Corso di recupero di Matematica per Biologia

Tutor: Pancaldi Francesco Università di Ferrara

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

30 dicembre 2009

Indice

Sommario

Gli argomenti trattati nel corso di recupero si possono così riassumere:

I numeri naturali, i numeri interi, i numeri razionali, gli insiemi, le funzioni, i monomi, i polinomi, la scomposizionein fattori, le frazioni algebriche, le equazioni lineari, le disequazioni lineari, nozioni base di geometria (punto, retta, piano, triangoli, ecc.), piano cartesiano, sistemi lineari, radicali, equazioni di 2^o *grado, risoluzione di equazioni di ordine superiore al* 2^o*, sistemi di disequazioni, parabola, ellisse (e circonferenza), iperbole nel piano cartesiano.*

Per qualsiasi chiarimento contattare il tutor all'indirizzo
e-mail: *francesco.pancaldi@student.unife.it*
oppure rivolgersi al manager didattico o al Professore Roselli Valter.

Quanto segue è un riassunto dei contenuti del corso di recupero volto alla preparazione degli studenti in vista del test di Matematica per Biologia, in quanto tale presenta solo una piccola parte di quanto visto in aula riguardo ai precedenti argomenti, pertanto non deve essere considerata una fonte esauriente riguardo le conoscenze matematiche di base richieste (anzi è consigliabile integrare lo studio con gli appunti delle lezioni), se si volesse vedere dei testi più approfonditi gli argomenti sono in genere trattati bene in qualsiasi libro di Matematica degli istituti superiori (primi due anni).

1 Numeri

1.1 Numeri Naturali $\mathbb{N}$

I numeri naturali 0,1,2,3. . . servono per contare: indicano cioè la **cardinalità** di un insieme.
I numeri naturali hanno un ordine e possono essere rappresentati su una semiretta orientata.

Le quattro operazioni: addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione.
Addizione e moltiplicazione sono **operazioni interne** in $\mathbb{N}$.
La sottrazione e la divisione non lo sono sempre (in effetti la sottrazione è interna nei numeri interi mentre la divisione nei razionali). Nella divisione **il divisore deve essere sempre diverso da 0**.

Un numero naturale è **multiplo** di un altro se la divisione del primo con il secondo dà come resto 0.
Un numero naturale è **divisore** di un altro se la divisione del secondo con il primo dà come resto 0.

Una **potenza** con esponente maggiore di 1 è una moltiplicazione della base con se stessa tante volte quante indicate dall'esponente.
Qualsiasi numero elevato alla 1 dà come risultato se stesso, un numero diverso da 0 elevato alla 0 dà come risultato 1, **l'espressione** 0^0 **non ha significato**.

Le operazioni vanno svolte nell'ordine seguente:
1. potenze
2. moltiplicazioni e divisioni
3. addizioni e sottrazioni
e le operazioni scritte tra parentesi hanno la precedenza.

Le proprietà delle operazioni:

Proprietà dell'addizione	
proprietà	espressione
commutativa	$a + b = b + a$
associativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$

Proprietà della moltiplicazione	
proprietà	espressione
commutativa	$a * b = b * a$
associativa	$(a * b) * c = a * (b * c)$
distributiva a destra	$(a + b) * c = a * c + b * c$
distributiva a sinistra	$a * (b + c) = a * b + a * c$

Proprietà della sottrazione		
proprietà	espressione	con
invariantiva	$a - b = (a + n) - (b + n)$	$a \geq b$
	$a - b = (a - n) - (b - n)$	$a \geq b \geq n$

Proprietà della divisione		
proprietà	espressione	con
invariantiva	$a : b = (an) : (bn)$	$b \neq 0, n \neq 0, a = kb, (k \neq 0)$
	$a : b = (a : n) : (b : n)$	$b \neq 0, n \neq 0, a = kb, (k \neq 0), b = hn, (h \neq 0)$
distributiva	$(a + b) : c = a : c + b : c$	$c \neq 0, a = kc, b = hc, a + b = mc, (k, h, m \neq 0)$

Proprietà delle potenze		
proprietà	espressione	con
prodotto di potenze di uguale base	$a^m a^n = a^{m+n}$	
quoziente di potenze di uguale base	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$m \geq n, a \neq 0$
potenza di una potenza	$(a^m)^n = a^{mn}$	
prodotto di potenze di uguale esponente	$a^n b^n = (ab)^n$	
quoziente di potenze di uguale esponente	$a^n : b^n = (a : b)^n$	$b \neq 0, a = kb, (k \neq 0)$

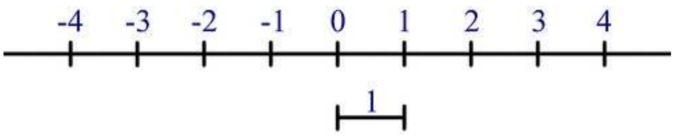
Un numero naturale è **primo** quando è divisibile solo per uno e per se stesso.
Ogni numero naturale si può scomporre in **prodotto di fattori primi**.

Il **M.C.D.** (massimo comun divisore) fra due o più numeri, diversi da 0, è il più grande dei divisori comuni ed è dato dal prodotto dei fattori primi comuni, ognuno preso una sola volta con la potenza più bassa.
Il **m.c.m.** (minimo comune multiplo) fra due o più numeri, diversi da 0, è il più piccolo dei multipli comuni ed è dato dal prodotto di tutti i fattori primi, comuni e non, ognuno preso una sola volta con la potenza più alta.

Per indicare un numero naturale si può a volte usare una lettera dell'alfabeto, che viene chiamata **variabile numerica**.

