftrightarrow n^2 + n \leq n^2 + 2bn + b^2 \Leftrightarrow (1 - 2b)n \leq b^2$$

Siccome si richiede che la disuguaglianza sia verificata $\forall n \in \mathcal{N}$, deve essere $1 - 2b \leq 0$ ossia $b \geq 1/2$. Se ne conclude che $b \in \mathcal{R}$ è maggiorante di A se e solo se $b \geq 1/2$. Pertanto $\sup A = 1/2$. Da notare che $1/2 \notin A$ in quanto l'equazione in $n \in \mathcal{N}$:

$$\sqrt{n^2 + n} - n = \frac{1}{2}$$

non ha soluzioni.

Per quanto riguarda l'estremo inferiore dell'insieme A , possiamo osservare che $d \in \mathcal{R}$ è minorante dell'insieme A se e solo se

$$\sqrt{n^2 + n} - n \geq d \quad , \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Supponendo anche in questo caso $d > 0$, ottengo:

$$\sqrt{n^2 + n} - n \geq d \Leftrightarrow n^2 + n \geq n^2 + 2dn + d^2 \Leftrightarrow (1 - 2d)n \geq d^2$$

Deve essere allora

$$1 - 2d > 0 \quad e \quad n \geq \frac{d^2}{1 - 2d}$$

Siccome si richiede che la disuguaglianza sia verificata $\forall n \in \mathcal{N}$, deve essere

$$d < \frac{1}{2} \quad e \quad 1 \geq \frac{d^2}{1 - 2d}$$

Risolvendo l'ultima disuguaglianza si ha:

$$1 \geq \frac{d^2}{1 - 2d} \Leftrightarrow d^2 + 2d - 1 \leq 0$$

Le radici del polinomio di secondo grado trovato sono $d_1 = -1 - \sqrt{2}$ e $d_2 = -1 + \sqrt{2}$. Risulta pertanto che $d \in \mathcal{R}$ è un minorante se e solo se $d \leq \sqrt{2} - 1$ e quindi $\inf A = \sqrt{2} - 1$. Da notare infine che $\sqrt{2} - 1 \in A$ in quanto è il valore che si ottiene dall'espressione $\sqrt{n^2 + n} - n$ per $n = 1$. Possiamo quindi concludere che $\sqrt{2} - 1 = \min A$.

4. Dire se l'insieme:

$$A = \left\{ \sqrt{n^2 + 7n} - n , n \in \mathcal{N} \right\}$$

è limitato superiormente e in caso affermativo calcolare $\sup A$.

Tenendo conto che gli elementi di A sono positivi, un numero $b > 0$ è un maggiorante se e solo se

$$\sqrt{n^2 + 7n} - n \leq b \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Ora

$$\sqrt{n^2 + 7n} - n \leq b \Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 7n} \leq n + b \Leftrightarrow n^2 + 7n \leq n^2 + 2bn + b^2 \Leftrightarrow (7 - 2b)n \leq b^2$$

Ora se $7 - 2b = 0$, ossia se $b = 7/2$, la disuguaglianza diventa $0 \leq 49/4$ e quindi $b = 7/2$ è un maggiorante. Infine se $b < 7/2$, allora $7 - 2b > 0$ e quindi la disuguaglianza di partenza è verificata se e solo se

$$n \leq \frac{b^2}{7 - 2b}$$

e quindi non è verificata per ogni $n \in \mathcal{N}$. Pertanto $\sup A = 7/2$. Osserviamo infine che $7/2 \notin A$, infatti

$$\sqrt{n^2 + 7n} - n = \frac{7}{2} \Leftrightarrow n^2 + 7n = n^2 + 7n + \frac{49}{4} \Leftrightarrow 0 = \frac{49}{4}$$

Pertanto l'insieme A non ha massimo.

5. Sia

$$A = \left\{ \frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1}, x \in \mathcal{R}, x \neq 1 \right\}$$

Calcolare $\sup A$ e $\inf A$.

Verifichiamo che $\sup A = +\infty$, ossia che l'insieme A non è superiormente limitato. Infatti sia $b \in \mathcal{R}$ un numero con $b > 1$, allora:

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1} > b \Leftrightarrow x^2 + x - 1 > bx^2 - 2bx + b \Leftrightarrow (b - 1)x^2 - (2b + 1)x + b + 1 < 0$$

Siccome $\Delta(b) = (2b + 1)^2 - 4(b - 1)(b + 1) = 4b^2 + 4b + 1 - 4b^2 + 4 = 4b + 5 > 0$ risulta che la disuguaglianza considerata è verificata se

$$x \in \left(\frac{2b + 1 - \sqrt{\Delta(b)}}{2(b - 1)}, \frac{2b + 1 + \sqrt{\Delta(b)}}{2(b - 1)} \right)$$

D'altra parte $d \in \mathcal{R}$, $d < 0$ è un minorante l'insieme A se e solo se

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1} \geq d \quad \forall x \in \mathcal{R}, x \neq 1$$

Risulta

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1} \geq d \Leftrightarrow x^2 + x - 1 \geq dx^2 - 2dx + d \Leftrightarrow (1 - d)x^2 + (1 + 2d)x - (1 + d) \geq 0$$

Siccome $\Delta(d) = (1 + 2d)^2 - 4(1 + d)(1 - d) = 5 + 4d$, la disuguaglianza considerata vale per ogni $x \neq 1$ se e solo se $\Delta(d) \leq 0$ ossia se e solo se $d \leq -5/4$. Possiamo quindi concludere che

$$\inf A = -\frac{5}{4}$$

Da notare che $-5/4$ è anche il minimo elemento dell'insieme A .

6. Sia

$$A = \{ \sqrt{x^2 + x + 2} - x - 1, x \in \mathcal{R} \}$$

Verificare che $\inf A = -1/2$. Verifichiamo che $-1/2$ verifica le proprietà caratteristiche dell'estremo inferiore, ossia che:

a)

$$\sqrt{x^2 + x + 2} - x - 1 \geq -\frac{1}{2} \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

b) $\forall \varepsilon \in \mathcal{R}, \varepsilon > 0, \exists x \in \mathcal{R}$ con

$$\sqrt{x^2 + x + 2} - x - 1 < -\frac{1}{2} + \varepsilon$$

Risulta

$$\sqrt{x^2 + x + 2} - x - 1 \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 2} \geq x + 1 - \frac{1}{2} = x + \frac{1}{2}$$

Osserviamo infine che se $x + 1/2 < 0$ la disuguaglianza precedente é verificata, mentre se $x + 1/2 \geq 0$, risulta

$$\sqrt{x^2 + x + 2} \geq x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 + x + 2 \geq x^2 + x + \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2 \geq \frac{1}{4}$$

Pertanto la a) é verificata.

D'altra parte:

$$\sqrt{x^2 + x + 2} - x - 1 < -\frac{1}{2} + \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 2} < x + \frac{1}{2} + \varepsilon$$

Deve quindi essere $x + \frac{1}{2} + \varepsilon \geq 0$, ossia $x \geq -\frac{1}{2} - \varepsilon$ e in questo caso risulta, elevando al quadrato:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x + 2} - x - 1 < -\frac{1}{2} + \varepsilon &\Leftrightarrow x^2 + x + 2 < x^2 + \frac{1}{4} + \varepsilon^2 + x + 2\varepsilon x + \varepsilon \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\varepsilon x > \frac{7}{4} - \varepsilon - \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Quindi l'ultima disuguaglianza é equivalente a

$$x > \frac{\frac{7}{4} - \varepsilon - \varepsilon^2}{2\varepsilon}$$

Pertanto é verificata anche la proprietà b) e $-1/2 = \inf A$.

7. Sia

$$A = \left\{ \frac{x+3}{(x-1)^2}, x \in \mathcal{R}, x \neq 1 \right\}$$

Calcolare $\inf A$ e $\sup A$.

Essendo l'estremo inferiore il piú grande dei minoranti, cerchiamo di determinare l'insieme dei minoranti. Dalla definizione un numero $d \in \mathcal{R}$ é un minorante se e solo se:

$$\frac{x+3}{(x-1)^2} \geq d \quad \forall x \in \mathcal{R}, x \neq 1$$

Siccome la frazione da studiare assume valori anche negativi, possiamo supporre che sia $d < 0$. Si ottiene:

$$\frac{x+3}{(x-1)^2} \geq d \Leftrightarrow x+3 \geq d(x^2 - 2x + 1) \Leftrightarrow -dx^2 + (2d+1)x + 3-d \geq 0$$

Affinché l'ultima disuguaglianza sia vera per ogni $x \neq 1$, deve essere $\Delta(d) \leq 0$ ossia

$$\Delta(d) = (2d+1)^2 - 4d(3-d) = 4d^2 + 4d + 1 + 12d - 4d^2 = 16d + 1$$

Pertanto $\Delta(d) \leq 0 \Leftrightarrow d \leq -1/16$. Ne segue che $-1/16$ é l'estremo inferiore dell'insieme A . Osserviamo che $-1/16 \in A$ in quanto si ottiene dalla frazione considerata per $x = -7$, pertanto $-1/16 = \min A$. D'altra parte l'insieme A non é superiormente limitato. Infatti se $b \in \mathcal{R}$ é un numero positivo, risulta:

$$\frac{x+3}{(x-1)^2} > b \Leftrightarrow x+3 > b(x^2 - 2x + 1) \Leftrightarrow bx^2 - (2b+1)x + b-3 < 0$$

Affinché l'ultima disuguaglianza ammetta almeno una soluzione deve essere $\Delta(b) \geq 0$ ed essendo

$$\Delta(b) = (2b+1)^2 - 4b(b-3) = 4b^2 + 4b + 1 + 12b - 4b^2 = 16b + 1$$

risulta $\Delta(b) > 0$ e la disuguaglianza iniziale é verificata solo se

$$\frac{2b+1-\sqrt{16b+1}}{2b} < x < \frac{2b+1+\sqrt{16b+1}}{2b}$$

1.10 Esercizi proposti

1. Sia

$$A = \{\sqrt{n^2 + 3} - n ; n \in \mathcal{N}\}$$

Verificare che $\inf A = 0$ e $\sup A = \max A = 1$.

2. Sia

$$A = \{\sqrt{n^2 + 2n} - n ; n \in \mathcal{N}\}$$

Dire se A è limitato superiormente e, in caso affermativo, calcolare il $\sup A$.

3. Sia

$$A = \{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1} ; n \in \mathcal{N}\}$$

Verificare che $\inf A = 0$.

4. Sia

$$A = \left\{ \sqrt{n^2 + n + 1} - n ; n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare $\sup A$ e $\inf A$ e dire se sono massimo e minimo di A .

5. Dire se l'insieme

$$A = \left\{ \frac{3x-1}{x^2+x+3}, x \in \mathcal{R} \right\}$$

è limitato superiormente e in caso affermativo calcolare $\sup A$.

(La soluzione si trova alla fine del capitolo).

1.11 Alcuni complementi

Useremo in questo paragrafo le proprietà caratteristiche dell'estremo superiore ed inferiore per ottenere alcune proprietà dei numeri che, qualche volta, useremo nel seguito.

a) **Proprietà archimedeica dei numeri reali**

Siano a, b due numeri reali positivi, allora esiste $n \in \mathcal{N}$ tale che $na > b$.

Dimostrazione Supponiamo, ragionando per assurdo, che esistano due numeri reali positivi a, b tali che $na \leq b \quad \forall n \in \mathcal{N}$. Allora l'insieme

$$A = \{na ; n \in \mathcal{N}\}$$

sarebbe limitato superiormente. Indichiamo con $c = \sup A$ e ricordiamo che:

i) $na \leq c \quad \forall n \in \mathcal{N}$;

ii) $\forall \varepsilon \in \mathcal{R} \text{ con } \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathcal{N} \text{ con } na > c - \varepsilon$.

Applicando infine la seconda proprietà con $\varepsilon = a$, si otterrebbe un naturale n con $na > c - a$ e quindi $(n+1)a > c$ e questo è in contrasto con la prima proprietà caratteristica dell'estremo superiore in quanto $(n+1)a \in A$.

b) Se $A \subset \mathcal{N}$ è diverso dal vuoto, allora A ha un elemento minimo.

Dimostrazione Esercizio (Basta dimostrare che $m = \inf A \in A$).

c) $\mathcal{Q}$ è denso in $\mathcal{R}$, ossia $\forall a, b \in \mathcal{R}$ con $a < b$, $\exists r \in \mathcal{Q}$ con $a < r < b$.

Dimostrazione Possiamo supporre $0 \leq a < b$. Per la proprietà archimedeica dei numeri, esiste $n \in \mathcal{N}$ con $n(b-a) > 1$. Indichiamo ora con

$$A = \{k \in \mathcal{N} ; \frac{k}{n} \geq b\}$$

Sempre per la proprietà archimedeica $A \neq \emptyset$. Sia $m = \min A$. Essendo

$$\frac{1}{n} < b - a \leq b$$

risulta $m \geq 2$ ed inoltre $\frac{m}{n} \geq b$ e $\frac{m-1}{n} < b$ perchè $m \in A$ e $m-1 \notin A$. D'altra parte

$$\frac{m-1}{n} = \frac{m}{n} - \frac{1}{n} > b - (b-a) = a$$

Pertanto il numero razionale $r = \frac{m-1}{n}$ gode della proprietà richiesta, ossia $a < r < b$.

1.12 Principio di Induzione

Concludiamo questo primo capitolo sui numeri reali, parlando di una proprietà del sottoinsieme di $\mathcal{R}$ costituito dall'insieme dei numeri naturali $\mathcal{N}$. Tale proprietà, nota col nome di **principio di induzione**, è la seguente :

Principio di Induzione Sia $A \subset \mathcal{N}$ un insieme tale che:

- i) $1 \in A$,
- ii) se $n \in A \Rightarrow n+1 \in A$,

Allora $A = \mathcal{N}$.

Tale principio viene spesso usato per dimostrare che una data proposizione relativa al numero naturale n è vera per ogni numero naturale. Infatti, se indichiamo con $\mathcal{P}(n)$ una proposizione relativa ad n , se riusciamo a verificare che:

- i) $\mathcal{P}(1)$ è vera ,
- ii) se $\mathcal{P}(n)$ è vera allora anche $\mathcal{P}(n+1)$ è vera ,

Allora ne deriva che $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n \in \mathcal{N}$.

La proprietà ii) viene comunemente chiamata **proprietà induttiva**.

La conclusione che $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n \in \mathcal{N}$ si ottiene osservando che, posto

$$A = \{n \in \mathcal{N} ; \mathcal{P}(n) \text{ è vera} \} ,$$

A verifica le ipotesi del principio di induzione e quindi $A = \mathcal{N}$.

Da notare che, se $\mathcal{P}(n)$ verifica la proprietà ii) e la i) viene sostituita da

$$iii) \mathcal{P}(n_0) \text{ è vera (dove } n_0 \text{ è un dato numero naturale) ,}$$

allora si ottiene che $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n \geq n_0$.

Consideriamo ora alcuni esempi.

1. Verificare che $\forall n \in \mathcal{N}$, vale la formula :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} .$$

i) se $n = 1$, a primo membro della formula ho 1 e a secondo membro ho $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Pertanto l'uguaglianza vale.

ii) Supponiamo ora che la formula sia valida per un dato numero naturale n . Ottengo

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= (1 + 2 + \dots + n) + (n+1) = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} . \end{aligned}$$

Ossia la validità della formula per $n+1$.

2. Verificare che se $a \in \mathcal{R}$ $a \neq 1$, vale la formula:

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} .$$

i) Se $n = 1$, a primo membro ho $1 + a$ e a secondo membro

$$\frac{1 - a^2}{1 - a} = 1 + a$$

e quindi la formula vale,

ii) Supponiamo ora che la formula valga per un dato numero naturale n . Ottengo:

$$\begin{aligned} 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n + a^{n+1} &= \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} + a^{n+1} = \\ &= \frac{1 - a^{n+1} + a^{n+1} - a^{n+2}}{1 - a} = \frac{1 - a^{n+2}}{1 - a} . \end{aligned}$$

Ottengo quindi la validità della formula per $n+1$.

3. Verificare che $\forall n \in \mathcal{N}$, vale la formula :

$$1 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6} \cdot (2n+1)(n+1) .$$

i) se $n = 1$, a primo membro della formula ho 1 e a secondo membro ho $\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 2 = 1$. Pertanto l'uguaglianza vale.

ii) Supponiamo ora che la formula sia valida per un dato numero naturale n . Ottengo

$$\begin{aligned} 1 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= (1 + 2^2 + \dots + n^2) + (n+1)^2 = \\ &= \frac{n}{6} \cdot (2n+1)(n+1) + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6} \cdot (2n^2 + n + 6n + 6) = \frac{n+1}{6} \cdot (2n+3)(n+2) . \end{aligned}$$

Ossia la validità della formula per $n+1$.

4. **Disuguaglianza di Bernoulli** . $\forall x \in \mathcal{R}$, $x \geq -1$ e $\forall n \in \mathcal{N}$, vale la disuguaglianza:

$$(1+x)^n \geq 1 + nx .$$

i) Se $n = 1$, ottengo $1 + x \geq 1 + x$. Pertanto in questo caso la disuguaglianza è vera (si riduce a una uguaglianza),

ii) Supponiamo ora che la disuguaglianza sia valida per un dato numero naturale n , allora ottengo:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.\end{aligned}$$

Otengo quindi che vale la disuguaglianza anche per $n+1$.

5. Verificare che $\forall n \geq 4$ vale la disuguaglianza $2^n \geq n^2$.

i) Se $n = 4$, ottengo

$$2^4 = 16 = 4^2$$

e quindi, in questo caso vale il segno di uguale,

ii) Supponiamo ora che la disuguaglianza sia vera per un dato numero naturale $n \geq 4$. Ottengo

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n^2$$

Se ora fosse $2n^2 \geq (n+1)^2$, potrei concludere che $2^{n+1} \geq (n+1)^2$ e quindi ottenere la disuguaglianza cercata per $n+1$. D'altra parte

$$\begin{aligned}2n^2 \geq (n+1)^2 &\Leftrightarrow 2n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n^2 - 2n - 1 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow n \geq 3.\end{aligned}$$

6. **Binomio di Newton** Se $n \in \mathcal{N}$ e $k \in \mathcal{Z}$ con $0 \leq k \leq n$, indichiamo con

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

dove usiamo la convenzione che $0! = 1$ e se $n \geq 1$ indichiamo con $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$. Il numero $n!$ viene chiamato **n fattoriale**.

I numeri $\binom{n}{k}$ (si legge n sopra k) vengono chiamati i **coefficienti binomiali**. Da notare che risulta:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

I coefficienti binomiali hanno le seguenti proprietà :

i)

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

ii) Se $k \geq 1$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

Verifichiamo, per esempio, che vale la ii).

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} + \frac{n(n-1) \cdots (n-k+2)}{(k-1)!} = \\ &= \frac{n(n-1) \cdots (n-k+2)}{(k-1)!} \left[\frac{n-k+1}{k} + 1 \right] = \frac{(n+1)n(n-1) \cdots (n-k+2)}{k!} = \binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

Vale la seguente formula

Formula del binomio di Newton. Se $a, b \in \mathcal{R}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Dimostrazione (Viene riportata solo per completezza, ma non é stata svolta a lezione)

Se $n = 1$, la formula è vera. Supponiamo quindi che la formula sia vera per un dato numero naturale n e dimostriamola per $n + 1$. Risulta :

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)(a + b)^n = a(a + b)^n + b(a + b)^n$$

Usando quindi l'ipotesi induttiva, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}(a + b)^{n+1} &= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}\end{aligned}$$

Ponendo ora $h = k + 1$ nella prima somma e $h = k$ nella seconda, ottengo :

$$\begin{aligned}(a + b)^{n+1} &= \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^h b^{n+1-h} + \sum_{h=0}^n \binom{n}{h} a^h b^{n+1-h} = \\ &= a^{n+1} + \sum_{h=1}^n \left[\binom{n}{h-1} + \binom{n}{h} \right] a^h b^{n+1-h} + b^{n+1}\end{aligned}$$

Ricordando infine la proprietà ii) dei coefficienti binomiali, si ottiene

$$(a + b)^{n+1} = b^{n+1} + \sum_{h=1}^n \binom{n+1}{h} a^h b^{n+1-h} + a^{n+1} = \sum_{h=0}^{n+1} \binom{n+1}{h} a^h b^{n+1-h}$$

La dimostrazione è dunque completata.

Da notare che usando la proprietà ii) , si può scrivere rapidamente la seguente tabella dei coefficienti binomiali nota col nome di **Triangolo di Tartaglia**.

$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1
$n = 7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$n = 8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1
...	...

Da notare che dalla formula del binomio con $a = b = 1$, si ottiene:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

1.13 Risoluzione degli esercizi proposti nel Capitolo 1

1.3-i Determinare:

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R} ; \frac{x-3}{x+1} \leq 3 \right\}$$

$$\frac{x-3}{x+1} \leq 3 \Leftrightarrow \frac{x-3-3x-3}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-2x-6}{x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x+3}{x+1} \geq 0$$

Pertanto

$$A = (-\infty, -3] \cup (-1, +\infty) = \{x \in \mathcal{R} ; x \leq -3\} \cup \{x \in \mathcal{R} ; x > -1\} .$$

1.3-ii Determinare:

$$B = \left\{ x \in \mathcal{R} ; \frac{x+6}{x+2} > \frac{x+1}{x-3} \right\}$$

$$\frac{x+6}{x+2} > \frac{x+1}{x-3} \Leftrightarrow \frac{x^2+6x-3x-18-x^2-x-2x-2}{(x+2)(x-3)} > 0 \Leftrightarrow \frac{20}{(x+2)(x-3)} < 0$$

Pertanto $B = (-2, 3)$.

1.3-iii Determinare:

$$C = \left\{ x \in \mathcal{R} ; \frac{x^2+2}{x-2} > x-1 \right\}$$

$$\frac{x^2+2}{x-2} > x-1 \Leftrightarrow \frac{x^2+2-x^2+x+2x-2}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \frac{3x}{x-2} > 0$$

Ne deriva quindi che $C = (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

1.3-iv Determinare:

$$D = \left\{ x \in \mathcal{R} ; \frac{x+3}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} \leq 2 \right\} .$$

$$\frac{x+3}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-2) + (x+2)(x-1) - 2(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} \leq 0$$

Sviluppando il numeratore, si ottiene:

$$x^2 - 2x + 3x - 6 + x^2 - x + 2x - 2 - 2x^2 + 4x + 2x - 4 = 8x - 12$$

Pertanto:

$$\frac{x+3}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)} \leq 0$$

Studiando separatamente il segno di numeratore e denominatore, risulta:

$\frac{\begin{array}{cccccccccc} - & - & - & - & + & + & + & + & + & + \end{array}}{\frac{3}{2}}$	Numeratore
$\frac{\begin{array}{cccccccccc} + & + & + & - & - & - & - & - & - & + & + & + \end{array}}{\begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array}}$	Denominatore

Possiamo quindi concludere che

$$D = (-\infty, 1) \cup [3/2, 2)$$

1.3-v Determinare l'insieme

$$E = \left\{ x \in \mathcal{R} ; \frac{x-1}{x+2} \leq \frac{x+4}{x-3} \right\}$$

Risulta:

$$\frac{x-1}{x+2} \leq \frac{x+4}{x-3} \Leftrightarrow \frac{x^2-3x-x+3-(x^2+4x+2x+8)}{(x+2)(x-3)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{(x+2)(x-3)} \geq 0$$

Studiando separatamente il segno di numeratore e denominatore, risulta:

$$\begin{array}{rcl} \frac{- \quad - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + \quad + \quad + \quad +}{-\frac{1}{2}} & \text{Numeratore} \\ + \quad + \quad + \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad + \quad + \quad + & \text{Denominatore} \\ -2 & 3 \end{array}$$

Pertanto

$$E = \left(-2, -\frac{1}{2}\right] \cup (3, +\infty)$$

1.6-i) Determinare:

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R}; \frac{x+1}{x-2} \leq \frac{2x-3}{x+2} \right\}$$

$$\frac{x+1}{x-2} \leq \frac{2x-3}{x+2} \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+2) - (2x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)} \leq 0$$

Sviluppando il numeratore, ottengo:

$$x^2 + 2x + x + 2 - 2x^2 + 4x + 3x - 6 = -x^2 + 10x - 4$$

Le radici del polinomio di secondo grado che sta al numeratore sono

$$x_1 = 5 - \sqrt{21} \quad e \quad x_2 = 5 + \sqrt{21}$$

Ne deriva quindi che

$$A = (-\infty, -2) \cup [5 - \sqrt{21}, 2) \cup [5 + \sqrt{21}, +\infty)$$

1.6-ii) Determinare:

$$B = \left\{ x \in \mathcal{R}; \sqrt{(x+1)(2-x)} \leq x-1 \right\}$$

Osserviamo che deve essere $(x+1)(2-x) \geq 0$, affinché la radice abbia senso e quindi $x \in [-1, 2]$. Inoltre se $x-1 < 0$, ossia se $x < 1$, la disuguaglianza non è verificata. D'altra parte se $x-1 \geq 0$, ossia $x \geq 1$, allora la disuguaglianza da studiare è equivalente a quella che si ottiene elevando al quadrato entrambi i membri. Si ottiene quindi se $x \geq 1$:

$$\sqrt{(x+1)(2-x)} \leq x-1 \Leftrightarrow 2x - x^2 + 2 - x \leq x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 1 \geq 0$$

Le due radici dell'ultimo polinomio di secondo grado sono

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{4} \quad e \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{4}$$

Se ne conclude che

$$B = \left[\frac{3 + \sqrt{17}}{4}, 2 \right]$$

1.6-iii) Determinare:

$$C = \left\{ x \in \mathcal{R}; \frac{x^2 + x + 1}{x-3} \geq 2x + 1 \right\}$$

$$\frac{x^2 + x + 1}{x-3} \geq 2x + 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 1 - 2x^2 + 6x - x + 3}{x-3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 6x - 4}{x-3} \leq 0$$

Ora il polinomio di secondo grado che sta al numeratore ha le due radici: $x_1 = 3 - \sqrt{13}$ e $x_2 = 3 + \sqrt{13}$. Possiamo quindi concludere che

$$C = (-\infty, 3 - \sqrt{13}] \cup (3 + \sqrt{13}, +\infty)$$

1.6-iv) Determinare:

$$D = \left\{ x \in \mathcal{R}; \sqrt{(x+2)(x-1)} \leq \frac{x+3}{2} \right\}$$

Osserviamo che deve essere $(x+2)(x-1) \geq 0$, affinché la radice abbia senso e quindi $x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$. Inoltre se $x+3 < 0$, ossia se $x < -3$, la disuguaglianza non è verificata. D'altra parte se $x+3 \geq 0$, ossia $x \geq -3$, allora la disuguaglianza da studiare è equivalente a quella che si ottiene elevando al quadrato entrambi i membri. Si ottiene allora se $x \geq -3$:

$$\sqrt{(x+2)(x-1)} \leq \frac{x+3}{2} \Leftrightarrow 4(x^2 - x + 2x - 2) \leq x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 17 \leq 0$$

Le due radici dell'ultimo polinomio di secondo grado sono

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{52}}{3} \quad e \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{52}}{3}$$

Se ne conclude che

$$D = \left[\frac{1 - \sqrt{52}}{3}, -2 \right] \cup \left[1, \frac{1 + \sqrt{52}}{3} \right]$$

1.10-1) Sia

$$A = \{ \sqrt{n^2 + 3} - n ; n \in \mathcal{N} \}$$

Verificare che $\inf A = 0$ e $\sup A = \max A = 1$.

Risulta ovviamente

$$\sqrt{n^2 + 3} - n > 0 \quad \forall n \in \mathcal{N}.$$

D'altra parte, se $\varepsilon > 0$, si ha

$$\sqrt{n^2 + 3} - n < \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 3} < n + \varepsilon \Leftrightarrow n^2 + 3 < n^2 + 2n\varepsilon + \varepsilon^2 \Leftrightarrow n > \frac{3 - \varepsilon^2}{2\varepsilon}$$

e quindi $0 = \inf A$. Osseviamo infine che $1 \in A$ (si ottiene dalla formula per $n = 1$) ed inoltre

$$\sqrt{n^2 + 3} - n \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 3} \leq n + 1 \Leftrightarrow n^2 + 3 \leq n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow n \geq 1.$$

Pertanto $1 = \max A = \sup A$.

1.10-2) Sia

$$A = \{ \sqrt{n^2 + 2n} - n ; n \in \mathcal{N} \}$$

Dire se A è limitato superiormente e, in caso affermativo, calcolare il $\sup A$.

Un numero $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante di A se e solo se risulta

$$\sqrt{n^2 + 2n} - n \leq b \quad \forall n \in \mathcal{N}.$$

D'altra parte, supponendo $b > 0$, si ha

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + 2n} - n \leq b &\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 2n} \leq n + b \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n^2 + 2n \leq n^2 + 2nb + b^2 \Leftrightarrow 2(b-1)n + b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Siccome si richiede che le disuguaglianze siano vere $\forall n \in \mathcal{N}$, il coefficiente di n nell'ultima deve essere maggiore o uguale a zero, ossia deve essere $b \geq 1$. Pertanto $b = 1$ è il più piccolo dei maggioranti e quindi $\sup A = 1$. Verifichiamo, per completezza, se risulta anche $1 = \max A$. Ovviamente questo è vero se e solo se $1 \in A$. Vediamo dunque se l'equazione

$$\sqrt{n^2 + 2n} - n = 1$$

ha una soluzione o no. Risulta

$$\sqrt{n^2 + 2n} - n = 1 \Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 2n} = n + 1 \Leftrightarrow n^2 + 2n = n^2 + 2n + 1 \Leftrightarrow 0 = 1$$

Allora $1 \notin A$ e pertanto l'insieme A non ha massimo.

1.10-3) Sia

$$A = \{\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1} ; n \in \mathcal{N}\}$$

Verificare che $\inf A = 0$.

Ovviamente risulta:

$$\sqrt{n+4} - \sqrt{n+1} > 0 \quad \forall n \in \mathcal{N}.$$

D'altra parte se $\varepsilon > 0$, ottengo:

$$\begin{aligned} \sqrt{n+4} - \sqrt{n+1} < \varepsilon &\Leftrightarrow \sqrt{n+4} < \varepsilon + \sqrt{n+1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n+4 < \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{n+1} + n+1 \Leftrightarrow 3 - \varepsilon^2 < 2\varepsilon\sqrt{n+1} \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, se $3 - \varepsilon^2 \leq 0$, allora l'ultima disuguaglianza ottenuta è verificata $\forall n \in \mathcal{N}$; mentre se $3 - \varepsilon^2 > 0$, ottengo che:

$$3 - \varepsilon^2 < 2\varepsilon\sqrt{n+1} \Leftrightarrow (3 - \varepsilon^2)^2 < 4\varepsilon^2(n+1) \Leftrightarrow n > \frac{(3 - \varepsilon^2)^2}{4\varepsilon^2} - 1.$$

In ogni caso quindi, la disuguaglianza iniziale ammette soluzioni. Pertanto $0 = \inf A$.

1.10-4) Sia

$$A = \{\sqrt{n^2 + n + 1} - n ; n \in \mathcal{N}\}$$

Calcolare $\sup A$ e $\inf A$ e dire se sono massimo e minimo di A .

Un numero $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante di A se e solo se risulta

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - n \leq b \quad \forall n \in \mathcal{N}.$$

D'altra parte, possiamo supporre $b > 0$, in quanto se $b \leq 0$ la disuguaglianza è verificata essendo il primo membro positivo. Risulta dunque:

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + n + 1} - n \leq b &\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + n + 1} \leq n + b \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n^2 + n + 1 \leq n^2 + 2nb + b^2 \Leftrightarrow (2b - 1)n \geq 1 - b^2 \end{aligned}$$

Siccome si richiede che le disuguaglianze siano vere $\forall n \in \mathcal{N}$, il coefficiente di n nell'ultima deve essere positivo e quindi il numero $b \in \mathcal{R}$ è maggiorante se e solo se

$$2b - 1 > 0 \quad e \quad n \geq \frac{1 - b^2}{2b - 1} \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Ne deriva quindi che deve essere:

$$2b - 1 > 0 \quad e \quad 1 \geq \frac{1 - b^2}{2b - 1}$$

ossia

$$b > \frac{1}{2} \quad e \quad b^2 + 2b - 2 \geq 0$$

In conclusione quindi $b \in \mathcal{R}$ è maggiorante se e solo se $b \geq \sqrt{3} - 1$. Pertanto $\sqrt{3} - 1 = \sup A$. Siccome poi $\sqrt{3} - 1 \in A$, risulta pure $\sqrt{3} - 1 = \max A$.

D'altra parte $d \in \mathcal{R}$ è minorante A se e solo se:

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - n \geq d \quad \forall n \in \mathcal{N}.$$

Supponendo anche in questo caso $d > 0$, otteniamo:

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2 + n + 1} - n \geq d &\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + n + 1} \geq n + d \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow n^2 + n + 1 \geq n^2 + 2nd + d^2 \Leftrightarrow (2d - 1)n \leq 1 - d^2 \end{aligned}$$

Siccome si richiede che le disequaglianze siano vere $\forall n \in \mathcal{N}$, il coefficiente di n nell'ultima deve essere minore o uguale a zero e quindi il numero $d \in \mathcal{R}$ è minorante se e solo se

$$2d - 1 \leq 0 \quad \text{ossia} \quad d \leq \frac{1}{2}$$

Allora risulta $\inf A = \frac{1}{2}$. Da notare infine che $\frac{1}{2} \notin A$ e quindi non è il minimo di A .

1.10-5) Dire se l'insieme

$$A = \left\{ \frac{3x - 1}{x^2 + x + 3}, x \in \mathcal{R} \right\}$$

è limitato superiormente e in caso affermativo calcolare $\sup A$.

Un numero positivo $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante dell'insieme A se e solo se

$$\frac{3x - 1}{x^2 + x + 3} \leq b \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

Risulta dunque:

$$\frac{3x - 1}{x^2 + x + 3} \leq b \iff 3x - 1 \leq b(x^2 + x + 3) \iff bx^2 + (b - 3)x + 3b + 1 \geq 0$$

Ora quest'ultima disequaglianza è verificata per ogni $x \in \mathcal{R}$ se e solo se $b > 0$ e $\Delta(b) = (b - 3)^2 - 4b(3b + 1) \leq 0$. Risulta: $\Delta(b) = b^2 - 6b + 9 - 12b^2 - 4b = -(11b^2 + 10b - 9) \leq 0$. Pertanto $\Delta(b) \leq 0 \iff 11b^2 + 10b - 9 \geq 0$. Le radici dell'ultimo polinomio di secondo grado sono:

$$b_1 = \frac{-5 - \sqrt{25 + 99}}{11} \quad e \quad b_2 = \frac{-5 + \sqrt{124}}{11}$$

Ne deriva quindi che b è maggiorante se e solo se $b \geq b_2$. Pertanto b_2 il più piccolo dei maggioranti ossia l'estremo superiore di A . Da notare che b_2 anche il massimo elemento di A in quanto $b_2 \in A$ avendo l'equazione

$$\frac{3x - 1}{x^2 + x + 3} = b_2$$

una soluzione (e una sola).

2 FUNZIONI

In questo secondo capitolo viene introdotto il concetto di funzione e vengono illustrate alcune proprietà generali delle funzioni che saranno usate nel seguito.

2.1 Definizione di funzione e proprietà generali

Siano $A, B \subset \mathcal{R}$, chiameremo f una funzione da A in B ed useremo la notazione:

$$f : A \rightarrow B$$

una legge che ad ogni elemento $x \in A$ associa un ben determinato elemento di B che indicheremo con $f(x)$.

Nei casi che considereremo in questo corso, la legge che definisce una funzione sarà di solito espressa da una formula matematica.

L'insieme A dove la funzione f è definita (ossia l'insieme dei numeri reali per cui la legge ha senso) viene chiamato **l'insieme di definizione o il dominio di** f ed indicato a volte con $\mathcal{D}(f)$.

L'insieme

$$\mathcal{R}(f) = \{y \in \mathcal{R}, \exists x \in A \text{ con } f(x) = y\}$$

viene chiamato **l'insieme dei valori o il codominio di** f .

Se $f : A \rightarrow B$ è una funzione chiameremo **grafico della funzione** f l'insieme:

$$\text{graf } f = \{(x, y); x \in \mathcal{D}(f), y = f(x)\} = \{(x, f(x)); x \in \mathcal{D}(f)\}$$

Nel seguito, useremo pure le notazioni:

Se $X \subset A$

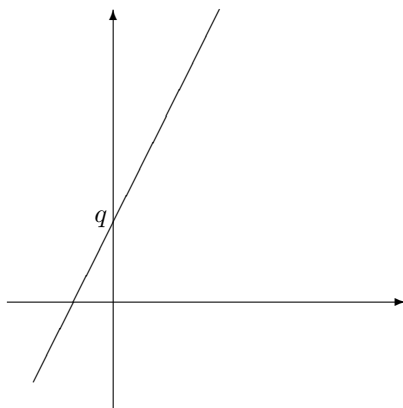
$$f(X) = \{f(x), x \in X\} = \{y \in B; \exists x \in X \text{ con } f(x) = y\}$$

Se $Y \subset B$

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A; f(x) \in Y\}$$

Consideriamo ora alcuni esempi.

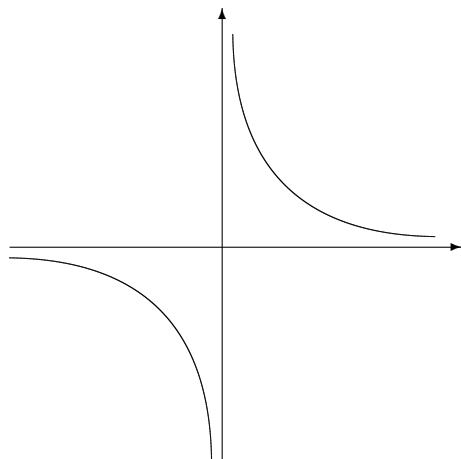
- a) Sia $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ la funzione definita da $f(x) = mx + q$ (con $m, q \in \mathcal{R}$ numeri fissati). Il grafico di f (polinomio in x di primo grado) è una retta.



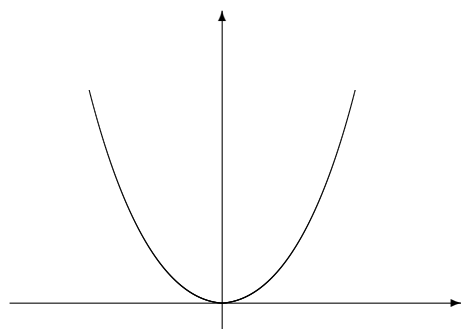
b) Sia $A = \{x \in \mathcal{R} ; x \neq 0\}$ e sia $f : A \rightarrow \mathcal{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

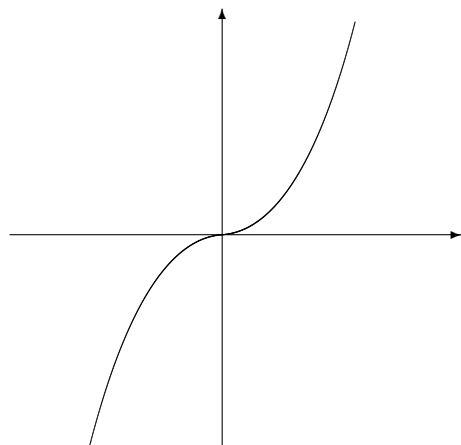
Il grafico di f è dato dalla seguente figura (iperbole equilatera):



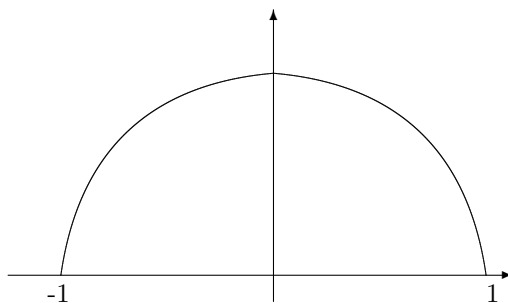
c) Sia $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^2$. Il grafico di f è dato dalla seguente figura (parabola):



d) Sia $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^3$. Il grafico di f è dato dalla seguente figura:



- e) Sia $f : [-1, 1] \rightarrow \mathcal{R}$ la funzione definita da $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. È interessante notare che il grafico di f è la semisfera superiore di centro l'origine e raggio 1.