1.2 Numeri Interi $\mathbb{Z}$

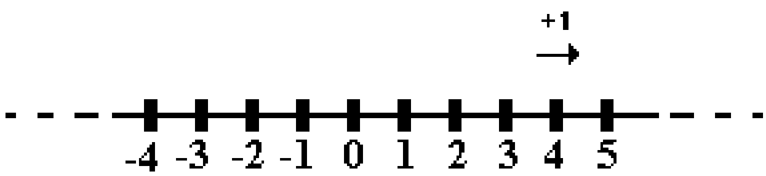
I numeri interi si ottengono facendo pregedere i naturali dal segno + o dal segno -.
L'insieme degli interi si indica $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots\}$ e può essere rappresentato su una retta orientata.



Due numeri interi sono **concordi** quando hanno lo stesso segno e **discordi** se hanno segno diverso.

Il **valore assoluto** di un numero è il numero stesso privato di segno.

Due numeri sono **opposti** quando hanno lo stesso valore assoluto ma sono discordi. Due numeri opposti sono equidistantio dallo 0.
Inoltre l'insieme $\mathbb{Z}$ è ordinato.



La **somma di due interi concordi** è un intero che ha come valore assoluto la somma dei valori assoluti e come segno il segno comune.
La **somma di due interi discordi** è un intero che ha come valore assoluto la differenza fra il maggiore e il minore dei valori assoluti e come segno il segno dell'addendo col maggiore valore assoluto.

La **differenza fra due interi** è la somma del primo con l'opposto del secondo.
Il **prodotto di due interi** ha come valore assoluto il prodotto dei valori assoluti e segno + se sono concordi e - se sono discordi.
Il **quoziente di due numeri interi**, di cui il primo è multiplo del secondo, ha come valore assoluto il quoziente dei valori assoluti e come segno + se sono concordi e - se sono discordi.
La **potenza di un intero**, con esponente naturale, ha come valore assoluto la potenza del valore assoluto e segno sempre positivo se l'esponente è **pari** e invariato rispetto alla base se l'esponente è dispari.
In $\mathbb{Z}$ valgono le stesse proprietà delle potenze che valgono in $\mathbb{N}$.

1.3 Numeri Razionali $\mathbb{Q}$

Le frazioni sono espressioni della forma $\frac{a}{b}$ dove a e b sono numari interi e $b \neq 0$. Due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ frazioni si dicono **equivalenti** quando $ad = bc$.
La frazione $\frac{n}{d}$ si dice **ridotta ai minimi termini** quando n e d sono primi.
Chiamiamo **numero razionale** ogni classe di equivalenza di frazioni. Come rappresentante della classe si sceglie la frazione ridotta ai minimi termini. L'insieme dei numeri razionali si indica con $\mathbb{Q}$.
Si dice $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$, dove $b, d > 0$, se e solo se $ad \geq cd$ (lo stesso vale cambiando il segno della disuguaglianza con maggiore stretto, minore uguale o minore stretto).

Addizione e Sottrazione

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot \frac{m.c.m.(b,d)}{b} \pm c \cdot \frac{m.c.m.(b,d)}{d}}{m.c.m.(b,d)} \tag{1}$$

con $b, d \neq 0$.

Moltiplicazione

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{2}$$

con $b, d \neq 0$.

Divisione

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \tag{3}$$

con $b, c, d \neq 0$. La divisone è interna in $\mathbb{Q}$.

Potenza

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{4}$$

con $b \neq 0, n \in \mathbb{N}$.
Valgono tutte le proprietà viste in $\mathbb{Z}$
Dato il razionale $\frac{a}{b}$, con $a, b \neq 0$, il suo **reciproco** è $\frac{b}{a}$.
Il prodotto di un numero per il suo reciproco è 1 cioè l'elemnto neutro per la moltiplicazione.

potenza con **esponente intero negativo**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} \tag{5}$$

con $a, b \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

In $\mathbb{Q}$ valgono le **leggi di monotonia**.
Prima legge
se $a \lesseqqgtr b$, allora $a + n \lesseqqgtr b + n$.
Seconda legge
Se $a = b$, allora $an = bn; (n \neq 0)$.
Se $a < b$, allora $an < bn$; se $n > 0$.
Se $a < b$, allora $an > bn$; se $n < 0$.

Le percentuali sono frazioni con denominatore 100.

Una proporzione è un modo per scrivere un'uguaglianza fra frazioni equivalenti.

Proprietà delle proporzioni	
proprietà	$a : b = c : d$ se e solo se
fondamentale	$ad = bc$
del comporre	$(a + b) : a = (c + d) : c$
	$(a + b) : b = (c + d) : d$
dello scomporre	$(a - b) : a = (c - d) : c$
	$(a - b) : b = (c - d) : d$
del permutare	$a : c = b : d$
	$d : b = c : a$
dell'invertire	$b : a = d : c$

Ogni numero razionale non intero è rappresentato da un **numero decimale finito** o **periodico**.

2 Insiemi e Funzioni

2.1 Insiemi

Il termine **insieme** in matematica designa un contenitore in grado di contenere oggetti, di diverse tipologie, che vengono chiamati **elementi** dell'insieme. Se un oggetto fa parte dell'insieme si dice che gli **appartiene**.
L'insieme vuoto è l'insieme che non ha elementi e si indica con il simbolo $\emptyset$.

Se tutti gli elementi dell'insieme B stanno anche in A allora l'insieme B è un **sottoinsieme** di A ($B \subseteq A$).
Se A è un sottoinsieme di B e B è un sottoinsieme di A, allora $A = B$.
Se $B \subseteq A$ e $B \neq A$ e $B \neq \emptyset$, allora B è un sottoinsieme **proprio** di A ($B \subset A$).
$\emptyset$ e A sono detti sottoinsiemi **impropri** di A.