Sia $f : A \rightarrow B$ una data funzione. Diremo che

- i) f è **iniettiva** se

$$x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

o equivalentemente

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2 ;$$

- ii) f è **suriettiva** (su B) se $f(A) = B$ ossia se

$$\forall y \in B \exists x \in A \text{ con } f(x) = y ;$$

- iii) f è **biettiva** se f è iniettiva e suriettiva (f in tal caso è anche chiamata una **corrispondenza biunivoca** tra A e B)

- iv) f è **strettamente crescente** se

$$x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2) ;$$

f è **crescente** se

$$x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) ;$$

- v) f è **strettamente decrescente** se

$$x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2) ;$$

f è **decrescente** se

$$x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2) .$$

Siano $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ due funzioni assegnate. Chiameremo **funzione composta** di f e g e la indicheremo col simbolo $g \circ f$ la funzione da A in C definita da:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad x \in A$$

Infine se $f : A \rightarrow B$ è una funzione iniettiva e suriettiva, diremo anche che f è **invertibile** e chiameremo **funzione inversa** di f la funzione $g : B \rightarrow A$ definita dalla seguente legge:

$$\text{se } y \in B, \quad g(y) = \text{all'unica soluzione } x \in A \text{ dell'equazione } f(x) = y$$

Da notare che, dalla definizione di funzione inversa, si hanno le due seguenti identità:

i) $f(g(y)) = y \quad \forall y \in B$,

ii) $g(f(x)) = x \quad \forall x \in A$.

La funzione g , inversa della funzione f viene spesso indicata col simbolo f^{-1} (che non va confuso con $1/f$).

Consideriamo per concludere alcuni esempi.

1. Sia

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+2}, \quad x \in A = \{x \in \mathcal{R} ; x \neq -2\}$$

Verifichiamo che f è iniettiva. Infatti se $x, y \in A$,

$$\frac{2x+1}{x+2} = \frac{2y+1}{y+2} \Rightarrow 2xy + y + 4x + 2 = 2xy + x + 4y + 2 \Rightarrow 3x = 3y \Rightarrow x = y$$

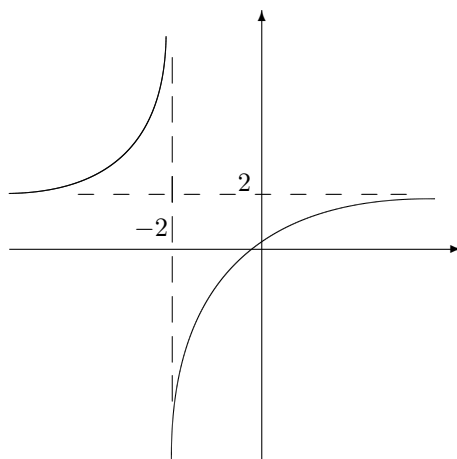
Pertanto f è iniettiva. Calcoliamo ora l'insieme dei valori di f : $f(A)$. Ricordiamo che $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A$ con $f(x) = y$. Allora $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A$ con

$$\frac{2x+1}{x+2} = y \Leftrightarrow 2x+1 = xy+2y \Leftrightarrow (2-y)x = 2y-1 \Leftrightarrow y \neq 2 \quad e \quad x = \frac{2y-1}{2-y}$$

Se ne conclude quindi che

$$f(A) = \{y \in \mathcal{R} ; y \neq 2\} = B$$

Il grafico della funzione f è del tipo di quello rappresentato in figura:



La funzione $f : A \rightarrow B$ è iniettiva e suriettiva e la sua funzione inversa $g : B \rightarrow A$ è data dalla funzione:

$$g(y) = \frac{2y-1}{2-y}, \quad y \in B$$

Verifichiamo direttamente, per esempio, che $f(g(y)) = y \quad \forall y \in B$. Infatti :

$$f(g(y)) = \frac{2g(y)+1}{g(y)+2} = \frac{2 \frac{2y-1}{2-y} + 1}{\frac{2y-1}{2-y} + 2} = \frac{4y-2+2-y}{2y-1+4-2y} = \frac{3y}{3} = y$$

2. Sia

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \quad x \in \mathcal{R}^+ = \{x \in \mathcal{R} ; x > 0\}.$$

Verifichiamo se f è iniettiva. Siano $x, y \in \mathcal{R}^+$, risulta:

$$x + \frac{1}{x} = y + \frac{1}{y} \Leftrightarrow x^2 y + y = x y^2 + x \Leftrightarrow x y(x - y) + y - x = 0 \Leftrightarrow (x y - 1)(x - y) = 0$$

La funzione quindi non è iniettiva, infatti l'uguaglianza $f(x) = f(y)$ non vale solo quando $x = y$, ma anche quando $xy = 1$ ossia quando $y = \frac{1}{x}$. Ad esempio

$$f(2) = f\left(\frac{1}{2}\right) \quad , \quad f(3) = f\left(\frac{1}{3}\right) .$$

Calcoliamo ora l'insieme dei valori $f(\mathcal{R}^+)$. Ricordiamo che

$$y \in f(\mathcal{R}^+) \Leftrightarrow \exists x \in \mathcal{R}^+ \text{ con } x + \frac{1}{x} = y$$

D'altra parte

$$x + \frac{1}{x} = y \Leftrightarrow x^2 - yx + 1 = 0$$

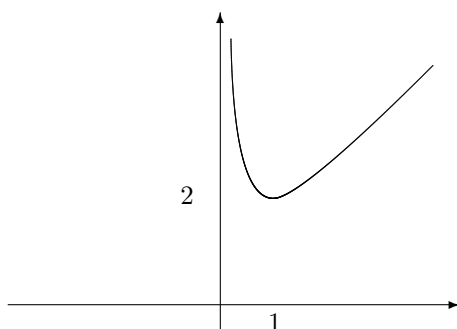
Il delta del polinomio di secondo grado (in x) trovato è dato da $\Delta(y) = y^2 - 4$ e quindi, se vogliamo che l'equazione considerata abbia almeno una soluzione deve essere $\Delta(y) \geq 0$, ossia $y \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ e, in tal caso, le soluzioni sono

$$x_1 = \frac{y - \sqrt{y^2 - 4}}{2} \quad , \quad x_2 = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4}}{2}$$

Osserviamo infine che se $y < 0$ le due soluzioni trovate sono negative, mentre se $y > 0$ sono positive. Possiamo quindi concludere che l'equazione nella $x : x + \frac{1}{x} = y$ ha almeno una soluzione $x > 0$ se e solo se $y \geq 2$. Ne deriva quindi che

$$f(\mathcal{R}^+) = [2, +\infty) .$$

Osserviamo infine che il grafico della funzione f è del tipo:



3. Sia

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x \quad x \in \mathcal{R} .$$

Anche in questo caso verichiamo se f è iniettiva. Risulta:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 1} - x &= \sqrt{y^2 + 1} - y \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1} = x - y \Rightarrow \\ x^2 + 1 + y^2 + 1 - 2\sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} &= x^2 + y^2 - 2xy \Rightarrow 1 + xy = \sqrt{(x^2 + 1)(y^2 + 1)} \Rightarrow \\ 1 + x^2 y^2 + 2xy &= x^2 y^2 + x^2 + y^2 + 1 \Rightarrow (x - y)^2 = 0 \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Pertanto la funzione è iniettiva.

Per calcolare l'insieme dei valori, osserviamo in primo luogo che $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}$, pertanto $f(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}^+$. D'altra parte, se $y \in \mathcal{R}^+$, risulta

$$\sqrt{x^2 + 1} - x = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} = x + y \Leftrightarrow x + y \geq 0 \quad e \quad x^2 + 1 = x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow x + y \geq 0 \quad e \quad x = \frac{1 - y^2}{2y}$$

Da notare che se

$$x = \frac{1 - y^2}{2y} \quad e \quad y > 0$$

allora la condizione $x + y \geq 0$ è verificata, infatti:

$$x + y = \frac{1 - y^2}{2y} + y = \frac{1 + y^2}{2y} > 0$$

Pertanto l'equazione considerata ($\sqrt{x^2 + 1} - x = y$) ha una soluzione $\forall y \in \mathcal{R}^+$. Allora $f(\mathcal{R}) = \mathcal{R}^+$. Da notare infine che la funzione $g : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}$ definita da :

$$g(y) = \frac{1 - y^2}{2y}$$

è la funzione inversa di f . Verifichiamo per concludere che $f(g(y)) = y \quad \forall y \in \mathcal{R}^+$ e che $g(f(x)) = x \quad \forall x \in \mathcal{R}$. Infatti risulta :

$$\begin{aligned} f(g(y)) &= \sqrt{g^2(y) + 1} - g(y) = \sqrt{\left(\frac{1 - y^2}{2y}\right)^2 + 1} - \frac{1 - y^2}{2y} = \\ &= \sqrt{\frac{1 + y^4 - 2y^2 + 4y^2}{4y^2}} - \frac{1 - y^2}{2y} = \frac{1 + y^2}{2y} - \frac{1 - y^2}{2y} = y \\ g(f(x)) &= \frac{1 - f^2(x)}{2f(x)} = \frac{1 - (\sqrt{x^2 + 1} - x)^2}{2(\sqrt{x^2 + 1} - x)} = \frac{2x(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{2(\sqrt{x^2 + 1} - x)} = x \end{aligned}$$

2.2 Esercizi proposti

1. Sia

$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 2}, \quad x \in \mathcal{R}, \quad x \neq 2.$$

- i) Verificare che f è iniettiva ,
- ii) calcolare l'insieme dei valori ,
- iii) determinare la funzione inversa.

2. Sia

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 2} \quad x \in \mathcal{R}$$

- i) Dire se f è iniettiva;
- ii) Calcolare l'insieme dei valori di f : $f(\mathcal{R})$.

3. Sia

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1} \quad x \in \mathcal{R}$$

- i) Dire se f è iniettiva;
- ii) Calcolare l'insieme dei valori di f : $f(\mathcal{R})$.

4. Sia

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} - x$$

Verificare che f è iniettiva, calcolare l'insieme dei valori di f e scrivere la funzione inversa di f .

(La soluzione si trova alla fine del capitolo).

2.3 Alcune funzioni elementari

Ricorderemo in questo paragrafo la definizione e le principali proprietà di alcune funzioni elementari che useremo di frequente nel seguito.

1. Funzione potenza con esponente naturale

La funzione $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ definita da

$$f(x) = x^n \quad n \in \mathcal{N}$$

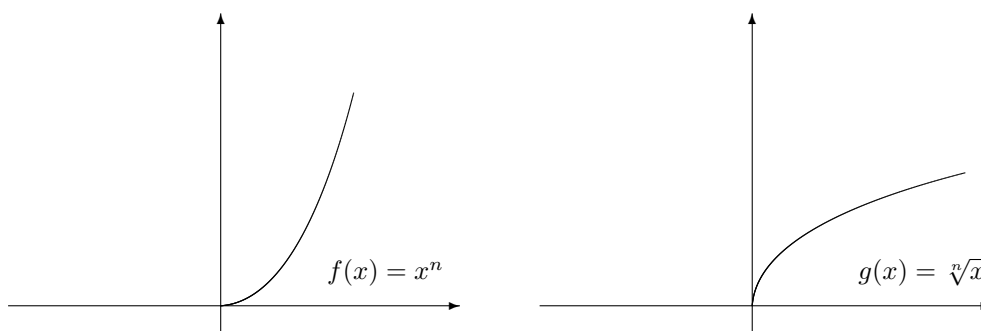
se viene ristretta all'insieme $A = \{x \in \mathcal{R} ; x \geq 0\}$ è strettamente crescente e quindi iniettiva e $f : A \rightarrow A$ è una corrispondenza biunivoca. Possiamo quindi considerare la sua funzione inversa. Tale funzione inversa $g : A \rightarrow A$ verrà indicata col simbolo

$$g(y) = \sqrt[n]{y}$$

e chiamata la **radice n-esima** di y ($y \geq 0$). Pertanto $\forall y \geq 0$, $\sqrt[n]{y}$ è quell'unico numero non negativo tale che

$$(\sqrt[n]{y})^n = y$$

I grafici delle due funzioni sono i seguenti :

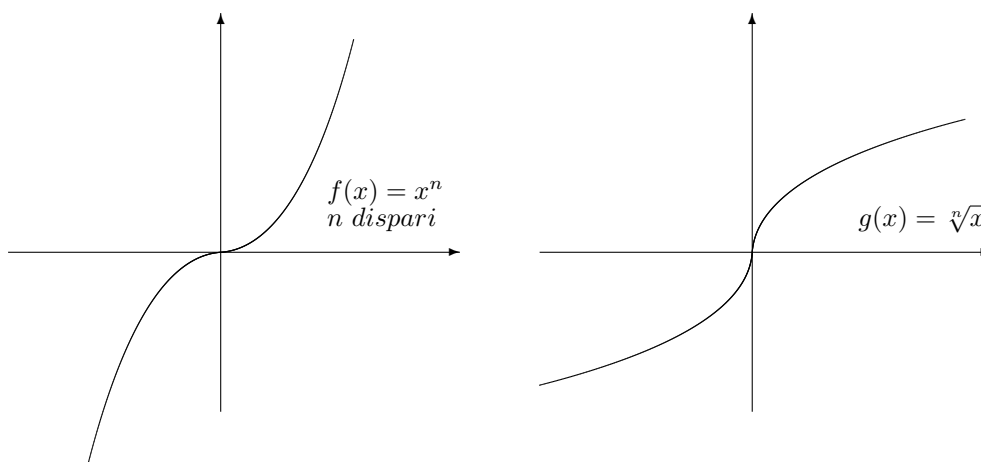


2. Funzione potenza con esponente naturale dispari

Da notare che se $n \in \mathcal{N}$ è un numero dispari, allora la funzione considerata $f(x) = x^n$ ($f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$) è strettamente crescente e suriettiva e quindi invertibile (senza imporre la restrizione $x \geq 0$). Per n dispari quindi la funzione

$$g(y) = \sqrt[n]{y}$$

è definita $\forall y \in \mathcal{R}$. In questo caso, i grafici delle due funzioni sono i seguenti :



3. Funzione esponenziale

Sia $a \in \mathcal{R}$ con $a > 1$. Definiamo $\forall n \in \mathcal{N}$:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

e $\forall n \in \mathcal{N}$ e $m \in \mathcal{Z}$:

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^m$$

Si può verificare facilmente (e lo lasciamo per esercizio) che se $n, q \in \mathcal{N}$ e $m, p \in \mathcal{Z}$ verificano la relazione

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

allora :

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$$

È possibile allora definire la potenza di a con esponente razionale, ponendo $\forall r \in \mathcal{Q}$:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} \text{ se } r = \frac{m}{n} \text{ con } m \in \mathcal{Z} \text{ e } n \in \mathcal{N}$$

Ricordando che $a > 1$, la funzione così definita gode delle seguenti proprietà :

i)

$$a^r > 0 \quad \forall r \in \mathcal{Q}$$

ii)

$$a^r > 1 \text{ se } r > 0, \quad a^r < 1 \text{ se } r < 0$$

iii)

$$a^{r+s} = a^r a^s \text{ e } (a^r)^s = a^{r \cdot s} \quad \forall r, s \in \mathcal{Q}$$

iv)

$$a^r \text{ è una funzione strettamente crescente.}$$

Verifichiamo ad esempio le proprietà iii) e iv).

Esprimendo $r, s \in \mathcal{Q}$ come frazioni con lo stesso denominatore, ad esempio

$$r = \frac{m}{n}, \quad s = \frac{p}{n} \quad n \in \mathcal{N}, \quad m, p \in \mathcal{Z}$$

risulta:

$$a^{r+s} = a^{\frac{m+p}{n}} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^{m+p} = \left(\sqrt[n]{a} \right)^m \left(\sqrt[n]{a} \right)^p = a^r a^s$$

Analogamente:

$$(a^r)^s = \left(\sqrt[n]{a^r} \right)^p = \left(\sqrt[n]{\left(\sqrt[n]{a} \right)^m} \right)^p = \left(\sqrt[n^2]{a} \right)^{mp} = a^{\frac{mp}{n^2}} = a^{r \cdot s}$$

D'altra parte se $r, s \in \mathcal{Q}$ e $r < s$, si ha:

$$a^s - a^r = a^r (a^{s-r} - 1) > 0$$

perchè $a^r > 0$ e $a^{s-r} > 1$ essendo $s - r > 0$.

Possiamo infine estendere la funzione esponenziale a qualunque esponente reale, ponendo se $x \in \mathcal{R}$:

$$a^x = \sup \{ a^r ; r \in \mathcal{Q}, r < x \}$$

Ottengo così una funzione $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^+$ che indicheremo con $f(x) = a^x$ e che chiameremo la **funzione esponenziale** (di base a). Essa mantiene le proprietà scritte sopra per l'esponente razionale, in particolare :

i)

$$a^x > 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

ii)

$$a^x > 1 \quad \text{se } x > 0, \quad a^x < 1 \quad \text{se } x < 0$$

iii)

$$a^{x+y} = a^x a^y \quad \text{e} \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad \forall x, y \in \mathcal{R}$$

iv)

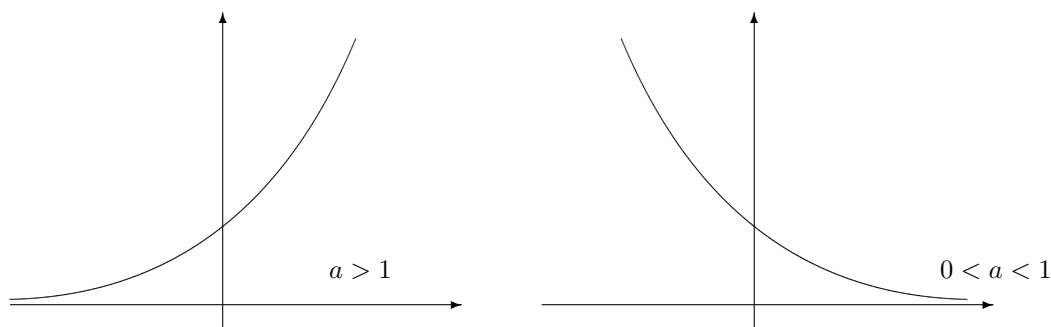
a^x è una funzione strettamente crescente.

Si può infine definire a^x anche quando la base $a \in (0, 1)$. Lo si può fare nello stesso modo che abbiamo seguito con $a > 1$ con le ovvie modifiche, oppure si può procedere rapidamente ponendo in questo caso

$$a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$$

e usare la definizione già data, in quanto $1/a$ è maggiore di 1.

Il grafico della funzione esponenziale è dato dalle seguenti figure:



4. La funzione logaritmo

Abbiamo visto nell'esempio precedente che la funzione esponenziale $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^+$ definita da $f(x) = a^x$ $a > 0$ $a \neq 1$ è una funzione biettiva. Si può considerare pertanto la sua funzione inversa $g : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}$. Tale funzione inversa viene indicata col simbolo:

$$g(y) = \log_a y$$

(**logaritmo in base a di y**). Le principali proprietà del logaritmo sono le seguenti:

i)

$$a^{\log_a y} = y \quad \forall y \in \mathcal{R}^+$$

$$\log_a (a^x) = x \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

ii)

$$\log_a (yz) = \log_a y + \log_a z \quad \forall y, z \in \mathcal{R}^+$$

iii)

$$\log_a (y^z) = z \log_a y \quad \forall y \in \mathcal{R}^+ \quad \text{e} \quad \forall z \in \mathcal{R}$$

iv)

$$\log_b y = \frac{\log_a y}{\log_a b} \quad \forall y, a, b \in \mathcal{R}^+ \quad a, b \neq 1$$

Verifichiamo per completezza le proprietà ora enunciate.

i) Sono una conseguenza immediata del fatto che la funzione $g(y) = \log_a y$ è la funzione inversa della funzione $f(x) = a^x$.

ii) Risulta:

$$a^{\log_a (yz)} = yz = a^{\log_a y} a^{\log_a z} = a^{\log_a y + \log_a z}$$

Allora :

$$\log_a (yz) = \log_a y + \log_a z$$

e quindi vale la ii).

iii) Esercizio.

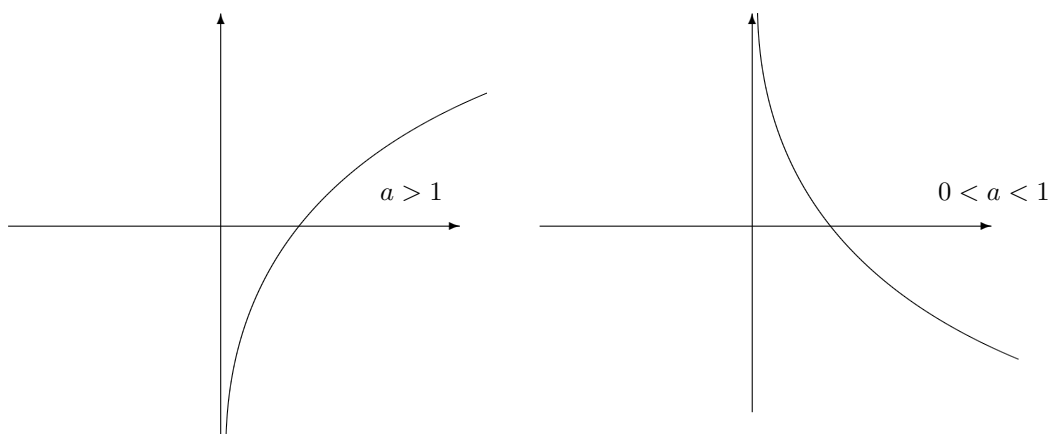
iv) Risulta:

$$a^{\log_a y} = y = b^{\log_b y} = (a^{\log_a b})^{\log_b y} = a^{\log_a b \log_b y}$$

Ne deriva quindi che

$$\log_a y = \log_a b \log_b y$$

Ricordiamo infine che il grafico della funzione logaritmo è il seguente:

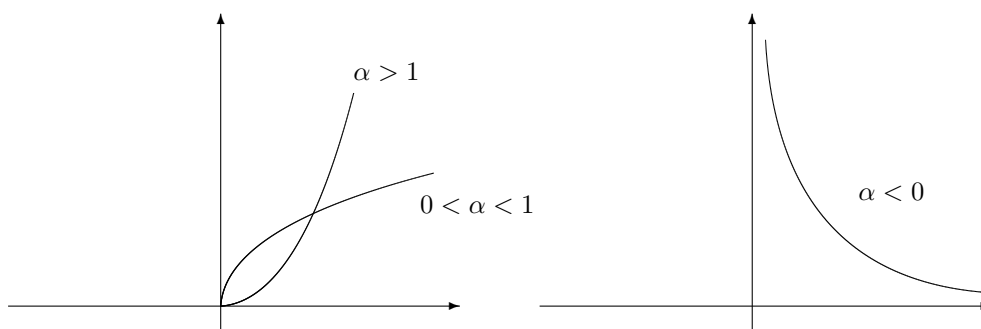


5. La funzione potenza

Fissato un numero $\alpha \in \mathcal{R}$, chiameremo **funzione potenza (con esponente α)** la funzione $f : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}^+$ definita da:

$$f(x) = x^\alpha = 10^{\alpha \log_{10} x}$$

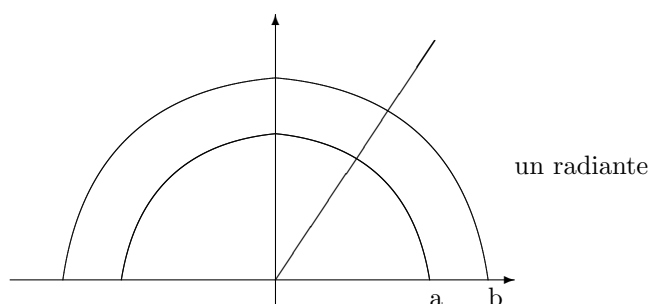
Il grafico della funzione potenza è dato dalle seguenti figure:



6. Le funzioni trigonometriche

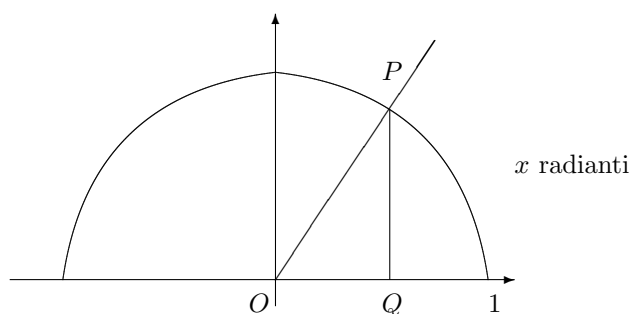
Ricorderemo in questo paragrafo la definizione e le proprietà più importanti delle funzioni trigonometriche seguendo un ragionamento puramente geometrico che non ha nessuna pretesa di essere completo.

Come unità di misura degli angoli considereremo **l'angolo radiante** definito come quell'angolo che, posto al centro di una circonferenza, determina su di essa un arco la cui lunghezza è uguale al raggio della circonferenza stessa. Da notare che, per la similitudine dei settori che intervengono, la definizione di radiante non dipende dal raggio della circonferenza scelta come si può vedere dalla figura seguente:



Fissato ora un numero reale x , consideriamo l'angolo al centro della circonferenza di centro l'origine e raggio 1, che misura x radianti (il verso positivo è quello antiorario). Definiremo allora:

$$\sin x = \overline{QP} \quad \cos x = \overline{OQ}$$



Ovviamente se il raggio della circonferenza che stiamo considerando non fosse 1, si avrebbe:

$$\sin x = \frac{\overline{QP}}{\overline{OP}} \quad \cos x = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}$$

Alcune proprietà elementari delle funzioni ora definite sono le seguenti:

i) (Teorema di Pitagora)

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

ii)

$$\begin{aligned} \sin(x + 2\pi) &= \sin x \\ \cos(x + 2\pi) &= \cos x \end{aligned} \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

iii)

$$\begin{aligned} \sin(x + \pi) &= -\sin x \\ \cos(x + \pi) &= -\cos x \end{aligned} \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

iv)

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x \end{aligned} \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

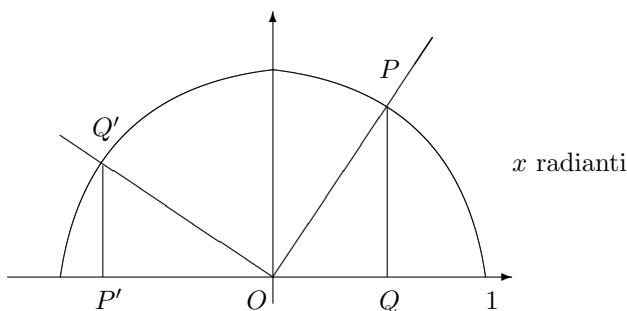
v)

$$\begin{aligned} \sin(-x) &= -\sin x \\ \cos(-x) &= \cos x \end{aligned} \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

vi) **Formula della somma per il coseno**

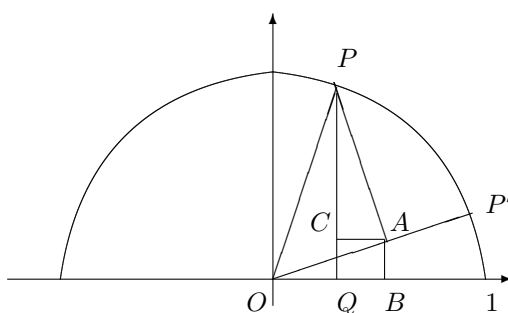
$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \quad \forall x, y \in \mathcal{R}$$

La prima proprietà espressa in iv) si può verificare ragionando sulla seguente figura:



I due triangoli OQP e $OQ'P'$ sono uguali e quindi $\overline{P'Q'} = \overline{OQ}$.

Per verificare la formula della somma per il coseno, ragioneremo sulla seguente figura:



Supponiamo che gli angoli $\widehat{BOP'}$ e $\widehat{P'OP}$ misurino rispettivamente x radianti ed y radianti. Risulta allora, ricordando che il raggio della circonferenza della figura è 1, $\overline{OQ} = \cos(x + y)$. Useremo per ottenere la formula vi), l'uguaglianza: $\overline{OQ} = \overline{OB} - \overline{QB}$. Nella figura, il segmento PA è ortogonale al segmento OP' , così che il triangolo OAP è rettangolo con angolo retto in A . Risulta allora: $\overline{AP} = \sin y$. D'altra parte, anche il triangolo ACP è rettangolo con angolo retto in C e l'angolo $\widehat{CPA}$ è uguale all'angolo $\widehat{BOP'}$ e quindi misura x radianti, allora:

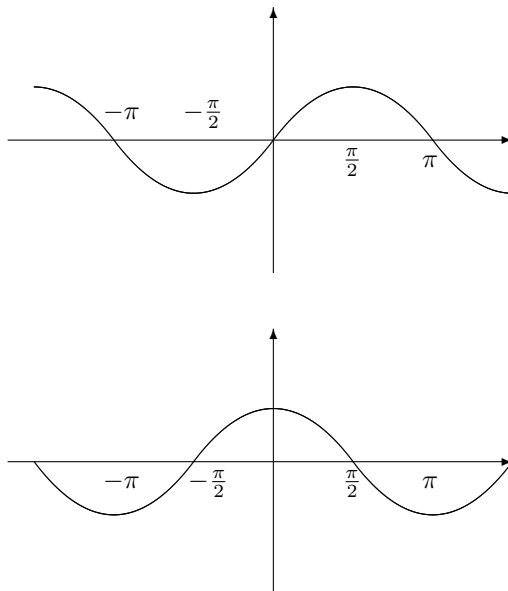
$$\overline{CA} = \overline{QB} = \overline{AP} \sin x = \sin y \sin x$$

D'altra parte

$$\overline{OB} = \overline{OA} \cos x = \cos y \cos x$$

e quindi si ottiene la formula della somma.

I grafici delle funzioni *seno* e *coseno* sono i seguenti :



7. La funzione tangente

Oltre alle due funzioni seno e coseno, considereremo anche la funzione tangente definita da:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

La funzione tangente è definita solamente per quei valori di x per cui $\cos x \neq 0$ ossia per

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

La funzione tangente è periodica di periodo π ossia

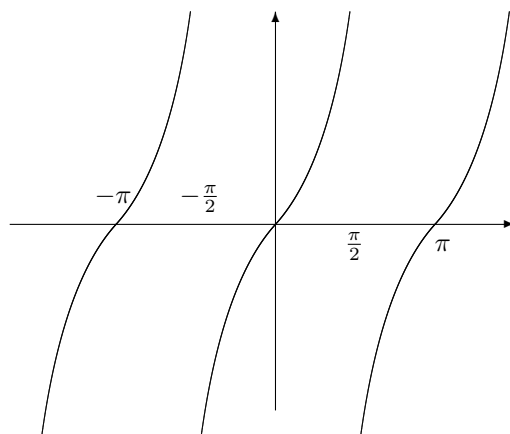
$$\tan x = \tan(x + \pi) \quad \forall x \in D$$

(dove abbiamo indicato con D il dominio della tangente ossia

$$D = \{x \in \mathbb{R} ; x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\})$$

e in ogni intervallo in cui è definita è strettamente crescente.

Il grafico della tangente è dato da:

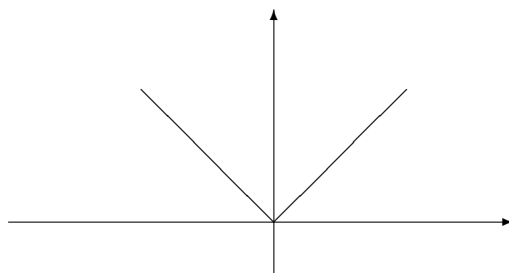


8. La funzione modulo

Fissato $x \in \mathcal{R}$, definiamo

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

La funzione f ora definita viene chiamata la funzione **modulo o valore assoluto** ed ha il seguente grafico:



Alcune proprietà del modulo che useremo spesso nel seguito sono :

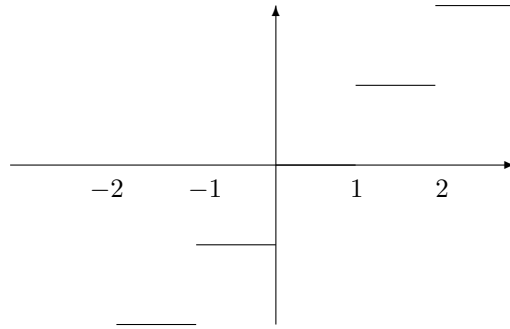
- i) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{R} \quad \text{e} \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- ii) $|xy| = |x| |y| \quad \forall x, y \in \mathcal{R}$,
- iii) **Disuguaglianza triangolare**

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathcal{R}$$

- iv) se $r > 0$, allora $|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r$.

9. La funzione parte intera

Fissato un numero $x \in \mathcal{R}$, esiste un unico $k \in \mathcal{Z}$, tale che $k \leq x < k + 1$. Tale unico numero intero k viene chiamato la **parte intera** di x ed indicato col simbolo $[x]$. Il grafico della funzione $f(x) = [x]$ è dato dalla seguente figura:



2.4 Alcune altre formule trigonometriche

a) Usando le proprietà delle funzioni trigonometriche elencate sopra, ricaviamo alcune altre formule di uso comune .

1. Formula della differenza per il coseno

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \quad \forall x, y \in \mathcal{R}$$

Infatti :

$$\cos(x - y) = \cos(x + (-y)) = \cos x \cos(-y) - \sin x \sin(-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

2. Formula della somma e della differenza per il seno

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \\ \sin(x - y) &= \sin x \cos y - \sin y \cos x \end{aligned} \quad \forall x, y \in \mathcal{R}$$

Infatti, usando le relazioni $\sin x = -\cos(x + \frac{\pi}{2})$ e $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \sin(x + y) &= -\cos(x + y + \frac{\pi}{2}) = -(\cos(x + \frac{\pi}{2}) \cos y - \sin(x + \frac{\pi}{2}) \sin y) = \\ &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \sin^2 x &= \frac{1 - \cos(2x)}{2} \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos(2x)}{2} \end{aligned}$$

Infatti si ha:

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

4.

$$\begin{aligned} \sin x - \sin y &= 2 \sin\left(\frac{x - y}{2}\right) \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \\ \cos x - \cos y &= -2 \sin\left(\frac{x - y}{2}\right) \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \end{aligned}$$

Osserviamo che dalle relazioni:

$$\sin(u + v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$$

$$\sin(u - v) = \sin u \cos v - \sin v \cos u$$

si ottiene, facendo la differenza:

$$\sin(u + v) - \sin(u - v) = 2 \sin v \cos u$$

Scegliendo infine

$$\begin{cases} u + v = x \\ u - v = y \end{cases} \quad \text{ossia} \quad \begin{cases} u = \frac{x+y}{2} \\ v = \frac{x-y}{2} \end{cases}$$

si ricava la prima formula.

In modo simile si ricava la seconda.

b) Consideriamo ora alcune disuguaglianze in cui interviene il modulo.

1. Determinare l'insieme

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R} , \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \leq 2 \right\}$$

Come abbiamo visto, devono essere verificate contemporaneamente le due disuguaglianze:

$$-2 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq 2$$

Abbiamo quindi

$$\frac{x+1}{x-1} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{-x+3}{x-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} \geq 0$$

ossia

$$\frac{x+1}{x-1} \leq 2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup [3, +\infty)$$

D'altra parte

$$\frac{x+1}{x-1} \geq -2 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \frac{1}{3}] \cup (1, +\infty)$$

Pertanto

$$A = (-\infty, \frac{1}{3}] \cup [3, +\infty)$$

2. Determinare l'insieme

$$A = \{ x \in \mathcal{R} , |x^2 + x| \geq 2x + 1 \}$$

Osserviamo in primo luogo che se $x^2 + x \geq 0$, ossia se $x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$, allora la disuguaglianza diventa $x^2 + x \geq 2x + 1$, ossia $x^2 - x - 1 \geq 0$ disuguaglianza che è verificata per valori di x esterni all'intervallo

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

Possiamo quindi concludere che

$$(-\infty, -1] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty \right) \subset A$$

D'altra parte se $x^2 + x \leq 0$, ossia se $x \in [-1, 0]$, allora la disuguaglianza diventa $-x^2 - x \geq 2x + 1$, ossia $x^2 + 3x + 1 \leq 0$ disuguaglianza che è verificata per valori di x interni all'intervallo

$$\left[\frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right]$$

Pertanto la disuguaglianza vale anche nell'intervallo

$$\left[-1, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right]$$

Ne possiamo concludere che

$$A = \left(-\infty, \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$$

2.5 Risoluzione degli esercizi proposti nel Capitolo 2

1. Sia

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \quad x \in \mathcal{R}, \quad x \neq 2.$$

- i) Verificare che f è iniettiva,
- ii) calcolare l'insieme dei valori,
- iii) determinare la funzione inversa.

Risulta:

$$\frac{x+1}{x-2} = \frac{y+1}{y-2} \Leftrightarrow xy + y - 2x - 2 = xy + x - 2y - 2 \Leftrightarrow 3y = 3x$$

Pertanto la funzione considerata è iniettiva. Fissato $y \in \mathcal{R}$, si ha:

$$y = \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow xy - 2y = x + 1 \Leftrightarrow x(y-1) = 2y+1 \Leftrightarrow y \neq 1 \quad e \quad x = \frac{2y+1}{y-1}$$

Ne possiamo concludere che l'insieme dei valori B è dato da

$$B = \{y \in \mathcal{R} ; y \neq 1\}$$

e la funzione inversa della funzione f è data da

$$g(y) = \frac{2y+1}{y-1}$$

2. Sia

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 2} \quad x \in \mathcal{R}$$

- i) Dire se f è iniettiva;
- ii) Calcolare l'insieme dei valori di f : $f(\mathcal{R})$.

Se $x, y \in \mathcal{R}$, allora

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow x - \sqrt{x^2 + 2} = y - \sqrt{y^2 + 2} \Rightarrow x - y = \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{y^2 + 2} \\ &\Rightarrow x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + 2 + y^2 + 2 - 2\sqrt{x^2 + 2}\sqrt{y^2 + 2} \\ &\Rightarrow 2 + xy = \sqrt{x^2 + 2}\sqrt{y^2 + 2} \Rightarrow 4 + 4xy + x^2y^2 = x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 0 \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Pertanto la funzione è iniettiva. D'altra parte $y \in f(\mathcal{R})$ se e solo se l'equazione

$$x - \sqrt{x^2 + 2} = y$$

ammette almeno una soluzione. Risulta quindi

$$\begin{aligned} x - \sqrt{x^2 + 2} = y &\Leftrightarrow x - y = \sqrt{x^2 + 2} \Leftrightarrow x - y \geq 0 \text{ e } x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x - y \geq 0, \quad y \neq 0 \text{ e } x = \frac{y^2 - 2}{2y} \end{aligned}$$

Ottengo infine

$$x - y = \frac{y^2 - 2}{2y} - y = \frac{-y^2 - 2}{2y}$$

Pertanto la condizione $x - y \geq 0$ è verificata se e solo se $y < 0$. L'insieme dei valori di f è quindi: $(-\infty, 0)$. Da notare che la funzione

$$g(y) = \frac{y^2 - 2}{2y} \quad y < 0$$

è la funzione inversa di f .

3. Sia

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+x+1} \quad x \in \mathcal{R}$$

i) Dire se f è iniettiva;

ii) Calcolare l'insieme dei valori di f : $f(\mathcal{R})$.