L'intersezione di A e B ($A \cap B$) è l'insieme degli elementi comuni ad A e B.
L'unione di A e B ($A \cup B$) è l'insieme degli elementi che appartengono ad A o a B.
Due insiemi si dicono **disgiunti** se non hanno elementi in comune.
La differenza fra B e A ($B - A$) è l'insieme formato dagli elementi di B che non sono elementi di A.
Il **prodotto cartesiano** di A e B si indica $A \times B$ ed è costituito da tutte le coppie ordinate $(a; b)$ con $a \in A$ e $b \in B$.
Il prodotto cartesiano non è commutativo.
L'insieme delle parti di A, $\wp(A)$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A.
Una **partizione** di A è un sottoinsieme di $\wp(A)$ che non contiene $\emptyset$ in cui tutti i sottoinsiemi di A sono disgiunti e la loro unione è l'insieme A.

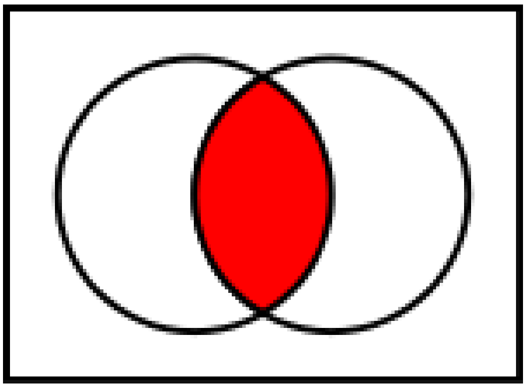


Figura 1: $A \cap B$

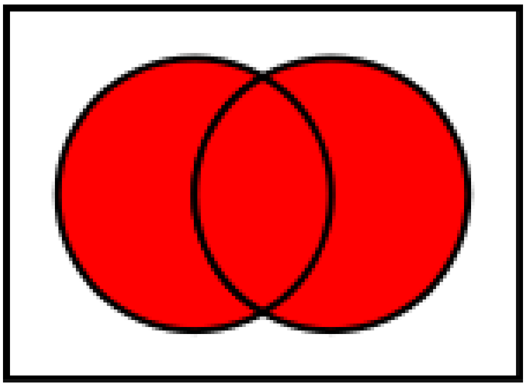


Figura 2: $A \cup B$

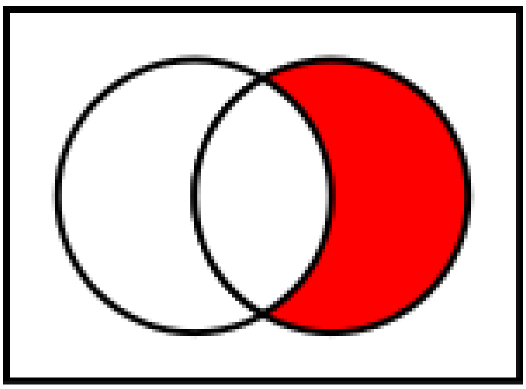


Figura 3: $B - A$

2.2 Funzioni

Una **funzione** dall'insieme A all'insieme B è una relazione che ad ogni elemento di A associa uno ed un solo elemento di B.
Una funzione da A a B è:
· **iniettiva** se a due **distinti** elementi di A sono associati elementi distinti di B;
· **suriettiva** quando **tutti** gli elementi di B hanno un elemento di A a cui sono associati;
· **biiettiva** quando è suriettiva e iniettiva, in tal caso si parla di **corrispondenza biunivoca**.
L'inversa di una funzione è ancora una funzione se e solo se la funzione è biiettiva.

Date le funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$, si può definire la **funzione composta** $g \circ f : A \to C$, che ad ogni elemento $a \in A$ associa l'elemento di C così ottenuto:
· ad a si associa $b \in B$ tale che $b = f(a)$;
· a b si associa $c \in C$ tale che $c = g(b)$.

In generale non è vero che $g \circ f = f \circ g$.

Una **funzione numerica** ha come dominio e come codominio due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.
Data la funzione numerica $f : x \mapsto y = f(x)$, x si chiama **variabile indipendente** e y si chiama **variabile dipendente**.
Il **campo di esistenza** (C.E.) di una funzione numerica è il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ sul quale la funzione è definita.

Alcune funzioni esprimono proporzionalità particolari tra variabile indipendente e dipendente.
Sia $k \in \mathbb{R}$:
· $y = kx$ esprime la proporzionalità diretta;
· $y = \frac{k}{x}$ esprime la proporzionalità inversa;
· $y = kx^2$ esprime la proporzionalità quadratica;

Anche per le funzioni numeriche possiamo considerare la composizione come definita in precedenza.

3 Il calcolo letterale

3.1 Monomi

Un **monomio** è un espressione letterale formata dal prodotto di numeri e potenze che hanno per base una lettera e per esponente un numero naturale. Perciò, fra le lettere non compaiono addizioni, sottrazioni o divisioni.
Un monomio in **forma normale** è scritto come prodotto fra un numero (**coefficiente**) e una o più lettere diverse tra loro, con i relativi esponenti (**parte letterale**).
Il **grado** di un monomio è la somma degli esponenti della parte letterale.

Due monomi sono **simili** se hanno la stessa parte letterale.
La **somma** o la **differenza** di due monomi simili è il monomio che si ottiene sommando algebricamente i coefficienti (con relativo segno) e lasciando invariata la parte letterale.
Nel **prodotto**, per i coefficienti si usano le regole relative ai numeri, mentre per le lettere si usano le proprietà delle potenze. Lo stesso per il **quoziente** o la **potenza** di monomi.

La parte letterale del **massimo comun divisore** (M.C.D.) di monomi è il prodotto delle sole lettere comuni a tutti i monomi ognuna presa una sola volta con l'esponente minimo. Il coefficiente può essere qualsiasi numero, ma se i coefficienti sono interi si preferisce prendere il M.C.D. dei coefficienti.

La parte letterale del **minimo comune multiplo** (m.c.m.) di monomi è il prodotto di tutte le lettere, comuni e non comuni, ognuna presa una sola volta con l'esponente massimo. Il coefficiente può essere qualsiasi numero, ma se i coefficienti sono interi si preferisce prendere il m.c.m. dei coefficienti.