Se $x, y \in \mathcal{R}$, allora

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{y+1}{y^2+y+1} \\ \Rightarrow xy^2 + xy + x + y^2 + y + 1 &= x^2y + xy + y + x^2 + x + 1 \Rightarrow xy(y-x) + y^2 - x^2 = 0 \\ &\Rightarrow (x-y)(xy+y+x) = 0 \end{aligned}$$

Pertanto la funzione non è iniettiva. Infatti l'uguaglianza $f(x) = f(y)$ non vale solo quando $x = y$ ma anche quando $xy + y + x = 0$ ossia quando $y = \frac{-x}{x+1}$. Per esempio quindi $f(1) = f(\frac{-1}{2})$. D'altra parte $y \in f(\mathcal{R})$ se e solo se l'equazione

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = y$$

ammette almeno una soluzione. Risulta quindi

$$\frac{x+1}{x^2+x+1} = y \Leftrightarrow yx^2 + (y-1)x + y-1 = 0$$

Osserviamo ora che se $y = 0$, allora l'equazione diventa di primo grado ed ha la soluzione $x = -1$. D'altra parte se $y \neq 0$ l'equazione ammette almeno una soluzione se e solo se $\Delta(y) = (y-1)^2 - 4y(y-1) \geq 0$ ossia se e solo se $(y-1)(3y+1) \leq 0$. L'insieme dei valori è dato dunque dall'intervallo $[-\frac{1}{3}, 1]$.

4. Sia

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} - x$$

Verificare che f è iniettiva, calcolare l'insieme dei valori di f e scrivere la funzione inversa di f .

Se $x, y \in \mathcal{R}$, risulta:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x + 2} - x &= \sqrt{y^2 + y + 2} - y \Rightarrow \sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{y^2 + y + 2} = x - y \Rightarrow \\ x^2 + x + 2 + y^2 + y + 2 - 2\sqrt{x^2 + x + 2}\sqrt{y^2 + y + 2} &= x^2 + y^2 - 2xy \Rightarrow x + y + 2xy + 4 = \\ = 2\sqrt{x^2 + x + 2}\sqrt{y^2 + y + 2} &\Rightarrow x^2 + y^2 + 4x^2y^2 + 16 + 2xy + 4x^2y + 8x + 4xy^2 + 8y + 16xy = \\ &= 4(x^2y^2 + x^2y + 2x^2 + xy^2 + xy + 2x + 2y^2 + 2y + 4) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 7x^2 + 7y^2 - 14xy = 0 \Rightarrow (x-y)^2 = 0 \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

Pertanto la funzione è iniettiva. D'altra parte $y \in \mathcal{R}$ sta nell'insieme dei valori di f se e solo se l'equazione (nella x):

$$\sqrt{x^2 + x + 2} - x = y$$

ammette una soluzione. Risulta

$$\sqrt{x^2 + x + 2} - x = y \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 2} = x + y \Leftrightarrow x + y \geq 0 \text{ e } x^2 + x + 2 = x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow$$

$$x + y \geq 0 \text{ e } x(1 - 2y) = y^2 - 2 \Leftrightarrow x + y \geq 0, 1 - 2y \neq 0 \text{ e } x = \frac{y^2 - 2}{1 - 2y}$$

Osserviamo infine che

$$x + y = \frac{y^2 - 2}{1 - 2y} + y = \frac{y^2 - 2 + y - 2y^2}{1 - 2y} = \frac{-y^2 + y - 2}{1 - 2y}$$

Pertanto risulta $x + y \geq 0$ se e solo se $1 - 2y < 0$, ossia $y > \frac{1}{2}$. L'insieme dei valori della funzione f è dato dunque dall'insieme $B = (\frac{1}{2}, +\infty)$.

3 LIMITI DI FUNZIONI

In questo capitolo introdurremo il concetto di limite per una funzione di variabile reale.

Per rendere la trattazione più omogenea e dare una definizione unica per le varie situazioni che si possono presentare introdurremo il concetto di intorno.

Daremo dunque la seguente:

Definizione 3.1 *i) se $x_0 \in \mathcal{R}$, chiameremo intorno di x_0 ogni intervallo del tipo $(x_0 - r, x_0 + r)$ con $r \in \mathcal{R}$, $r > 0$;*

ii) se $x_0 = +\infty$, chiameremo intorno di $+\infty$ ogni intervallo del tipo $(r, +\infty)$ con $r \in \mathcal{R}$;

iii) se $x_0 = -\infty$, chiameremo intorno di $-\infty$ ogni intervallo del tipo $(-\infty, r)$ con $r \in \mathcal{R}$.

Quando parleremo di limite per $x \rightarrow x_0$ ($x_0 \in \mathcal{R}$ o $x_0 = \pm\infty$) di una funzione $f : A \rightarrow \mathcal{R}$, supporremo sempre che per ogni intorno $\mathcal{U}_{x_0}$ di x_0 si abbia $\mathcal{U}_{x_0} \cap A \neq \emptyset$.

Possiamo ora dare la seguente definizione generale:

Definizione 3.2 Definizione di limite *Se $x_0 \in \mathcal{R}$ o $x_0 = \pm\infty$ e $L \in \mathcal{R}$ o $L = \pm\infty$, diremo che $f(x)$ tende a L per x che tende a x_0 e scriveremo*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad (7)$$

se $\forall$ intorno di L : $\mathcal{U}_L$, $\exists$ un intorno di x_0 : $\mathcal{V}_{x_0}$ tale che $f(x) \in \mathcal{U}_L$, $\forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0} - \{x_0\}$.

Alcuni casi particolari che vorremmo evidenziare sono:

a) se $x_0 \in \mathcal{R}$ e $L \in \mathcal{R}$, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$, $\forall x \in A \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) - \{x_0\}$. Da notare che in questo caso il valore della funzione in x_0 non interviene nella definizione di limite, anzi la funzione potrebbe non essere definita in x_0 .

Nel caso che f sia definita in x_0 e che $L = f(x_0)$ allora la funzione f si dice **continua** in x_0 .

b) se $x_0 \in \mathcal{R}$ e $L = +\infty$, allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

se $\forall r \in \mathcal{R}$, $\exists \delta_r > 0$ tale che $f(x) > r$ $\forall x \in A \cap (x_0 - \delta_r, x_0 + \delta_r) - \{x_0\}$.

c) se $x_0 = +\infty$ e $L \in \mathcal{R}$, allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists r_\varepsilon \in \mathcal{R}$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$, $\forall x \in A$, $x > r_\varepsilon$.

Un caso particolarmente importante si ha quando f è una successione, ossia quando l'insieme di definizione di f è $A = \mathcal{N}$. In tal caso, invece della notazione $f(n)$, useremo la notazione a_n , b_n , $\dots$.

Nel caso di successioni, si ha quindi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

se $\forall \varepsilon > 0$, $\exists r_\varepsilon > 0$ tale che $|a_n - L| < \varepsilon$, $\forall n \in \mathcal{N}$, $n > r_\varepsilon$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

se $\forall r \in \mathcal{R}$, $\exists n_r > 0$ tale che $a_n > r$, $\forall n \in \mathcal{N}$, $n > n_r$.

Osservazione Vale la pena confrontare le due definizioni di successione con limite $+\infty$ e di successione non limitata superiormente, per metterne in evidenza la differenza.

i) Una successione ha limite $+\infty$ se

$$\forall r \in \mathcal{R} \quad \exists \nu_r \in \mathcal{R} \quad \text{tale che} \quad a_n > r \quad \forall n > \nu_r$$

ii) Una successione invece non è limitata superiormente se

$$\forall r \in \mathcal{R} \quad \exists n = n_r \in \mathcal{N} \quad \text{tale che} \quad a_n > r$$

Pertanto se una successione a_n ha limite $+\infty$ è anche non superiormente limitata; mentre una successione può essere non superiormente limitata senza avere limite $+\infty$, come è ad esempio la successione:

$$a_n = (-1)^n n$$

Se $x_0 \in \mathcal{R}$, a volte nella definizione di limite, è più conveniente usare, invece che intorni completi del punto x_0 del tipo $(x_0 - r, x_0 + r)$, intorni destri come $(x_0, x_0 + r)$ o intorni sinistri del tipo $(x_0 - r, x_0)$. Si hanno allora le seguenti definizioni:

Definizione 3.3 Definizione di limite sinistro Se $x_0 \in \mathcal{R}$ o $x_0 = \pm\infty$ e $L \in \mathcal{R}$ o $L = \pm\infty$, diremo che $f(x)$ tende a L per x che tende a x_0 e scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \quad (8)$$

se $\forall \mathcal{U}_L, \exists r_L > 0$ tale che $f(x) \in \mathcal{U}_L, \forall x \in A \cap (x_0 - r_L, x_0)$.

Definizione 3.4 Definizione di limite destro Se $x_0 \in \mathcal{R}$ o $x_0 = \pm\infty$ e $L \in \mathcal{R}$ o $L = \pm\infty$, diremo che $f(x)$ tende a L per x che tende a x_0 e scriveremo

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \quad (9)$$

se $\forall \mathcal{U}_L, \exists r_L > 0$ tale che $f(x) \in \mathcal{U}_L, \forall x \in A \cap (x_0, x_0 + r_L)$.

È immediato vedere che esiste il limite di una funzione per $x \rightarrow x_0$ se e solo se esistono i limiti destro e sinistro di f per $x \rightarrow x_0$ e sono uguali.

Vedremo ora alcuni esempi importanti.

1. Se la funzione f è un polinomio, ossia se

$$f(x) = P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

allora risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathcal{R}.$$

2. Risulta $\forall a \in \mathcal{R} \quad a > 0$

i)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} \quad \forall x_0 \in \mathcal{R}$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0 \quad \forall x_0 \in \mathcal{R} \quad x_0 > 0 \quad a \neq 1$$

Infatti:

i) Supponendo $a > 1$. Soccome:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a^x - a^{x_0}) = a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (a^{x-x_0} - 1)$$

basta dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a^{x-x_0} - 1) = 0$$

Ora se $\varepsilon \in (0, 1)$, risulta:

$$a^{x-x_0} - 1 < \varepsilon \Leftrightarrow x - x_0 < \log_a(1 + \varepsilon)$$

$$a^{x-x_0} - 1 > -\varepsilon \Leftrightarrow x - x_0 > \log_a(1 - \varepsilon)$$

Ponendo quindi:

$$\delta_\varepsilon = \min\{\log_a(1 + \varepsilon), -\log_a(1 - \varepsilon)\}$$

si ottiene che se $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, risulta $|a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon$.

ii) Supponendo sempre $a > 1$. Siccome:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\log_a x - \log_a x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \log_a \frac{x}{x_0}$$

basta dimostrare che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a \frac{x}{x_0} = 0$$

Ottengo dunque se $\varepsilon > 0$:

$$\log_a \frac{x}{x_0} < \varepsilon \Leftrightarrow x < x_0 a^\varepsilon \Leftrightarrow x - x_0 < x_0 (a^\varepsilon - 1)$$

$$\log_a \frac{x}{x_0} > -\varepsilon \Leftrightarrow x > x_0 a^{-\varepsilon} \Leftrightarrow x - x_0 > x_0 (a^{-\varepsilon} - 1)$$

Ponendo quindi:

$$\delta_\varepsilon = \min\{x_0 (a^\varepsilon - 1), x_0 (1 - a^{-\varepsilon})\}$$

si ottiene che se $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$, si ha $|\log_a \frac{x}{x_0}| < \varepsilon$.

3. Risulta :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$$

Per verificare queste due affermazioni, osserviamo, in primo luogo che vale la disuguaglianza:

$$|\sin x| \leq |x| \quad \forall x \in \mathcal{R}.$$

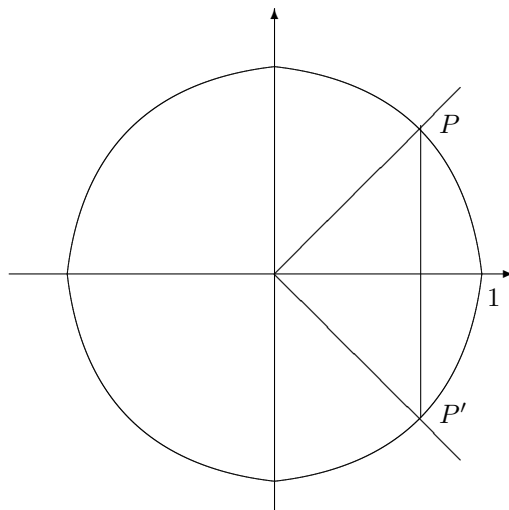
Infatti:

i) se $|x| \geq \frac{\pi}{2}$, allora :

$$|\sin x| \leq 1 < \frac{\pi}{2} \leq |x|$$

e la disuguaglianza è verificata ;

ii) se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ragionando sulla figura che segue si ottiene:



$$\sin x = \frac{\overline{PP'}}{2} < \frac{\widehat{PP'}}{2} = x$$

($\overline{PP'}$ é la lunghezza del segmento PP' , $\widehat{PP'}$ é la lunghezza dell'arco di circonferenza che congiunge P con P').

iii) se $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, allora $\sin x = -\sin(-x)$ con $-x \in (0, \frac{\pi}{2})$, pertanto

$$|\sin x| = -\sin x = \sin(-x) < -x = |x|.$$

In ogni caso dunque vale la disuguaglianza cercata. Ne possiamo concludere che

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \leq |x-x_0|$$

Ne deriva quindi che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\sin x - \sin x_0) = 0.$$

Analogamente :

$$|\cos x - \cos x_0| = 2 \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \leq |x-x_0|$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\cos x - \cos x_0) = 0.$$

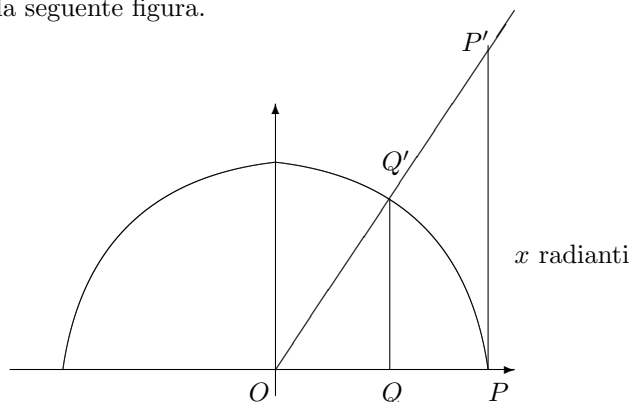
4. Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Supponiamo che $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, dal ragionamento fatto nell'esempio precedente, si ricava che

$$\frac{\sin x}{x} < 1$$

Ragioniamo ora sulla seguente figura.



Il settore circolare OPQ' è contenuto nel triangolo OPP' , pertanto vale la disuguaglianza

$$area(OPQ') < area(OPP')$$

ossia

$$\frac{2x \cdot 1}{2} < \frac{\overline{PP'} \cdot 1}{2}$$

D'altra parte, dalla similitudine dei triangoli OPP' e OQQ' , si ricava che

$$\frac{\overline{PP'}}{1} = \frac{\overline{QQ'}}{\overline{OQ}} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Pertanto si ottiene

$$x < \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{ossia} \quad \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

Possiamo quindi concludere che

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Osserviamo infine che se $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, si ha

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{-\sin(-x)}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$$

e $\cos x = \cos(-x)$, pertanto la doppia disuguaglianza

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

vale $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$. Siccome

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$$

, si ottiene che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

5. Verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, la diseguglianza:

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

è equivalente a

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{ossia} \quad n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Posto quindi

$$r_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon},$$

la richiesta nella definizione di limite è soddisfatta.

6. Verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2.$$

$\forall \varepsilon > 0$, si ha:

$$\left| \frac{2n+1}{n+3} - 2 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{-5}{n+3} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{n+3} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{5}{\varepsilon} - 3$$

Posto quindi

$$r_\varepsilon = \frac{5}{\varepsilon} - 3$$

ottengo che la definizione di limite è verificata, ossia :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \frac{2n+1}{n+3} - 2 \right| < \varepsilon \quad \forall n > r_\varepsilon = \frac{5}{\varepsilon} - 3$$

3.1 Alcune proprietà importanti dei limiti

Cominciamo col seguente:

Teorema 3.1 Unicità del limite *Se una funzione ha limite, questo è unico; ossia se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L'$$

allora $L = L'$.

Dimostrazione. Consideriamo il caso che $x_0, L, L' \in \mathcal{R}$. e, ragionando per assurdo, supponiamo che sia $L \neq L'$ e che sia $L < L'$. Allora, scelto $\varepsilon > 0$ con

$$0 < \varepsilon < \frac{L' - L}{2}$$

risulta $L + \varepsilon < L' - \varepsilon$. Dalla definizione di limite, esistono $\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon$ tali che

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta'_\varepsilon, x_0 + \delta'_\varepsilon) - \{x_0\}$$

$$|f(x) - L'| < \varepsilon \quad \forall x \in A \cap (x_0 - \delta''_\varepsilon, x_0 + \delta''_\varepsilon) - \{x_0\}$$

Allora se pongo $\delta_\varepsilon = \min\{\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon\}$, ottengo allora, se $x \in A \cap (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon) - \{x_0\}$

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

$$L' - \varepsilon < f(x) < L' + \varepsilon$$

e quindi $L' - \varepsilon < L + \varepsilon$ e questo contrasta con la scelta di ε .

q.e.d.

Osservazione Una funzione può non avere limite. Ad esempio, se $x_0 = 0$ e la funzione f è definita dalla legge:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (10)$$

non ha limite per $x \rightarrow 0$.

Un secondo risultato è dato dal seguente

Teorema 3.2 (Limitatezza locale) Se esiste il

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

e $L \in \mathcal{R}$, allora esistono un intorno di x_0 : $\mathcal{V}_{x_0}$ ed un numero positivo M tali che $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0}$.

Dimostrazione. Applicando la definizione di limite con $\varepsilon = 1$, ottengo che esiste un intorno $\mathcal{V}_{x_0}$ tale che $|f(x) - L| < 1 \quad \forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0}$ e quindi $|f(x)| \leq 1 + |L| = M \quad \forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0}$. q.e.d.

Osservazione Il viceversa del teorema precedente non vale, ossia una funzione può essere limitata in un intorno di x_0 e non aver limite per $x \rightarrow x_0$. Un esempio semplice è dato dalla funzione (10).

Useremo spesso nel seguito anche il seguente:

Teorema 3.3 (Teorema della permanenza del segno) Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

e che $L > 0$ ($L < 0$). Allora esiste un intorno $\mathcal{V}_{x_0}$ tale che $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$), $\forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0}$.

Dimostrazione. Supponiamo $L \in \mathcal{R}$, $L > 0$. Dalla definizione di limite con $\varepsilon = \frac{L}{2}$, si ottiene che esiste $\mathcal{V}_{x_0}$ tale che

$$|f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0} - \{x_0\}$$

e quindi

$$f(x) > L - \varepsilon = \frac{L}{2} > 0 \quad \forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0} - \{x_0\}$$

q.e.d.

Molto utile, nello svolgimento degli esercizi sarà il seguente

Teorema 3.4 (Operazione coi limiti)

1. **Limite della somma** Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = L + M \tag{11}$$

tranne nel caso che sia $L = +\infty$ e $M = -\infty$ o viceversa.

Da notare che in (11) la somma va intesa nel modo seguente:

$$L + M = \begin{cases} +\infty & \text{se } L \in \mathcal{R} \text{ o } L = +\infty \text{ e } M = +\infty \\ -\infty & \text{se } L \in \mathcal{R} \text{ o } L = -\infty \text{ e } M = -\infty \end{cases}$$

2. **Limite del prodotto** Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M \tag{12}$$

tranne nel caso che sia $L = 0$ e $M = \pm\infty$ o viceversa.

Da notare che in (12) il prodotto va intesa nel modo seguente:

$$L \cdot M = \begin{cases} +\infty & \text{se } L \in \mathcal{R}, L > 0 \text{ o } L = +\infty \text{ e } M = +\infty \\ -\infty & \text{se } L \in \mathcal{R}, L < 0 \text{ o } L = -\infty \text{ e } M = +\infty \end{cases}$$

3. Limite del rapporto

- Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ } (-\infty)$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$$

- Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

e che esista un intorno $\mathcal{V}_{x_0}$ tale che $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) $\forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0} - \{x_0\}$ Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \text{ } (-\infty).$$

- Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = M$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

quando il rapporto L/M ha senso (in genere i casi $L = M = 0$, $L = \pm\infty$ e $M = \pm\infty$ sono esclusi).

Dimostrazione.

- (Limite della somma) Fare la dimostrazione per esercizio;
- (Limite del prodotto) Consideriamo il caso $L, M \in \mathcal{R}$. Osserviamo che

$$\begin{aligned} |f(x) \cdot g(x) - L \cdot M| &= |f(x) \cdot g(x) - L \cdot g(x) + L \cdot g(x) - L \cdot M| \leq \\ &\leq |f(x) - L| \cdot |g(x)| + |L| \cdot |g(x) - M| \end{aligned}$$

Ora essendo g limitata localmente (vedi teorema sulla limitatezza locale) esistono un intorno di x_0 : $\mathcal{V}'_{x_0}$ ed un numero positivo k tali che $|g(x)| \leq k$, $\forall x \in A \cap \mathcal{V}'_{x_0} - \{x_0\}$. D'altra parte dalla definizione di limite, $\forall \varepsilon > 0$ esistono due intorni di x_0 : $\mathcal{V}''_{x_0}$, $\mathcal{V}'''_{x_0}$ tali che

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2k}, \quad \forall x \in A \cap \mathcal{V}''_{x_0} - \{x_0\}$$

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2L}, \quad \forall x \in A \cap \mathcal{V}'''_{x_0} - \{x_0\}$$

Allora se $x \in A \cap \mathcal{V}'_{x_0} \cap \mathcal{V}''_{x_0} \cap \mathcal{V}'''_{x_0} - \{x_0\}$, si ottiene

$$|f(x) \cdot g(x) - L \cdot M| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- (Limite del rapporto) Consideriamo il caso $L, M \in \mathcal{R}$, $M \neq 0$. Usando il teorema sul limite del prodotto, basta dimostrare che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}$$

Supposto $M > 0$, per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno di x_0 : $\mathcal{V}_{x_0}$ tale che $g(x) > M/2$, $\forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0} - \{x_0\}$. Allora

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| = \left| \frac{M - g(x)}{g(x) \cdot L} \right| \leq \frac{2}{L^2} |g(x) - M|$$

Applicando infine la definizione di limite $\forall \varepsilon > 0$ esiste un intorno di x_0 : $\mathcal{V}'_{x_0}$ tale che $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon^2}{2}$, $\forall x \in A \cap \mathcal{V}'_{x_0} - \{x_0\}$. Possiamo quindi concludere che

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M} \right| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0} \cap \mathcal{V}'_{x_0} - \{x_0\}$$

q.e.d.

Un altro importante teorema della teoria dei limiti è il seguente:

Teorema 3.5 (*Limite della composta*) Siano $f; A \rightarrow \mathcal{R}$ e $g; B \rightarrow \mathcal{R}$ due date funzioni con $f(A) \subset B$. Supponiamo che:

i) esista il

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L;$$

ii) esista il

$$\lim_{y \rightarrow L} g(y) = M;$$

iii) esista un intorno di x_0 : $\mathcal{V}_{x_0}$ tale che $f(x) \neq L \quad \forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0} - \{x_0\}$.

Allora esiste il limite per $x \rightarrow x_0$ della funzione composta $h(x) = g(f(x))$ e risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = M.$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso che sia $L, M \in \mathcal{R}$. Dall'ipotesi ii) si ricava che $\forall \varepsilon > 0$ esiste un intorno di L ; $\mathcal{U}_L$ tale che

$$|g(y) - M| < \varepsilon \quad \forall y \in B \cap \mathcal{U}_L - \{L\}$$

D'altra parte dall'ipotesi i) e iii) si ricava che esiste un intorno di x_0 : $\mathcal{V}'_{x_0}$ tale che $f(x) \in \mathcal{U}_L - \{L\}, \forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0} \cap \mathcal{V}'_{x_0} - \{x_0\}$. Possiamo quindi concludere che

$$|g(f(x)) - M| < \varepsilon, \quad \forall x \in A \cap \mathcal{V}_{x_0} \cap \mathcal{V}'_{x_0} - \{x_0\}$$

q.e.d.

Una conseguenza del teorema sul limite della composta è il seguente:

Teorema 3.6 Sono equivalenti le seguenti affermazioni:

i) esiste il

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

ii) per ogni successione $\{x_n\}$, con $x_n \in A - \{x_0\} \quad \forall n \in \mathcal{N}$ e tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$$

Dimostrazione. Supponiamo che valga la i) e che $\{x_n\}$ sia una successione con $x_n \in A - \{x_0\} \quad \forall n \in \mathcal{N}$ e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

Allora applicando il teorema sul limite della composta con $f(n) = x_n$ e $g(y) = f(y)$, si ottiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$$

Viceversa, supponiamo che valga la ii) e proviamo che deve essere anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

ragionando per assurdo. Se f non avesse limite L per $x \rightarrow x_0$, esisterebbe un intorno $\mathcal{U}_L$ di L tale che ogni intorno $\mathcal{V}_{x_0}$ di x_0 conterrebbe almeno un punto x di A diverso da x_0 con $f(x) \notin \mathcal{U}_L$. Scegliendo quindi come intorno di x_0 gli intervalli $(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})$, $n \in \mathcal{N}$ si otterrebbe una successione $x_n \in A - \{x_0\}$ con $0 < |x_n - x_0| < 1/n$ e $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. Avremmo quindi ottenuto una successione $x_n \in A - \{x_0\}$ con limite x_0 e tale che la successione $f(x_n)$ non ha limite L . Questo contrasta con l'ipotesi ii). q.e.d.

Una conseguenza interessante di questo teorema è la seguente:

Osservazione Se esistono due successioni diverse x_n e y_n di elementi di $A - \{x_0\}$ con:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$$

allora il

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad \text{non esiste}.$$

Proponiamoci, per esempio, di vedere se esiste il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Se poniamo

$$x_n = \frac{1}{2\pi n}$$

otteniamo una successione $x_n \neq 0$, che converge a zero con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(2\pi n) = 0.$$

D'altra parte, se poniamo

$$y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$$

otteniamo una nuova successione $y_n \neq 0$, che converge pure a zero ma con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1.$$

Pertanto il limite di partenza non esiste.

Un ultimo teorema generale che vorremmo ricordare riguarda le funzioni monotone, ossia quelle funzioni che sono crescenti o decrescenti. Vale il seguente:

Teorema 3.7 Sia $f : A \rightarrow \mathcal{R}$ una funzione monotona. Allora

i) se f è crescente, allora:

a) esiste il limite sinistro di f per $x \rightarrow x_0$ e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x), x \in A, x < x_0\},$$

b) esiste il limite destro di f per $x \rightarrow x_0$ e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(x), x \in A, x > x_0\},$$

c) se $x_0 \in A$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

ii) se f è decrescente, allora:

a) esiste il limite sinistro di f per $x \rightarrow x_0$ e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \inf\{f(x), x \in A, x < x_0\},$$

b) esiste il limite destro di f per $x \rightarrow x_0$ e risulta:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup\{f(x), x \in A, x > x_0\},$$

c) se $x_0 \in A$, allora:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \geq f(x_0) \geq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Dimostrazione. Dimostriamo la i), parte a) nel caso che

$$\sup\{f(x), x \in A, x < x_0\} = c \in \mathcal{R}.$$

Per le proprietà caratteristiche dell'estremo superiore, si ha:

- $f(x) \leq c, \forall x \in A, x < x_0$;
- $\forall \varepsilon > 0$ esiste un punto $x_\varepsilon \in A$ con $x_\varepsilon < x_0$ e $f(x_\varepsilon) > c - \varepsilon$

Essendo la funzione crescente, si ha che se $x \in (x_\varepsilon, x_0)$ allora $f(x) \geq f(x_\varepsilon)$. Risulta pertanto $c - \varepsilon < f(x_\varepsilon) \leq f(x) \leq c < c + \varepsilon$. Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = c$$

q.e.d.

Un caso interessante di questo teorema si ha quando la funzione f è una successione. In questo caso l'enunciato diventa;

Teorema 3.8 Se $a_n, n \in \mathcal{N}$ è una successione monotona, allora:

i) se a_n è crescente, esiste

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n, n \in \mathcal{N}\};$$

ii) se a_n è decrescente, esiste

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf\{a_n, n \in \mathcal{N}\}.$$

3.2 Alcuni esercizi sui limiti

In questo paragrafo vengono svolti alcuni esercizi sui limiti per mettere in risalto alcuni metodi di risoluzione che possono essere utili in seguito.

1. Sia $q \in (0, 1)$, allora si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

Verificare l'affermazione per esercizio, usando la definizione di limite.

2. Calcolare il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n \right)$$

Razionalizzando, si ottiene

$$\sqrt{n^2 + n + 1} - n = \frac{n^2 + n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} = \frac{n \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1 \right)}$$

Ne deriva quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - n \right) = \frac{1 + 0}{\sqrt{1 + 0 + 0} + 1} = \frac{1}{2}.$$

3. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right)$$

Razionalizzando anche questa volta, risulta:

$$n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right) = \frac{n \left(1 + \frac{2}{n} - 1 \right)}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{2}{n}} + 1}$$

Se ne conclude che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{1 + \frac{2}{n}} - 1 \right) = 1$$

4. Verificare per esercizio che se $\{a_n\}$, $n \in \mathcal{N}$ è una successione di numeri non negativi con

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}.$$

5. Usando il teorema della permanenza del segno, verificare che se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due successioni con

i) $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathcal{N}$,

ii) esistono i due limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b,$$

allora deve essere $a \leq b$.

Da notare inoltre che anche se nella i) vale la disuguaglianza stretta, ossia se $a_n < b_n \quad \forall n \in \mathcal{N}$, può essere $a = b$.

6. Verificare che, se $q \in \mathcal{R}$ e $q > 1$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$$

Infatti, fissato $M \in \mathcal{R}$ (che possiamo supporre positivo), si ha:

$$q^n > M \Leftrightarrow n \log q > \log M \Leftrightarrow n > \frac{\log M}{\log q} = \nu_M.$$

7. Verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n^2}{1 + n} = -\infty$$

Fissato $M \in \mathcal{R}$, risulta

$$\frac{n - n^2}{1 + n} < M \Leftrightarrow n - n^2 < M + n M \Leftrightarrow n^2 + (M - 1)n + M > 0$$

Ora il Δ del polinomio di secondo grado (in n) trovato è dato da

$$\Delta(M) = (M - 1)^2 - 4 M = M^2 - 6 M + 1$$

Osserviamo infine che le radici dell'ultimo polinomio di secondo grado (in M), sono date da

$$M_1 = 3 - 2\sqrt{2} \quad e \quad M_2 = 3 + 2\sqrt{2}$$

Ne deriva quindi che se $M \leq M_1$, allora $\Delta(M) \geq 0$ e quindi la disuguaglianza iniziale (nella variabile n) è verificata se

$$n > \frac{1 - M + \sqrt{\Delta(M)}}{2} = \nu_M$$

8. Verificare che se $q \in \mathcal{R}$ e $q > 1$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n} = +\infty .$$

Scrivendo $q = 1 + b$ con $b > 0$, usando la formula del binomio di Newton, si ottiene se $n \geq 3$

$$q^n = (1 + b)^n = 1 + \binom{n}{1} b + \binom{n}{2} b^2 + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} b^k > 1 + n b + \frac{n(n-1)}{2} b^2$$

Ne deriva quindi che

$$\frac{q^n}{n} > \frac{1}{n} + b + \frac{n-1}{2} b^2$$

e da questa disuguaglianza si ricava appunto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n} = +\infty .$$

Con un ragionamento simile, si può ottenere anche che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{n^p} = +\infty \quad \forall p \in \mathcal{N} .$$

9. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2^n}{n^2 + 3^n}$$

Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2^n}{n^2 + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \left(\frac{n}{2^n} + 1 \right)}{3^n \left(\frac{n^2}{3^n} + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n \frac{\frac{n}{2^n} + 1}{\frac{n^2}{3^n} + 1} = 0 \frac{0 + 1}{0 + 1} = 0 .$$

10. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + n^2 + 1}$$

Risulta;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt[n]{1 + \frac{n^2}{2^n} + \frac{1}{2^n}} = 2 .$$

11. Calcolare il:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2\sqrt{n}}{2n + 3}$$

Si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2\sqrt{n}}{2n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{\sqrt{n}}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{1 + 0}{2 + 0} = \frac{1}{2} .$$

12. Verificare che se $\{a_n\}$ è una successione con

$$a_n > 0 \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathcal{R} \quad con \quad a > 0$$

allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Dimostrazione. Essendo $a > 0$, posso trovare $\nu \in \mathcal{R}$ tale che

$$\frac{a}{2} < a_n < \frac{3}{2}a \quad \forall n > \nu$$

Ne deriva quindi se $n > \nu$:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3}{2}a}$$

Il risultato segue allora dal fatto che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3}{2}a} = 1$$

q.e.d.

13. Calcolare il:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{n^3 + n^2}$$

Usando la formula del binomio, possiamo scrivere il numeratore nel modo seguente:

$$(n+1)^4 - (n-1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 - (n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1) = 8n^3 + 8n$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{n^3 + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^3 + 8n}{n^3 + n^2} = 8$$

14. Verificare che se $a \in \mathcal{R}$, $a > 1$, allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Dimostrazione. Sia $k = [a]$ e $n > k + 1$, allora:

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdots \frac{a}{k} \cdot \frac{a}{k+1} \cdots \frac{a}{n} = \frac{a^k}{k!} \frac{a}{k+1} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^k}{k!} \left(\frac{a}{k+1} \right)^{n-k}$$

Siccome $\frac{a}{k+1} < 1$, si ricava che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{k+1} \right)^{n-k} = 0.$$

q.e.d.

15. Verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

Dimostrazione. Sia k un numero naturale e sia $n > k$, allora:

$$n! = (k-1)!k(k+1) \cdots n > (k-1)!k^{n-k+1}$$

Pertanto

$$\sqrt[n]{n!} > \sqrt[n]{(k-1)!} \sqrt[n]{k^{1-k}} \cdot k$$

Siccome abbiamo visto che $\forall a > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

possiamo trovare un numero $\nu_1 \in \mathcal{R}$ tale che $\forall n > \nu_1$. si ha

$$\sqrt[n]{(k-1)!} > \frac{1}{2} \quad e \quad \sqrt[n]{k^{1-k}} > \frac{1}{2}.$$

Ne deriva quindi che $\forall n > \max\{\nu_1, k\}$, si ha :

$$\sqrt[n]{n!} > \frac{k}{4}$$

e quindi vale l'affermazione iniziale.

q.e.d.

16. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n^2 - n + 10} - n \right)$$

Razionalizzando, si ottiene:

$$\left(\sqrt{2n^2 - n + 10} - n \right) = \frac{2n^2 - n + 10 - n^2}{\sqrt{2n^2 - n + 10} + n} = \frac{n^2 - n + 10}{\sqrt{2n^2 - n + 10} + n}$$

Ne deriva quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n^2 - n + 10} - n \right) = +\infty$$

17. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n + 1} - n \right)$$

Razionalizzando, anche in questo caso, otteniamo

$$\left(\sqrt[3]{n^3 + n + 1} - n \right) = \frac{n^3 + n + 1 - n^3}{\left(\sqrt[3]{n^3 + n + 1} \right)^2 + n \sqrt[3]{n^3 + n + 1} + n^2}$$

(abbiamo usato la formula

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \quad)$$

Possiamo quindi concludere che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n + 1} - n \right) = 0$$

18. A volte, per calcolare alcuni tipi di limite è utile il seguente criterio:

Criterio del rapporto Supponiamo che a_n sia una successione di numeri positivi e che esista il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

dove L può essere un numero reale o anche $+\infty$. Allora:

- se $L < 1$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

- se $L > 1$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$$

- esiste anche il limite della successione $\sqrt[n]{a_n}$ e risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

(Una dimostrazione verrà riportata poi alla fine del capitolo.)

Vediamo un esempio il cui il criterio del rapporto si può applicare. Supponiamo infatti di dover calcolare il seguente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n n!}{(3n)!}$$

In questo caso risulta

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(3n+3)!} \frac{(3n)!}{2^n n!} = \frac{2(n+1)}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}$$

Pertanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$$

e quindi, per il criterio del rapporto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n n!}{(3n)!} = 0$$

19. **(Due successioni importanti che definiscono il numero di Nepero)** Consideriamo le due successioni:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Verifichiamo che la successione $\{a_n\}$ è strettamente crescente e che la successione $\{b_n\}$ è strettamente decrescente. Cominciamo dunque col provare che

$$a_{n-1} < a_n \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad n \geq 2$$

Infatti

$$\begin{aligned} a_{n-1} < a_n &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \\ &\left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1} < \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \Leftrightarrow \frac{n-1}{n} < \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{n} < \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \end{aligned}$$

Ricordiamo ora che la disuguaglianza di Bernoulli afferma che, se $n \geq 2$ e $x \geq -1$, $x \neq 0$, allora :

$$(1+x)^n > 1 + nx.$$

Scegliendo infine $x = -\frac{1}{n^2}$, otteniamo :

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 - \frac{1}{n}$$

che è proprio l'ultima disuguaglianza della sequenza di disuguaglianze equivalenti che abbiamo ottenuto.

Consideriamo anche la seconda successione e verifichiamo che

$$b_n < b_{n-1} \quad \forall n \in \mathcal{N} \quad n \geq 2$$

Infatti

$$\begin{aligned} b_n < b_{n-1} &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \Leftrightarrow \\ &\frac{n+1}{n} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \Leftrightarrow \frac{n+1}{n} < \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} < \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \end{aligned}$$

Usando ancora la disuguaglianza di Bernoulli, con la scelta $x = \frac{1}{n^2-1}$ (con $n \geq 2$), otteniamo :

$$\left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1}$$

Otteniamo infine l'ultima disuguaglianza della sequenza di disuguaglianze precedenti, osservando che :

$$1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n} .$$

Da notare infine che

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

e pertanto risulta

$$a_n < b_n \quad \forall n \in \mathcal{N}$$

Ne deriva che $a_n < b_1 = 4 \quad \forall n \in \mathcal{N}$ e che $b_n > a_1 = 2 \quad \forall n \in \mathcal{N}$, ossia $\{a_n\}$ é limitata superiormente, mentre $\{b_n\}$ é limitata inferiormente. Esistono quindi i limiti :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$$

Dalla relazione che abbiamo già notato, ossia

$$b_n = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

risulta che i due limiti sono uguali ($a = b$). Tale limite verrà indicato nel seguito con la lettera **e** (**numero di Nepero**). Pertanto risulta

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

ed inoltre valgono le disuguaglianze :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \forall n \in \mathcal{N} .$$

Un terzo limite importante che vogliamo mettere in evidenza é il seguente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

Con alcuni passaggi algebrici, si ottiene:

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{a_{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}$$

Ne deriva quindi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

20. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{x}$$

(dove $\alpha \in \mathcal{R}$ é un numero fissato diverso da 0).