3.2 Polinomi

Un **polinomio** è la somma algebrica di più monomi. Anche ogni monomio è considerato un polinomio.
Un polinomio è **ridotto** a forma normale se lo è ogni suo monomio e tra di loro non ci sono monomi simili.
I polinomi ridotti con uno, due, tre o quattro termini si chiamano rispettivamente **monomi, binomi, trinomi e quadrinomi**.

Il **grado** di un polinomio è il grado maggiore dei suoi termini.
Il **grado rispetto a una lettera** di un polinomio è il grado maggiore dei suoi termini rispetto a quella lettera.
Un polinomio è:
· **omogeneo** quando tutti i suoi termini sono dello stesso grado;
· **ordinato rispetto a una lettera** se i suoi termini sono disposti con esponenti di quella lettera in ordine decrescente o crescente;
· **completo** rispetto a una lettera se questa compare con tutte le potenze dal grado massimo al grado 0.
Il **termine noto** è il termine formato soltanto da un numero, ossia il monomio di grado 0.

La **somma** di due polinomi è il polinomio che ha per termini tutti i termini del primo e del secondo addendo; la **differenza** di due polinomi è il polinomio che si ottiene sommando al primo l'opposto del secondo. In generale si parla di **somma algebrica**.
Il **prodotto** di due polinomi si ottiene moltiplicando ciascun termine del primo con ciascuno del secondo (e facendo la somma dei termini ottenuti).

I prodotti notevoli.
Somma per differenza

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2 \tag{6}$$

Quadrato di un binomio

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2 \tag{7}$$

Quadrato di un trinomio

$$(A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC \tag{8}$$

Cubo di un binomio

$$(A+B)^3=A^3+B^3+3A^2B+3AB^2 \tag{9}$$

Somma di cubi

$$A^3+B^3=(A+B)(A^2-AB+B^2) \tag{10}$$

Differenza di cubi

$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2) \tag{11}$$

Un polinomio può essere anche considerato come una funzione in una o più variabili (**funzione polinomiale**). Si possono calcolarne pertanto il valore per particolari valori assegnati delle variabili. I valori per i quali un polinomio si annulla sono detti **zeri** del polinomio.

Un polinomio è **divisibile per un monomio** se lo sono tutti i suoi termini. In tal caso il quoziente si ottiene dividendo ogni termine per il monomio.
Il procedimento studiato per la **divisione** tra due polinomi, $A : B$, ci permette di ottenere il polinomio quoziente Q e il polinomio resto R, in modo che si ha:
$A = B \cdot Q + R$.

Se il divisore di un polinomio è del tipo $x - a$, con $a \in \mathbb{R}$ possiamo utilizzare la **Regola di Ruffini** per svolgere la divisione.

Il teorema del resto. Il resto resto della divisione di un polinomio $P(x)$ per un binomio $x - a$ è $P(a)$.

Il teorema di Ruffini. Un polinomio $P(x)$ è divisibile per un binomio $x - a$ se e soltanto se $P(a) = 0$.

3.3 La scomposizione in fattori

Scomporre un polinomio significa riscriverlo come prodotto di polinomi di grado inferiore. Se è possibile scomporre un polinomio questo è detto **riducibile**, in caso contrario è detto **irriducibile**.
Esistono vari **metodi di scomposizione**:
· Il raccoglimento totale (o a fattore comune);
· Il raccoglimento parziale;
· La scomposizione riconducibile a prodotti notevoli;
· La scomposizione di particolari trinomi di secondo grado:
$x^2 + sx + p = (x + x_1)(x + x_2)$, con $s = x_1 + x_2$ e $p = x_1x_2$;
· La scomposizione mediante il Teorema e la regola di Ruffini.

La ricerca del **M.C.D.** e del **m.c.m.** fra polinomi avviene in modo analogo a quello per i monomi. I polinomi devono essere scomposti in fattori irriducibili (questi vengono trattati come le lettere nel caso dei monomi, notatate che le singole lettere nel prodotto sono fattori irriducibili).

3.4 Frazioni algebriche

Una **frazione algebrica** è una frazione che ha dei polinomi al numeratore e al denominatore. Il polinomio al denominatore non può essere il polinomio nullo. Inoltre una frazione algebrica non esiste dove si annulla il denominatore (per i valori che sostituiti alle lettere danno come risultato 0).
Per le frazioni algebriche valgono le stesse **regole di calcolo** che si hanno per le frazioni numeriche.

4 Equazioni e disequazioni di primo grado

4.1 Equazioni lineari

Un'**identità** è un uguaglianza tra due espressioni letterarie che risulta verificata per qualunque valore attribuito alle lettere.

Un'**equazione** è un uguaglianza tra due espressioni letterarie che è verificata per particolari valori attribuiti alle lettere, tali valori sono detti **soluzioni o radici** dell'equazione.

Un'**equazione lineare** è un equazione di primo grado. Un'equazione $P(x) = 0$ è in **forma normale** se il polinomio $P(x)$ non contiene termini simili. Il **grado** dell'equazione è il grado del polinomio ridotto.

Esistono diversi tipi di equazioni:
· numerica intera (coefficienti solo numerici e incognita solo al numeratore);
· numerica fratta(coefficienti solo numerici e incognita anche al denominatore);
· letterale intera(coefficienti anche letterali e incognita solo al numeratore);
· letterale fratta(coefficienti anche letterali e incognita anche al denominatore).

Due soluzioni contenenti la stessa incognita sono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Primo principio di equivalenza delle equazioni: data un'equazione se si aggiunge o si toglie ad entrambi i membri dell'equazione uno stesso numero o una stessa espressione si ottiene un'equazione equivalente.

Dal primo principio discendono due regole:
· **Regola del trasporto**. È possibile spostare un termine da un membro all'altro dell'equazione cambiandone il segno, ottenendo un'equazione equivalente
· **Regola di cancellazione**. È possibile eliminare dai due membri termini uguali, ottenendo un'equazione equivalente.

Secondo principio di equivalenza delle equazioni: data un'equazione se si moltiplica o si divide entrambi i membri dell'equazione per uno stesso numero o una stessa espressione, diversi da 0, si ottiene un'equazione equivalente.

Dal secondo principio discendono due regole:
· **Regola della divisione per un fattore comune**. Se tutti i termini dell'equazione hanno un fattore comune si possono dividere tutti i termini per quel fattore, ottenendo un'equazione equivalente
· **Regola del cambiamento di segno**. È possibile cambiare il segno di **tutti** i termini dell'equazione, ottenendo un'equazione equivalente.

Le **equazioni numeriche intere**. È sempre possibile un equazione di primo grado nella forma $ax = b$. Si distinguono 3 casi:
· se $a \neq 0$, allora $\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$ la soluzione è $x = \frac{b}{a}$ e l'equazione è **determinata**;
· se $a = 0$ e $b = 0$, allora $0 \cdot x = 0$ e l'equazione è **indeterminata**;
· se $a = 0$ e $b \neq 0$, allora $0 \cdot x = b$ e l'equazione è **impossibile**.

Quando risolviamo un **equazione letterale intera** dobbiamo distinguere il caso in cui il coefficiente letterale della x è 0 da quello in cui è diverso da 0.

Prima di risolvere un'**equazione numerica fratta** bisogna determinarne le **condizioni di esistenza** poi una volta ottenuto il risultato controllare se la soluzione è **accettabile**.

Anche nel caso delle **espressioni letterali fratte** bisogna distinguere i due casi.

4.2 Disequazioni lineari

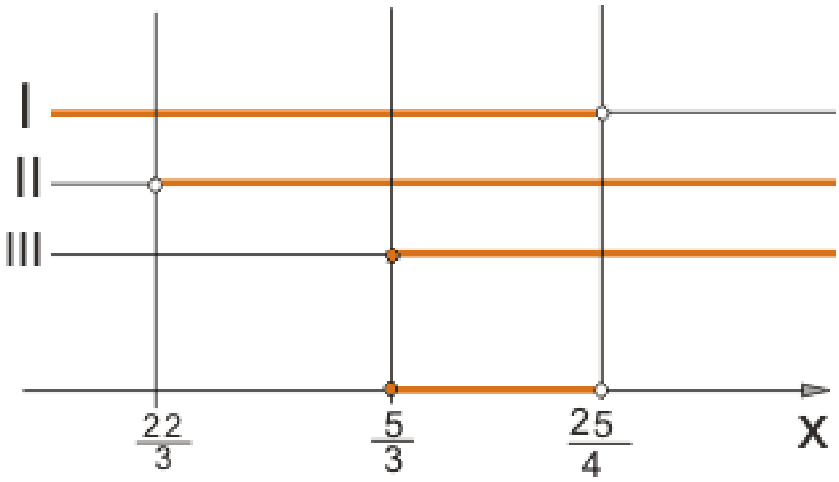
Proprietà delle disuguaglianze, valide $\forall a, b \in \mathbb{R}$:
· monotonia dell'addizione:
$a < b \Rightarrow a + k < b + k$ ($\forall k \in \mathbb{R}$);
· moltiplicazione per un numero positivo:
$a < b \Rightarrow ak < bk$ ($\forall k \in \mathbb{R}^+$);
· moltiplicazione per un numero negativo:
$a < b \Rightarrow ak > bk$ ($\forall k \in \mathbb{R}^-$);
· reciproci concordi:
$a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ($\forall a, b$ concordi).

Una disuguaglaianza dove compaiono espressioni letterali è una **disequazione** se risulta vera solo per determinati valori delle lettere. Questi valori sono l'insieme delle soluzioni della disequazione e possono essere rappresentati in vari modi (disequazione semplificata, rapprsentazione grafica, scrittura di un 'intervallo in forma di espressione).

Per risolvere una disequazione si utilizzano le proprietà delle disuguaglianze per ottenere via via disequazioni equivalenti alla prima ma più semplici fino ad arrivare ad un'espressione chiara delle soluzioni.

Le disequazioni si dividono come le equazioni in **intere, numeriche, fratte e letterali**. Inoltre una disequazione può avere soluzioni (**determinata**), essere sempre verificata (**indeterminata**) o non avere soluzioni (**impossibile**).

Un **sistema di disequazioni** è un insieme di due o più disequazioni nelle stesse variabili per cui si cercano i valori che rendono tali disequazioni verificate *contemporaneamente*.
Per trovare le soluzioni di un sistema di disequazioni si si rappresentano su rette orizzontali le soluzioni di ogni disequazione. Le soluzioni del sistema sono date dagli intervalli comuni a tutte le soluzioni.



5 Geometria Euclidea

Per questa parte non mi è stato possibile aggiungere figure esplicative, pertanto è consigliabile cercare di capire le definizioni disegnando su un foglio quanto descritto.

5.1 Nozioni Base di Geometria

La geometria si basa su **enti primitivi** (come punto retta e piano), che vengono accettati come noti. Tutti gli altri enti geometici vengono descritti tramite **definiziononi**.
Una **figura geometrica** è un qualsiasi insieme di punti. Lo **spazio** è l'insieme di tutti i punti.

Postulati di appartenenza della retta:
· per due punti passa una e una sola retta;
· su una retta ci sono almeno due punti;
· per ogni retta di un piano esiste almeno un punto, nel piano, che non le appartiene.

Postulati di appartenenza del piano:
· per tre punti non allineati passa uno e un solo piano;
· fissati due punti nel piano, la retta passante per i due punti giace interamente sul piano.

Postulati dell'ordine:
· la retta è un insieme ordinato di punti e fra due suoi punti esiste sempre almeno un altro punto.