Risulta

$$\frac{\sin(\alpha x)}{x} = \alpha \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}$$

e la funzione

$$\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}$$

è la funzione composta delle funzioni $f(x) = \alpha x$ e $g(y) = \frac{\sin y}{y}$. Allora:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \alpha \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \alpha .$$

21. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1} .$$

Posto $y = x - 1$, risulta, per il teorema sul limite della composta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x-1} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi y}{2} + \frac{\pi}{2}\right)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} -\frac{\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)}{y} = -\frac{\pi}{2} .$$

22. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x .$$

Posto $y = x - \frac{\pi}{2}$, ottengo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \tan x &= \lim_{y \rightarrow 0} y \tan\left(y + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) \frac{y}{\sin y} = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot 1 = -1 . \end{aligned}$$

23. Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} .$$

Infatti si ha

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2(1 + \cos x)} = \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} \frac{1}{1 + \cos x} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1 + \cos x}$$

Quindi, si ottiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = 1^2 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} .$$

24. La funzione

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

è definita quando $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0$, ossia se $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Verifichiamo che:

i)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e ,$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e .$$

i) Indichiamo con $[x]$ la parte intera di x . Siccome $[x] \leq x < [x] + 1$, risulta:

$$1 + \frac{1}{[x] + 1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{[x]}$$

e quindi :

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$$

Il risultato segue allora se ricordiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

ii) Dal teorema sul limite della funzione composta, si ottiene, ponendo $y = -x$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^y$$

Ponendo infine $z = y - 1$, ottengo

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{z \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z+1} = e$$

25. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Ponendo $y = \frac{1}{x}$, si ottiene :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

26. Verificare che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log \left[(1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \log e = 1.$$

27. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

Ponendo $y = e^x - 1$, ottengo :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1.$$

3.3 Altri esercizi sui limiti

1. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(\frac{x+1}{x} \right)$$

Usando la sostituzione $y = \frac{1}{x}$, ottengo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(\frac{x+1}{x} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$$

2. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + \sqrt{n}}{n} \right)^n$$

Risulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n + \sqrt{n}}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{\sqrt{n}} \right]^{\sqrt{n}} = +\infty$$

3. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 2} \right)^{x^2}$$

Risulta :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 2} \right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x^2 - 2} \right)^{x^2} = (y = x^2 - 2) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{y} \right)^{y+2} = \\ &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{y} \right)^2 \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{y}{2}} \right)^{\frac{y}{2}} \right]^2 = e^2 \end{aligned}$$

4. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(\frac{2n+3}{2n+6} \right)$$

Risulta :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(\frac{2n+3}{2n+6} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left(1 - \frac{3}{2n+6} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 - \frac{3}{2n+6} \right)}{-\frac{3}{2n+6}} \cdot \frac{-3}{2n+6} \cdot n = 1 \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

5. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$$

Usiamo il criterio del rapporto. Se indichiamo con

$$a_n = \frac{n!}{n^n}$$

risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{e} < 1. \end{aligned}$$

Risulta pertanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

6. Calcolare il limite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+4} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+4} \right)^{\frac{n}{2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n+4} \right)^{\frac{n}{2}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{\frac{n+4}{3}} \right)^{\frac{n+4}{3}} \right]^{\frac{3}{n+4} \cdot \frac{n}{2}} = \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

7. Calcolare il

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3+n} \right)^n$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+1}{n^3+n} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1-n}{n^3+n} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{\frac{n^3+n}{n-1}} \right)^{\frac{n^3+n}{n-1}} \right]^{\frac{(n-1)n}{n^3+n}} = \left(\frac{1}{e} \right)^0 = 1. \end{aligned}$$

8. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$$

Razionalizzando si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2-1}{x^2} \frac{1}{(\sqrt[3]{1+x^2})^2 + \sqrt[3]{1+x^2} + 1} = \frac{1}{3}.$$

9. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right)$$

Ottengo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{\frac{1}{x+1}} \left(e^{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} - 1 \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x+1}} \frac{\left(e^{\frac{1}{x(x+1)}} - 1 \right)}{\frac{1}{x(x+1)}} \frac{x^2}{x(x+1)} = e^0 \cdot 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

10. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(5^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}} \right)$$

Risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(5^{\frac{1}{x}} - 2^{\frac{1}{x}} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x} \log 5} - e^{\frac{1}{x} \log 2} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \log 2} \frac{\left(e^{\frac{1}{x} (\log 5 - \log 2)} - 1 \right)}{\frac{1}{x} (\log 5 - \log 2)} (\log 5 - \log 2) = e^0 \cdot 1 \cdot (\log 5 - \log 2) = \log \left(\frac{5}{2} \right). \end{aligned}$$

11. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(\pi x)}{x-3}$$

Ponendo $y = x - 3$, si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(\pi x)}{x-3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi(y+3))}{y} = - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi y)}{y} = -\pi.$$

12. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \cos x)$$

Poniamo $f(x) = x(1 - \cos x)$ e osserviamo che se $x_n = 2\pi n$ si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0.$$

D'altra parte, se $y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty \quad e \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = +\infty.$$

Ne deriva quindi che il limite di partenza non esiste.

13. Calcolare il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x]}{x}$$

dove ricordiamo che $[x]$ é la parte intera di x .

Dalla definizione risulta:

$$[x] \leq x < [x] + 1 \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

e quindi se $x > 0$

$$1 - \frac{1}{x} < \frac{[x]}{x} \leq 1$$

Risulta pertanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[x]}{x} = 1.$$

3.4 Esercizi proposti

Calcolare i seguenti limiti:

1.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(\frac{x+4}{x+5} \right),$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{(x-3)(x+1)} - x,$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 3} - ax \right) \quad a \in \mathcal{R},$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + e^x)}{\sqrt{1 + x^2}},$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x,$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^9 - (x-1)^9}{(x+1)^8 - (x-1)^8},$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1 - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

8.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x^2},$$

9.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1},$$

10.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x.$$

(La soluzione si trova alla fine del capitolo)

3.5 Sottosuccessioni e teorema di Bolzano-Weierstrass

Cominciamo col dare la seguente:

Definizione 3.5 (Definizione di sottosuccessione) Sia $\{a_n\}$ una data successione. Diremo che $\{b_n\}$ è una **sottosuccessione** di $\{a_n\}$ o una **successione estratta** da $\{a_n\}$ se esiste una successione strettamente crescente di numeri naturali $\{k_n\}$ tale che

$$b_n = a_{k_n} \quad \forall n \in \mathcal{N}.$$

Ad esempio, se poniamo $k_n = 2n$, otteniamo la sottosuccessione

$$b_n = a_{2n}$$

che viene chiamata la sottosuccessione dei termini di posto pari. Analogamente si può considerare la sottosuccessione dei termini di posto dispari

$$c_n = a_{2n-1} \quad n \in \mathcal{N}.$$

Vale il seguente :

Teorema 3.9 Supponiamo che una successione $\{a_n\}$ abbia limite (finito o $\pm\infty$) e supponiamo che $\{b_n\}$ sia una sottosuccessione di $\{a_n\}$, allora $\{b_n\}$ ha lo stesso limite di $\{a_n\}$.

Dimostrazione. Supponiamo che sia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathcal{R}.$$

e che $\{k_n\}$ sia la successione strettamente crescente di numeri naturali tali che

$$b_n = a_{k_n}$$

Osserviamo, in primo luogo, che essendo $\{k_n\}$ una successione strettamente crescente di naturali, risulta

$$k_n \geq n \quad \forall n \in \mathcal{N}.$$

D'altra parte, dalla definizione di limite, $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_\varepsilon \in \mathcal{R}$ tale che

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_\varepsilon$$

Ora, se $n > \nu_\varepsilon$, risulta pure $k_n \geq n > \nu_\varepsilon$ e quindi

$$|b_n - a| = |a_{k_n} - a| < \varepsilon.$$

q.e.d.

Osservazione Dal teorema precedente si deduce che, se da una successione $\{a_n\}$, è possibile estrarre due sottosuccessioni con limiti diversi, allora la successione di partenza non ha limite. Per esempio, supponiamo di dover calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2n + 3}$$

Posto $b_n = a_{2n}$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 4n + 3} = 1 .$$

D'altra parte, posto $c_n = a_{2n-1}$ si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{(2n-1)^2 + 2n}{(2n-1)^2 + 4n + 1} = -1 .$$

Possiamo concludere quindi che il limite di partenza non esiste.

Abbiamo già osservato che ogni successione convergente (ossia con limite finito) è anche limitata ma che in generale non vale il viceversa, ossia una successione può essere limitata senza essere convergente, come mostra l'esempio $a_n = (-1)^n$.

Vale però il seguente importante teorema:

Teorema 3.10 (Teorema di Bolzano-Weierstrass) Sia $\{a_n\}$ una successione limitata. Allora si può estrarre da $\{a_n\}$ una sottosuccessione convergente.

3.6 Esercizi di ripasso

Questo capitolo contiene alcuni esercizi di ripasso sugli argomenti svolti fino ad ora. La risoluzione di tali esercizi si può trovare alla fine del capitolo.

1. Determinare l'insieme

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R} ; \frac{x+1}{x-3} < \frac{1}{2} \right\} .$$

2. Risolvere la seguente disuguaglianza

$$\frac{x^2 - x}{x + 2} > 2x + 1$$

3. Risolvere la disuguaglianza

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} \leq 5 .$$

4. Determinare l'insieme:

$$A = \{ x \in \mathcal{R} , 1 + 2x \leq \sqrt{x - x^2 + 2} \} .$$

5. Risolvere la seguente disuguaglianza

$$2\sqrt{x^2 + x - 2} > x + 3$$

6. Sia

$$A = \left\{ \frac{2n+5}{n+1} ; n \in \mathcal{N} \right\} .$$

Verificare che $\sup A = \max A = \frac{7}{2}$ e $\inf A = 2$.

7. Sia

$$A = \left\{ \frac{x^2 + x + 1}{x^2} , x \in \mathcal{R} \quad x \neq 0 \right\}$$

Verificare che

A non è superiormente limitato,

Calcolare $\inf A$ e dire se è minimo.

8. Sia

$$A = \left\{ \frac{x^2 + 6x + 1}{x^2 + 1} ; x \in \mathcal{R} \right\}.$$

Dire se A è superiormente limitato.

9. Sia $A = \{x \in \mathcal{R} ; x \neq 1\}$ ed $f : A \rightarrow \mathcal{R}$ la funzione definita dalla legge

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

Sia $B = f(A)$. Verificare che :

i) B non è nè superiormente nè inferiormente limitato;

ii) $B = \mathcal{R} - \{1\}$;

iii) $f : A \rightarrow B$ è iniettiva.

10. Calcolare i limiti:

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 1} \right); \quad ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n} - n \right)$$

$$iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + n^2 + n^3 2^n}; \quad iv) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n 2^n}{n + 2^n}$$

$$v) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 4^n}{n + 5^n}; \quad vi) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5 - (n-1)^5}{n^4}$$

11. Sia

$$A = \left\{ \frac{n + 2\sqrt{n}}{n + 1} ; n \in \mathcal{N} \right\}.$$

Verificare che A è inferiormente limitato e calcolare $\inf A$.

12. Risolvere la seguente disequaglianza:

$$\frac{2x^2 + x}{x - 2} < x - 3$$

13. Sia

$$A = \left\{ \frac{x + 1}{x^2 - x + 1} ; x \in \mathcal{R} \right\}$$

Calcolare $\sup A$.

14. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2^n}{n^3 + 3^n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right)$$

15. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la disequaglianza:

$$\frac{x^2 + 2x}{x + 1} > 2x - 1$$

16. Sia

$$A = \left\{ \sqrt{n^2 + n} - n ; n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e massimo di A .

17. Sia

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} \quad x \in \mathcal{R}, \quad x \neq 1$$

Dire se f è iniettiva e calcolare l'insieme dei valori di f .

18. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + n^2 + 1} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 6n + 1} - n \right) \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

19. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la disequaglianza:

$$\frac{x^2 - x}{x + 2} > 2x - 3$$

20. Sia

$$A = \left\{ \sqrt{n^2 + 2n} - n \quad ; \quad n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e massimo di A .

21. Sia

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} \quad x \in \mathcal{R}, \quad x \neq -1$$

Dire se f è iniettiva e calcolare l'insieme dei valori di f .

22. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + n^3 + 3} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 4n + 6} - n \right) \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+6} + \sqrt{n}}.$$

3.7 Dimostrazione del criterio del rapporto.

i) Poniamo $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$, essendo $L < 1$, risulta $\varepsilon > 0$ ed inoltre:

$$L + \varepsilon = L + \frac{1-L}{2} = \frac{1+L}{2} = q < 1$$

Dalla definizione di limite, posso trovare $m \in \mathcal{N}$ tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon = q \quad \forall n \geq m$$

ossia

$$a_{n+1} < q a_n \quad \forall n \geq m$$

Applicando ripetutamente questa disequaglianza, si ottiene:

$$\begin{aligned} a_{m+1} &< q a_m \\ a_{m+2} &< q a_{m+1} < q^2 a_m \\ a_{m+3} &< q a_{m+2} < q^3 a_m \\ &\vdots \\ a_{m+h} &< q a_{m+h-1} < q^h a_m \end{aligned}$$

Se poniamo infine $n = m + h$, otteniamo

$$a_n < q^{n-m} a_m \quad \forall n \in \mathcal{N}, \quad n \geq m + 1$$

Siccome $q \in (0, 1)$, q^n tende a zero quando n tende all'infinito. Per il teorema dei due carabinieri si ottiene allora che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

ii) Si ragiona nello stesso modo con ovvie modifiche.

iii) Verifichiamo l'affermazione nel caso che $L \in \mathcal{R}$ sia positivo, essendo il caso $L = +\infty$ e il caso $L = 0$ più semplici. Fissato $\varepsilon \in (0, L)$ sia $m = m_\varepsilon$ un numero naturale tale che

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon \quad \forall n \geq m$$

Ragionando per induzione, verifichiamo ora che valgono le disequaglianze:

$$(L - \varepsilon)^{n-m} a_m < a_n < (L + \varepsilon)^{n-m} a_m \quad \forall n \geq m + 1$$

Infatti, se $n = m + 1$, la disequaglianza deriva subito da

$$L - \varepsilon < \frac{a_{m+1}}{a_m} < L + \varepsilon$$

moltiplicando per a_m che è positivo. Supposta ora la doppia disequaglianza vera per $n \geq m + 1$, osserviamo che:

$$a_{n+1} < (L + \varepsilon) a_n < (L + \varepsilon) (L + \varepsilon)^{n-m} a_m = (L + \varepsilon)^{n+1-m} a_m$$

$$a_{n+1} > (L - \varepsilon) a_n > (L - \varepsilon) (L - \varepsilon)^{n-m} a_m = (L - \varepsilon)^{n+1-m} a_m$$

Estraendo la radice n-esima, ottengo:

$$(L - \varepsilon) \sqrt[n]{\frac{a_m}{(L - \varepsilon)^m}} < \sqrt[n]{a_n} < (L + \varepsilon) \sqrt[n]{\frac{a_m}{(L + \varepsilon)^m}} \quad \forall n \geq m + 1$$

Ricordiamo infine che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_m}{(L - \varepsilon)^m}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{a_m}{(L + \varepsilon)^m}} = 1$$

esistono quindi due numeri naturali $m' = m'_\varepsilon$ ed $m'' = m''_\varepsilon$ tali che:

$$\sqrt[n]{\frac{a_m}{(L - \varepsilon)^m}} > 1 - \varepsilon \quad \forall n \geq m'$$

$$\sqrt[n]{\frac{a_m}{(L + \varepsilon)^m}} < 1 + \varepsilon \quad \forall n \geq m''$$

Possiamo quindi concludere che, $\forall n \geq \max\{m, m', m''\}$, valgono le disequaglianze:

$$(L - \varepsilon) (1 - \varepsilon) < \sqrt[n]{a_n} < (L + \varepsilon) (1 + \varepsilon)$$

e quindi vale la tesi.

3.8 Risoluzione degli esercizi proposti

1. Risulta

$$\frac{x+4}{x+5} = \frac{1}{\frac{x+5}{x+4}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x+4}}$$

Pertanto, posto $y = \frac{1}{x+4}$ ossia $x = \frac{1}{y} - 4$, per il teorema sul limite della composta, ottengo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(\frac{x+4}{x+5} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{y} - 4 \right) \log \left(\frac{1}{1+y} \right) =$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} - \left(\frac{\log(1+y)}{y} - 4 \log(1+y) \right) = -1$$

2. Razionalizzando, ottengo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{(x-3)(x+1)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-3)(x+1) - x^2}{\sqrt{(x-3)(x+1)} + x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x-3}{\sqrt{(x-3)(x+1)} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2 - \frac{3}{x}}{\sqrt{1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} + 1} = -1.$$

3. Risulta

$$\frac{x^2-1}{x+3} - ax = \frac{(1-a)x^2 - 3ax - 1}{x+3}$$

Pertanto se $1-a > 0$ ossia se $a < 1$, il limite viene $+\infty$, mentre se $1-a < 0$ ossia $a > 1$, viene $-\infty$.
Infine, se $a = 1$, risulta:

$$\frac{x^2-1}{x+3} - x = \frac{-3x-1}{x+3}$$

e quindi il limite viene -3 .

4. Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+e^x)}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log[e^x(1+e^{-x})]}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log e^x + \log(1+e^{-x})}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\log(1+e^{-x})}{\sqrt{1+x^2}} \right) = 1 + 0 = 1$$

5. Posto $y = \log x$, ottengo:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y y = (\text{ponendo } z = -y) = \lim_{z \rightarrow +\infty} -\left(\frac{z}{e^z}\right) = 0$$

6. Dalla formula del binomio di Newton, scrivendo esplicitamente solo i primi due termini, si ottiene:

$$(x+1)^9 = x^9 + 9x^8 + \sum_{n=2}^9 \binom{9}{n} x^{9-n}$$

$$(x-1)^9 = x^9 - 9x^8 + \sum_{n=2}^9 \binom{9}{n} (-1)^n x^{9-n}$$

Ne deriva che:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^9 - (x-1)^9}{(x+1)^8 + (x-1)^8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{18x^8 + \sum_{n=2}^9 \binom{9}{n} [1 - (-1)^n] x^{9-n}}{(x+1)^8 + (x-1)^8} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{18 + \sum_{n=2}^9 \binom{9}{n} [1 - (-1)^n] x^{1-n}}{(1 + \frac{1}{x})^8 + (1 - \frac{1}{x})^8} = \frac{18}{2} = 9$$

7. Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1 - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x-1}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x+1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) = \frac{0}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

8. Razionalizzando, ottengo.

$$\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{1+x^2-1}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+1}$$

pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \frac{1}{2}$$

9. Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3}{2}$$

10. Risulta:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{x}{x-1}\right)^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^x} = (y = x-1) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y+1}} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

3.9 Risoluzione degli esercizi di ripasso

1. Determinare l'insieme

$$A = \left\{ x \in \mathcal{R} ; \frac{x+1}{x-3} < \frac{1}{2} \right\}.$$

Risulta:

$$\frac{x+1}{x-3} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2x+2-x+3}{2(x-3)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x+5}{2(x-3)} < 0$$

Pertanto $A = (-5, 3)$.

2. Risolvere la seguente disuguaglianza

$$\frac{x^2-x}{x+2} > 2x+1$$

Risulta

$$\frac{x^2-x}{x+2} > 2x+1 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-2x^2-4x-x-2}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+6x+2}{x+2} < 0$$

Il numeratore si annulla per $x_{1,2} = -3 \mp \sqrt{7}$ e quindi ottengo:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} + & + & + & - & - & - & - & - & - & + & + & + \\ \hline -3 - \sqrt{7} & & & & & & & & & -3 + \sqrt{7} & & \end{array} & \text{Segno del numeratore} \\ \begin{array}{cccccccccccc} & & & - & - & - & - & + & + & + & + & \\ \hline & & & & & & & -2 & & & & \end{array} & \text{Segno del denominatore} \end{array}$$

Pertanto la disuguaglianza è verificata se

$$x \in (-\infty, -3 - \sqrt{7}) \cup (-2, -3 + \sqrt{7}).$$

3. Risolvere la disuguaglianza

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} \leq 5.$$

Osserviamo che deve essere $x \geq 1$. Elevando al quadrato otteniamo:

$$x-1+x+4+2\sqrt{(x-1)(x+4)} \leq 25 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x+4)} \leq 11-x$$

Deve quindi essere anche $11-x \geq 0$ ossia $x \leq 11$. Infine elevando ancora al quadrato, ottengo:

$$x^2+4x-x-4 \leq 121+x^2-22x \Leftrightarrow 25x \leq 125 \Leftrightarrow x \leq 5$$

Possiamo infine concludere che la disuguaglianza vale se e solo se $x \in [1, 5]$.

4. Determinare l'insieme:

$$A = \{x \in \mathcal{R} , 1 + 2x \leq \sqrt{x - x^2 + 2}\} .$$

Affinchè la radice sia definita, deve essere $x - x^2 + 2 \geq 0$, ossia $x^2 - x - 2 \leq 0$. Essendo $\Delta = 1 + 8$, deve essere $x \in [-1, 2]$. D'altra parte, se $1 + 2x \leq 0$, la disuguaglianza è vera. Pertanto $[-1, -\frac{1}{2}] \subset A$. Infine se $x \in (-\frac{1}{2}, 2]$, elevando al quadrato, ottengo:

$$1 + 2x \leq \sqrt{x - x^2 + 2} \Leftrightarrow 1 + 4x^2 + 4x \leq x - x^2 + 2 \Leftrightarrow 5x^2 + 3x - 1 \leq 0$$

Ora l'ultimo polinomio di secondo grado ha $\Delta = 9 + 20 = 29$ e quindi le sue radici sono:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \mp \sqrt{29}}{10}$$

Quindi, affinché l'ultima disuguaglianza sia verificata, deve essere $x_1 \leq x \leq x_2$. Osserviamo infine che $-1 < x_1 < -1/2$ e che $x_2 < 2$. Pertanto

$$A = \left[-1, \frac{-3 + \sqrt{29}}{10} \right]$$

5. Risolvere la seguente disuguaglianza

$$2\sqrt{x^2 + x - 2} > x + 3$$

Osserviamo, in primo luogo che il radicando deve essere non negativo ed essendo le sue radici $\frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$ ossia $x_1 = -2$ e $x_2 = 1$, deve essere $x \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$. D'altra parte se $x + 3 < 0$ ossia se $x < -3$ la disuguaglianza è verificata (essendo in tal caso il primo membro non negativo ed il secondo negativo). Infine se $x + 3 \geq 0$, ossia se $x \geq -3$, risulta

$$2\sqrt{x^2 + x - 2} > x + 3 \Leftrightarrow 4(x^2 + x - 2) > x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 17 > 0$$

Questa ultima disuguaglianza è verificata infine se $x \in (-\infty, \frac{1-\sqrt{52}}{3}) \cup (\frac{1+\sqrt{52}}{3}, +\infty)$. Siccome $-3 < \frac{1-\sqrt{52}}{3} < -2$, possiamo concludere che la disuguaglianza iniziale è verificata se

$$x \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{52}}{3} \right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{52}}{3}, +\infty \right) .$$

6. Sia

$$A = \left\{ \frac{2n+5}{n+1} ; n \in \mathcal{N} \right\} .$$

Verificare che $\sup A = \max A = \frac{7}{2}$ e $\inf A = 2$.