Fissato un punto O su una retta tutti i punti della retta che lo seguono formano una **semiretta** (lo stesso vale anche per i punti che lo precedono). Fissati due punti su una retta A e B il **segmento** AB è costituito dai due punti stessi e da tutti i punti compresi tra i due. Se due segmenti hanno un estremo in comune (anche non sulla stessa retta) sono detti **consecutivi**, se sono consecutivi e appartengono alla stessa retta sono detti **adiacenti**.

Una **poligonale** è una figura costituito da un insieme ordinato di segmenti in cui ciascuno è consecutivo con il successivo.

Data una retta di un piano, un **semipiano** è formato dalla retta stessa e da una delle due regioni in cui la retta divide il piano.

Un **angolo** è ciascuna delle due parti di piano individuate da due semirette aventi l'origine in comune.
Due angoli sono detti **consecutivi** se hanno in comune il vertice e un lato, mentre sono detti **adiacenti** se sono consecutivi e i lati non comuni appartengono alla stessa retta.

Un angolo è **piatto** quando i suoi lati appartengono alla stessa retta, mentre è detto **giro** se coincide con l'intero piano.

Una figuara è **convessa** se presi due punti qualsiasi della figura il segmento che li congiunge è tutto contenuto all'interno della figura, è detta **concava** in caso contrario (i.e. esistono due punti per cui non è vero).

Due figure sono **congruenti** quando è possibile sovrapporle senza deformarle.

Il **punto medio** di un segmento è quel punto che lo divide in due segmenti congruenti. È sempre possibile dividere un segmento in un qualsiasi numero di segmenti congruenti.

La **bisettrice** di un angolo è quella retta passante per l'origine che lo divide in due angoli congruenti. È sempre possibile dividere un angolo in un qualsiasi numero di angoli congruenti.

Un angolo **retto** è la metà di un angolo piatto.
Due angoli sono detti **supplementari** se la loro somma forma un angolo piatto, **complementari** se la loro somma forma un angolo retto e **esplementari** se la loro somma forma un angolo giro.

Due angoli sono **opposti al vertice** se i lati di un angolo sono i prolungamenti dei lati dell'altro.

5.2 Poligoni

Un **poligono** è un sottoinsieme del piano costituito da una poligonale chiusa (i.e. l'ultimo segmento ha il secondo estremo coincidente con il primo estremo del primo segmento) e dai suoi punti interni, i segmenti sono detti **lati** e gli angoli interni, formati dalle semirette su cui giacciono lati consecutivi, sono detti **angoli** del poligono, i verici degli angoli sono detti anche **vertici** del poligono.
Un poligono contiene tanti lati quanti angoli e quanti vertici.
Ogni angolo è più piccolo di un angolo giro. Inoltre se è più piccolo di un angolo retto è detto **acuto**, mentre è detto **ottuso** se è più grande.

Un **triangolo** è un poligono con 3 lati.

La **bisettrrice** di un angolo del triangolo è il segmento che congiunge il vertice dell'angolo e il lato opposto e divide l'angolo in due angoli congruenti. L'**altezza** relativa a un lato è quel segmento che congiunge il lato e il vertice opposto e che forma un angolo retto con il lato (o con il suo prolungamento). La **mediana** relativa a un lato è il segmento che congiunge il punto medio del lato con il vertice opposto. L'**asse** di un lato è quel segmento che ha un estremo nel punto medio del lato e forme con esso un angolo retto

Il punto di incontro delle bisettrici è chiamato **incentro**. Il punto di incontro delle altezze è chiamato **ortocentro**. Il punto di incontro delle mediane è chiamato **baricentro**. Il punto di incontro degli assi è chiamato **circocentro**.

I triangoli possono essere classificati rispetto ai lati:
· **scaleno** (nessun lato congruente);
· **isoscele** (2 lati congruenti);
· **equilatero** (tutti i lati congruenti).

I triangoli possono essere classificati rispetto anche rispetto agli angoli:
· **acutangolo** (3 angoli acuti);
· **rettangolo** (un angolo retto);
· **ottusangolo** (un angolo ottuso).
Inoltre la somma degli angoli di un triangolo è un angolo piatto (la somma degli angoli interni di un poligono di n lati è $(n-2)$ angoli piatti).

5.3 Rette perpendicolari e parallele

Due rette del piano si dicono **incidenti** se hanno un solo punto in comune. Se due rette incidenti formano un angolo retto sono dette **perpendicolari**, altrimenti **oblique**.

La **proiezione di un segmento** AB su una retta è il segmento che ha per estremi le intersezioni della retta con le perpendicolari passanti per quei punti.

La **distanza di un punto da una retta** è la lunghezza del segmento perpendicolare alla retta passante per il punto.

Due rette, del piano, sono **parallele** se non hanno punti in comune o se coincidono.

5.4 Quadrilateri

Un poligono con 4 lati è un **quadrilatero**.
Un quadrilatero con i lati a 2 a 2 paralleli è un **parallelogramma**.
Un **rettangolo** è un parallelogramma con gli angoli congruenti (retti).
Un **rombo** è un parallelogramma con i lati congruenti.
Un **quadrato** è un parallelogramma con lati e angoli congruenti.
Un quadrilatero con 2 soli lati paralleli è un **trapezio**. Il lato parallelo più corto è detto **base minore** e l'altro **base maggiore**, gli altri due lati sono detti **lati obliqui**.

Un trapezio con i 2 lati obliqui congruenti è detto **trapezio isoscele**.
Un trapezio con un lato obliquo perpendicolare alla base è detto **trapezio rettangolo**.

5.5 Poligoni inscritti e circoscritti

Un **luogo geometrico** è l'insieme di tutti e soli i punti del piano che soddisfano certe condizioni specifiche.
L'asse del segmento è il luogo dei punti equidistanti dal segmento.

La **circonferenza** è il luogo dei punti che hanno distanza assegnata (**raggio**) da un punto assegnato (**centro**). Il **cerchio** è la figura formata dalla circonferenza e dai suoi punti interni. Il cerchio può essere anche visto come un poligono con infiniti lati. Un **diametro** è un segmento che congiunge due punti della circonferenza e passa per il centro.
Una retta che interseca la circonferenza in 2 punti è detta **secante**, in un solo punto **tangente**, in nessun punto **esterna**.

Un poligono è **inscritto** in una circonferenza (o equivalentemente una circonferenza è circoscritta ad un poligono) quando tutti i vertici del poligono appartengono alla circonferenza. Il centro di tale circonferenza è il punto d'incontro degli assi dei lati del poligono (circocentro). Un poligono è **circoscritto** ad una circonferenza (o equivalentemente una circonferenza è inscritta in un poligono) quando tutti i lati del poligono sono tangenti alla circonferenza. Il centro di tale circonferenza è l'intersezione delle bisettrici degli angoli del poligono (incentro).

6 Equazioni e Disequazioni di secondo grado

6.1 I Radicali

L'estrazione di radice non è un operazione interna in $\mathbb{Q}$.
Ad esempio, 2 non ha per radice quadrata un numero razionale.

I numeri **irrazionali** sono tutti i numeri decimali illimitati non periodici.
I numeri **reali** sono tutti i numeri razionali e irrazionali, si indicano con $\mathbb{R}$.

Dato un numero naturale n diverso da 0 e un numero reale a positivo o nullo, la **radice aritmetica n-esima** di a è quel numero reale b, non negativo, che elevato alla n da come risultato a.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a \tag{12}$$

$\sqrt[n]{a}$ è chiamato **radicale aritmetico**.
Vediamo ora alcune proprietà dei radicali:
· **proprietà invariantiva**: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$, con $p \in \mathbb{N}, p \neq 0$;
· **proprietà del prodotto**: il prodotto di radicali con lo stesso indice è un radicale con lo stesso indice e con radicando (la base) uguale al prodotto dei radicandi: $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;
· **proprietà della potenza**: $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$, con $p \in \mathbb{N}, p \neq 0$.

Due radicali sono **simili** quando hanno la stessa parte radicale. Due radicali simili si possono sommare ottenendo un radicale simile che ha come coefficiente la somma dei coefficienti.

È possibile **razzionalizzare il denominatore** (in cui compaiono radicali) di una frazione moltiplicando numeratore e denominatore per un opportuno fattore diverso da 0.
$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

È possibile scrivere i radicali sotto forma di potenze con esponenti razionali:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \tag{13}$$

perciò valgono tutte le regole delle potenze anche per i radicali.

Dato un numero reale a si chiama radice algebrica n-esima di a qualsiasi numero reale che elevato alla n da come risultato a. Sicalcola come segue:
1. si calcola $\sqrt[n]{|a|}$;
2. a) se n è pari e $a \geq 0$, le radici algebriche sono $\pm\sqrt[n]{|a|}$;
se n è pari e $a < 0$, non vi sono radici algebriche;
b) se n è dispari e $a \geq 0$, la radice algebrica è $\sqrt[n]{|a|}$;
se n è dispari e $a < 0$, la radice algebrica è $-\sqrt[n]{|a|}$.

6.2 Equazioni di secondo grado

Un'**equazione di secondo grado** è riconducibile alla forma normale:
$ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$.
Se tutti i coefficienti sono diversi da 0 l'equazione si dice **completa** altrimenti **incompleta**.

Soluzioni delle equazioni di secondo grado incomplete	
equazione	soluzioni
$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}; x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$ le radici sono reali se e solo se a e c sono discordi
$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0; x_2 = -\frac{b}{a}$
$ax^2 = 0$	$x_1 = x_2 = 0$

Il **discriminante** di un equazione di secondo grado completa è $\Delta = b^2 - 4ac$.

Soluzioni delle equazioni di secondo grado complete	
segno del discriminante	soluzioni
$\Delta > 0$	due radici reali e distinte $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	due radici reali e coincidenti $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	non esistono soluzioni reali

Se le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ sono x_1, x_2, posto $s = x_1 + x_2$, $p = x_1 x_2$ si ha:
$s = -\frac{b}{a}; p = \frac{c}{a}$
l'equazione quindi è equivalente a:
$x^2 - sx + p = 0$

Se $\Delta > 0 : ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,
se $\Delta = 0 : ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$,
se $\Delta < 0$ l'equazione è irriducibile.

Un'**equazione parametrica** è un'equazione letterale in cui si richiede che il valore di una lettera (**parametro**) soddisfi a certe condizioni.

6.3 Disequazioni di secondo grado

Per studiare il segno di un prodotto di polinomi, si studia il segno di ogni polinomio fattore, poi si determina il segno del prodotto con la regola dei segni della moltiplicazione.

Se $\Delta > 0 : ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,
se $\Delta = 0 : ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$,
se $\Delta < 0$ si usa il metodo del completamento del quadrato:
$ax^2 + bx + c = \left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right]$
Dallo studio del segno si ricavano poi le soluzioni della disequazione.

Per le **disequazioni fratte** si procede analogamente ricordando però che il denominatore deve essere sempre diverso da 0.

7 Il Piano Cartesiano

Dato un punto A su una retta, il numero reale x_A a esso associato è detto **ascissa** del punto. Dati due punti A e B, la distanza fra A e B è $\overline{AB} = |x_B - x_A|$.
L'ascissa del punto medio di AB è $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$.

Il piano cartesiano è diviso dai due assi in 4 angoli retti chiamati quadranti.
Ogni punto del piano cartesiano è individuato da una coppia ordinata di numeri reali $(a; b)$ chiamate **coordinate**. La prima coordinata si chiama **ascissa** e la seconda **ordinata**.
L'origine O ha coordinate $(0; 0)$.