Osserviamo che $\frac{7}{2} \in A$ in quanto tale valore si ottiene dalla definizione di A scegliendo $n = 1$. Pertanto $\frac{7}{2} = \max A$ se e solo se

$$\frac{2n+5}{n+1} \leq \frac{7}{2} \quad \forall n \in \mathcal{N} .$$

Risulta:

$$\frac{2n+5}{n+1} \leq \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{4n+10-7n-7}{2(n+1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{3n-3}{2(n+1)} \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 1$$

D'altra parte

$$\frac{2n+5}{n+1} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{2n+5-2n-2}{n+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3}{n+1} \geq 0$$

Pertanto 2 verifica la prima proprietà caratteristica dell'inf. Sia ora $\varepsilon \in \mathcal{R}$, $\varepsilon > 0$. allora:

$$\frac{2n+5}{n+1} < 2 + \varepsilon \Leftrightarrow 2n+5 < 2n+2+n\varepsilon+\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{3-\varepsilon}{\varepsilon}$$

e quindi 2 verifica anche la seconda proprietà caratteristica dell'inf.

7. Sia

$$A = \left\{ \frac{x^2 + x + 1}{x^2} , x \in \mathcal{R} \quad x \neq 0 \right\}$$

Verificare che

- A non è superiormente limitato,
- Calcolare $\inf A$ e dire se è minimo.

Sia $b \in \mathcal{R}$ con $b > 1$ e verifichiamo che la disuguaglianza

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2} > b$$

ammette almeno una soluzione. Infatti risulta

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2} > b \Leftrightarrow x^2 + x + 1 > b x^2 \Leftrightarrow (b - 1) x^2 - x - 1 < 0$$

Osserviamo che $\Delta = 1 + 4(b - 1) > 0$ e quindi la disuguaglianza è verificata se

$$x \in \left(\frac{1 - \sqrt{\Delta}}{2(b - 1)}, \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{2(b - 1)} \right) , \quad x \neq 0 .$$

D'altra parte $d \in \mathcal{R}$ è un minorante dell'insieme A se e solo se

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \geq d \quad \forall x \in \mathcal{R} , \quad x \neq 0$$

Osserviamo ora che

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2} \geq d \Leftrightarrow (1 - d) x^2 + x + 1 \geq 0$$

Deve quindi essere (ricordando che richiedo che la disuguaglianza sia vera per ogni $x \neq 0$)

$$1 - d > 0 \quad e \quad \Delta = 1 - 4(1 - d) = 4d - 3 \leq 0 \quad \text{ossia} \quad d \leq \frac{3}{4}$$

Pertanto $d = \frac{3}{4}$ è il più grande dei minoranti e quindi, per definizione, è l'estremo inferiore dell'insieme A . Da notare infine che $\frac{3}{4} \in A$ (si ottiene per $x = -2$) e quindi $\frac{3}{4} = \inf A$.

8. Sia

$$A = \left\{ \frac{x^2 + 6x + 1}{x^2 + 1} ; x \in \mathcal{R} \right\} .$$

Dire se A è superiormente limitato.

Ricordiamo che $b \in \mathcal{R}$ è un maggiorante dell'insieme A se

$$\frac{x^2 + 6x + 1}{x^2 + 1} \leq b \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

Osserviamo anche che, ponendo $x = 0$, si ottiene che deve essere $b \geq 1$. D'altra parte

$$\frac{x^2 + 6x + 1}{x^2 + 1} \leq b \Leftrightarrow (b - 1) x^2 - 6x + b - 1 \geq 0$$

Risulta quindi che b è maggiorante se e solo se $\Delta(b) = 36 - 4(b - 1)^2 \leq 0$ e quindi se e solo se $b^2 - 2b - 8 \geq 0$. Essendo $\Delta = 4 + 32$ e

$$b_{1,2} = \frac{2 \mp 6}{2} = \begin{cases} -2 \\ 4 \end{cases}$$

si ottiene che b è maggiorante se e solo se $b \geq 4$. Allora $4 = \sup A$. Notiamo infine che per $x = 1$, si ottiene anche che $4 \in A$ e quindi $4 = \max A$.

9. Sia $A = \{x \in \mathcal{R} ; x \neq 1\}$ ed $f : A \rightarrow \mathcal{R}$ la funzione definita dalla legge

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

Sia $B = f(A)$. Verificare che :

- i) B non è nè superiormente nè inferiormente limitato;
- ii) $B = \mathcal{R} - \{1\}$;
- iii) $f : A \rightarrow B$ è iniettiva.

Sia $\lambda \in \mathcal{R}$ con $\lambda > 1$, allora :

$$\frac{x}{x-1} > \lambda \Leftrightarrow \frac{x - \lambda x + \lambda}{x-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{(\lambda-1)x - \lambda}{x-1} < 0$$

Studiando infine il segno di numeratore e denominatore, otteniamo :

$\frac{\begin{array}{cccccc} - & - & - & - & + & + & + & + \\ 1 & & & & 1 + \frac{1}{\lambda-1} & & & \end{array}}{1}$	Segno del numeratore
$\frac{\begin{array}{cccccc} - & - & - & - & + & + & + & + \\ 1 & & & & & & & \end{array}}{1}$	Segno del denominatore

Se ne ricava che la disuguaglianza iniziale è verificata se

$$x \in \left(1, 1 + \frac{1}{\lambda-1}\right).$$

Pertanto $B = f(A)$ non è superiormente limitato. Analogamente se $\lambda \in \mathcal{R}$ verifica la disuguaglianza $\lambda < 1$, allora :

$$\frac{x}{x-1} < \lambda \Leftrightarrow \frac{x - \lambda x + \lambda}{x-1} < 0 \Leftrightarrow \frac{(1-\lambda)x + \lambda}{x-1} < 0$$

Ora otteniamo:

$\frac{\begin{array}{cccccc} - & - & - & - & + & + & + & + \\ 1 - \frac{1}{1-\lambda} & & & & 1 & & & \end{array}}{1}$	Segno del numeratore
$\frac{\begin{array}{cccccc} - & - & - & - & + & + & + & + \\ 1 & & & & & & & \end{array}}{1}$	Segno del denominatore

Se ne ricava che la seconda disuguaglianza è verificata se

$$x \in \left(1 - \frac{1}{1-\lambda}, 1\right).$$

Pertanto $B = f(A)$ non è inferiormente limitato. Sia ora $y \in \mathcal{R}$, consideriamo l'equazione (nella x)

$$\frac{x}{x-1} = y$$

Risulta :

$$\frac{x}{x-1} = y \Leftrightarrow x - yx = -y \Leftrightarrow x = \frac{-y}{1-y} \quad (\text{ se } y \neq 1) .$$

Pertanto $y \in f(A) \Leftrightarrow y \neq 1$.

10. Calcolare i limiti:

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 1} \right); \quad ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n} - n \right)$$

$$iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + n^2 + n^3 2^n}; \quad iv) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n 2^n}{n + 2^n}$$

$$v) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 4^n}{n + 5^n}; \quad vi) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5 - (n-1)^5}{n^4}$$

i) Razionalizzando si ottiene:

$$\left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 1} \right) = \frac{2n + 1}{\sqrt{n^2 + 2n} + \sqrt{n^2 - 1}}$$

possiamo quindi concludere che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 1} \right) = 1$$

ii) Razionalizzando anche in questo caso, ottengo:

$$\left(\sqrt[3]{n^3 + n} - n \right) = \frac{n}{\left(\sqrt[3]{n^3 + n} \right)^2 + n \sqrt[3]{n^3 + n} + n^2}$$

Ne deriva quindi che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n^3 + n} - n \right) = 0$$

iii) Raccogliendo $n^3 2^n$ si ottiene:

$$\sqrt[n]{1 + n^2 + n^3 2^n} = 2 \sqrt[n]{n^3} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n} 2^{-n} + \frac{1}{n^3} 2^{-n}}$$

Possiamo quindi concludere che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + n^2 + n^3 2^n} = 2$$

iv) Dividendo numeratore e denominatore per 2^n , si ottiene:

$$\frac{n 2^n}{n + 2^n} = \frac{n}{\frac{n}{2^n} + 1}$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n 2^n}{n + 2^n} = +\infty$$

v) Dividendo numeratore e denominatore per 5^n , si ottiene:

$$\frac{2^n + 4^n}{n + 5^n} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n}{\frac{n}{5^n} + 1}$$

e quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 4^n}{n + 5^n} = 0$$

vi) Usando la formula del binomio di Newton, si ha

$$\begin{aligned} (n+1)^5 - (n-1)^5 &= n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - \\ &\quad - (n^5 - 5n^4 + 10n^3 - 10n^2 + 6n - 1) = \\ &= 10n^4 + 20n^2 + 2 \end{aligned}$$

Ne possiamo concludere quindi che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5 - (n-1)^5}{n^4} = 10$$

11. Sia

$$A = \left\{ \frac{n+2\sqrt{n}}{n+1} ; n \in \mathcal{N} \right\} .$$

Verificare che A é inferiormente limitato e calcolare $\inf A$.

Posto

$$a_n = \frac{n+2\sqrt{n}}{n+1}$$

risulta facile verificare che

- i) $a_n > 1 \quad \forall n \in \mathcal{N}$,
- ii) si ha:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$$

Ne deriva quindi che $\inf A = 1$. Infatti se $\varepsilon > 0$, risulta:

$$\frac{n+2\sqrt{n}}{n+1} < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon n - 2\sqrt{n} + 1 + \varepsilon > 0$$

Siccome $\varepsilon > 0$, l'ultima disequaglianza ha sempre soluzioni. In particolare se $\Delta(\varepsilon) = 4 - 4\varepsilon(1 + \varepsilon) > 0$, basta scegliere n in modo tale che

$$\sqrt{n} > \frac{2 + \sqrt{\Delta(\varepsilon)}}{2\varepsilon}$$

12. Risolvere la seguente disequaglianza:

$$\frac{2x^2 + x}{x - 2} < x - 3$$

Ottingo:

$$\frac{2x^2 + x}{x - 2} < x - 3 \Leftrightarrow \frac{2x^2 + x - x^2 + 2x + 3x - 6}{x - 2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 6x - 6}{x - 2} < 0$$

Osservando che le due radici dell'equazione di secondo grado sono:

$$x_{1,2} = -3 \mp \sqrt{15}$$

possiamo concludere che la disequaglianza é verificata se e solo se

$$x \in (-\infty, -3 - \sqrt{15}) \cup (\sqrt{15} - 3, 2) .$$

13. Sia

$$A = \left\{ \frac{x+1}{x^2-x+1} ; x \in \mathcal{R} \right\}$$

Calcolare $\sup A$.

Ricordiamo che un numero $b \in \mathcal{R}$, $b > 0$ é un maggiorante dell'insieme A se risulta:

$$\frac{x+1}{x^2-x+1} \leq b \quad \forall x \in \mathcal{R}$$

Ricordando che il denominatore della frazione considerata é sempre positivo, si ottiene:

$$\frac{x+1}{x^2-x+1} \leq b \Leftrightarrow x+1 \leq bx^2 - bx + b \Leftrightarrow bx^2 - (b+1)x + b-1 \geq 0$$

Affinché dunque la disequaglianza sia vera per ogni $x \in \mathcal{R}$, deve essere:

$$\Delta(b) = (b+1)^2 - 4b(b-1) = -3b^2 + 6b + 1 \leq 0$$

e quindi deve essere

$$b \geq \frac{3 + \sqrt{12}}{3}$$

Ne deriva quindi che

$$\sup A = \frac{3 + \sqrt{12}}{3}$$

Osserviamo infine che tale numero risulta essere anche il massimo elemento di A .

14. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2^n}{n^3 + 3^n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right)$$

Ottengo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2^n}{n^3 + 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n \frac{\frac{n^2}{2^n} + 1}{\frac{n^3}{3^n} + 1} = 0$$

Razionalizzando ottengo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\left(\frac{n+1}{n} - 1 \right)}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{n+1}{n}} + 1} = \frac{1}{2}$$

15. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la disuguaglianza:

$$\frac{x^2 + 2x}{x+1} > 2x - 1$$

Risulta:

$$\frac{x^2 + 2x}{x+1} > 2x - 1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 2x^2 + x - 2x + 1}{x+1} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 1}{x+1} < 0$$

Le radici del polinomio di secondo grado al numeratore sono $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ ed essendo $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} > -1$, risulta che la disuguaglianza è verificata se

$$x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

16. Sia

$$A = \left\{ \sqrt{n^2 + n} - n \ ; \ n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e massimo di A . Poniamo $a_n = \sqrt{n^2 + n} - n$ e verifichiamo che la successione a_n è strettamente crescente. Infatti:

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} &\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + n} - n < \sqrt{n^2 + 2n + 1 + n + 1} - n - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + n} + 1 < \sqrt{n^2 + 3n + 2} \Leftrightarrow n^2 + n + 1 + 2\sqrt{n^2 + n} < n^2 + 3n + 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\sqrt{n^2 + n} < 2n + 1 \Leftrightarrow 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

Ne deriva quindi che

$$\begin{aligned} \inf A &= \min A = a_1 = \sqrt{2} - 1 \\ \sup A &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - n^2}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Siccome $\frac{1}{2} \notin A$, A non ha massimo.

17. Sia

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} \quad x \in \mathcal{R}, \quad x \neq 1$$

Dire se f è iniettiva e calcolare l'insieme dei valori di f .

Siano $x, y \in \mathcal{R}$ con $x \neq 1, y \neq 1$, allora:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = \frac{y^2 + y + 1}{y - 1} &\Rightarrow x^2 y + x y + y - x^2 - x - 1 = x y^2 + x y + x - y^2 - y - 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x y(x - y) + 2(y - x) + (x + y)(x - y) = 0 \Rightarrow (x - y)(x y - 2 - y - x) = 0 \end{aligned}$$

Pertanto l'ultimo prodotto, oltre che per $x = y$, si annulla anche se $y(x - 1) = x + 2$, ossia se

$$y = \frac{x + 2}{x - 1}$$

Risulta allora, scegliendo per esempio $x = 0$ e quindi $y = -2$, che $f(0) = f(-2)$. Pertanto la funzione f non è iniettiva.

Sia ora $y \in \mathcal{R}$, l'equazione $f(x) = y$, ha soluzioni se e solo se

$$x^2 + x + 1 = x y - y \Leftrightarrow x^2 + (1 - y)x + 1 + y = 0$$

Deve quindi essere

$$\Delta(y) = (1 - y)^2 - 4(1 + y) \geq 0 \quad \text{ossia} \quad y^2 - 6y - 3 \geq 0$$

Pertanto l'insieme dei valori è dato dall'insieme

$$B = (-\infty, 3 - 2\sqrt{3}] \cup [3 + 2\sqrt{3}, +\infty)$$

18. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + n^2 + 1} \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 6n + 1} - n) \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Risulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \sqrt[n]{1 + \frac{n^2}{3^n} + \frac{1}{3^n}} = 3$$

Razionalizzando, ottengo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 6n + 1} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 6n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 6n + 1} + n} = \frac{6}{2} = 3$$

Sempre razionalizzando, ottengo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{n+1-n}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} = \frac{1}{4}$$

19. Dire per quali $x \in \mathcal{R}$ vale la disuguaglianza:

$$\frac{x^2 - x}{x + 2} > 2x - 3$$

Risulta:

$$\frac{x^2 - x}{x + 2} > 2x - 3 \Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 2x^2 - 4x + 3x + 6}{x + 2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 6}{x + 2} < 0$$

Le radici del polinomio di secondo grado al numeratore sono $-1 \mp \sqrt{7}$ ed essendo $-1 - \sqrt{7} < -2$, risulta che la disuguaglianza è verificata se

$$x \in (-\infty, -1 - \sqrt{7}) \cup (-2, \sqrt{7} - 1)$$

20. Sia

$$A = \left\{ \sqrt{n^2 + 2n} - n ; n \in \mathcal{N} \right\}$$

Calcolare $\inf A$ e $\sup A$ e dire se sono minimo e massimo di A . Poniamo $a_n = \sqrt{n^2 + 2n} - n$ e verifichiamo che la successione a_n è strettamente crescente. Infatti:

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} &\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 2n} - n < \sqrt{n^2 + 2n + 1 + 2n + 2} - n - 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 2n} + 1 < \sqrt{n^2 + 4n + 3} \Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 + 2\sqrt{n^2 + 2n} < n^2 + 4n + 3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n^2 + 2n} < n + 1 \Leftrightarrow n^2 + 2n < n^2 + 2n + 1 \end{aligned}$$

Ne deriva quindi che

$$\begin{aligned} \inf A &= \min A = a_1 = \sqrt{3} - 1 \\ \sup A &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n - n^2}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = 1 \end{aligned}$$

Siccome $1 \notin A$, A non ha massimo.

21. Sia

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} \quad x \in \mathcal{R}, \quad x \neq -1$$

Dire se f è iniettiva e calcolare l'insieme dei valori di f .

Siano $x, y \in \mathcal{R}$ con $x \neq -1, y \neq -1$, allora:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - x + 1}{x + 1} = \frac{y^2 - y + 1}{y + 1} &\Rightarrow x^2 y - x y + y - x^2 - x + 1 = x y^2 - x y + x - y^2 - y + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x y(x - y) + 2(y - x) + (x + y)(x - y) = 0 \Rightarrow (x - y)(x y - 2 + y + x) = 0 \end{aligned}$$

Pertanto l'ultimo prodotto, oltre che per $x = y$, si annulla anche se $y(x + 1) = 2 - x$, ossia se

$$y = \frac{2 - x}{x + 1}$$

Risulta allora, scegliendo per esempio $x = 0$ e quindi $y = 2$, che $f(0) = f(-2)$. Pertanto la funzione f non è iniettiva.

Sia ora $y \in \mathcal{R}$, l'equazione $f(x) = y$, ha soluzioni se e solo se

$$x^2 - x + 1 = x y - y \Leftrightarrow x^2 - (1 + y)x + 1 - y = 0$$

Deve quindi essere

$$\Delta(y) = (1 - y)^2 - 4(1 + y) \geq 0 \quad \text{ossia} \quad y^2 + 6y - 3 \geq 0$$

Pertanto l'insieme dei valori è dato dall'insieme

$$B = \left(-\infty, -3 - 2\sqrt{3} \right] \cup \left[-3 + 2\sqrt{3}, +\infty \right)$$

22. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + n^3 + 3} ; \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 4n + 6} - n \right) ; \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+6} + \sqrt{n}}.$$

Risulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{4^n + n^3 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \sqrt[n]{1 + \frac{n^3}{4^n} + \frac{3}{4^n}} = 4$$

Razionalizzando, ottengo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 4n + 6} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n + 6 - n^2}{\sqrt{n^2 + 4n + 6} + n} = \frac{4}{2} = 2$$

Sempre razionalizzando, ottengo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{\sqrt{n+6} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+6} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \frac{n + 6 - n}{(\sqrt{n+6} + \sqrt{n})(\sqrt{n+6} + \sqrt{n})} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$