La **distanza tra due punti** $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ è data da:
$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Il **punto medio** del segmento AB è $M(x_M; y_M)$ con:
$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ e $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

7.1 La Retta nel piano cartesiano

Una **retta passante per l'origine**, purchè diversa dall'asse y, ha equazione $y = mx$, mentre l'asse y ha equazione $x = 0$.
Il numero m dell'equazione è chiamato **coefficiente angolare**, in particolare:
· se $m = 0$ otteniamo $y = 0$ (asse x);
· se $m = 1$ otteniamo $y = x$ (bisettrice del I e III quadrante);
· se $m = -1$ otteniamo $y = -x$ (bisettrice del II e IV quadrante).

L'equazione generale di una retta è del tipo:
$ax + by + c = 0$ (forma implicita).
Se un punto appartiene ad una retta le sue coordinate soddisfano l'equazione della retta.
Se una retta non è parallela all'asse y l'equazione può essere scritta nella forma:
$y = mx + q$ (forma esplicita),
in cui m è il coefficiente angolare e q il termine noto (i.e. l'ordinata del punto sulla retta che ha ascissa uguale a 0).
Se una retta è parallela all'asse y ha un'equazione del tipo $x = k$.
Casi particolari:
· se $q = 0 \rightarrow y = mx$ (retta passante per l'origine);
· se $m = 0 \rightarrow y = q$ (retta parallela all'asse x);
· se $q = 0$ e $m = 0 \rightarrow y = mx$ (asse x).

Se $P(x_1; y_1)$ e $Q(x_2; y_2)$ sono punti distinti di una retta allora il **coefficiente angolare** è dato da:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Il coefficiente angolare m è negativo se la retta forma una angolo ottuso con l'asse x, m è positivo se la retta forma una angolo acuto con l'asse x, se $m = 0$ la retta è parallela all'asse x. Se m non esiste la retta forma un angolo retto con l'asse x (retta parallela ad y).

Due rette (non parallele a y) sono fra loro:
· parallele quando hanno uguale coefficiente angolare;
· perpendicolari quando il prodotto dei coefficienti angolari è -1.

Sia data una retta $r : y = mx + q$,
chiamiamo **fascio improprio** di rette parallele a r tutte le rette del tipo

$y = mx + \overline{q}$, con $\overline{q} \in \mathbb{R}$.

L'insieme di tutte le rette che passano per uno stesso punto $P(x_1; y_1)$ si chiama **fascio proprio** di rette e ognuna ha equazione del tipo:

$y - y_1 = m(x - x_1)$, con $m \in \mathbb{R}$.

P è il centro del fascio.

L'equazione della retta passante per due punti $P(x_1; y_1)$ e $Q(x_2; y_2)$ è:

$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

La distanza di un punto $P(x_0; y_0)$ **da una retta** r di equazione $ax + by + c = 0$ è data da:

$d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

7.2 La Circonferenza nel piano cartesiano

La **circonferenza** è il luogo dei punti del piano la cui distanza (raggio), da un fissato punto del piano (centro), è fissa.
Sia $C(x_0; y_0)$ è il centro e r il raggio allora la circonferenza ha equazione:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Se il centro è l'origine: $x^2 + y^2 = r^2$.

L'equazione si può presentare anche nella forma:

$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$, con $\alpha = -2x_0, \beta = -2y_0, \gamma = x_0^2 + y_0^2 - r^2$

detta **forma normale o canonica**.

Si ha che il centro è dato da: $C\left(-\frac{\alpha}{2};-\frac{\beta}{2}\right)$
e il raggio è dato da: $r=\sqrt{\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(-\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$

7.3 L'Ellisse nel piano cartesiano

L'**ellisse** è il luogo dei punti del piano per cui è costante la somma delle distanze da due punti del piano detti **fuochi**.
La somma delle 2 distanze è indicata come $2a$, la distanza tra i due fuochi è chiamata **distanza focale** e indicata come $2c$.
La retta che contiene i due fuochi è detto asse maggiore dell'ellissi, mentre quella perpendicolare passante per il punto medio dei fuochi è detto asse minore. I punti di intersezione dell'ellisse con queste rette sono detti vertici dell'ellisse. L'intersezione dei due assi è detta centro dell'ellissi. I segmenti che congiungono i vertici al centro sono detti semiassi (sono 2 coppie di congruenza). Sia $O'(x_0;y_0)$ è il centro a,b le lunghezze dei semiassi e gli assi paralleli agli assi cartesiani, allora l'ellissi ha equazione:

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

Se il centro è l'origine: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

L'equazione si può presentare anche nella forma:

$mx^2+ny^2+px+qy+r=0$,
con $m=b^2,n=a^2,p=-2x_0b^2,q=-2y_0a^2,r=x_0^2b^2+y_0^2a^2-a^2b^2$

detta **forma normale o canonica**.

Si ha che il centro è dato da: $O'\left(-\frac{p}{2m};-\frac{q}{2n}\right)$

7.4 La Parabola nel piano cartesiano

La **parabola** è il luogo dei punti equidistanti da una retta fissa d (direttrice) e da un punto fisso F (fuoco).
La retta perpendicolare a d passante per F è detto asse di simmetria, il punto equidistante a d e F sull'asse di simmetria si chiama vertice V.
Parabola con asse parallelo a y: $y=ax^2+bx+c$

$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$, l'asse è $x = -\frac{b}{2a}$, $F\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{1-b^2+4ac}{4a}\right)$, $d : y = -\frac{1+b^2-4ac}{4a}$.

Similmente per l'asse parallelo a x scambiando x e y e le prime e le seconde coordinate.

7.5 L'Iperbole nel piano cartesiano

L'**iperbole** è il luogo dei punti per cui è costante la differenza delle distanze da due punti detti fuochi.
l'equazioni di un' iperbole può presentarsi nella forma: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ che comunque non è l'unico caso.

[per ora non approfondiamo questi argomenti sarà sufficiente la conoscenza di tutte le equazioni relative alla circonferenza e sapere dire se un equazione corrisponde a una circonferenza, a una parabola, ad un iperbole o ad un'ellissi, e le relative definizioni]