Corso di recupero di Matematica per le Scienze Biologiche

Tutor: Cecilia Secco (2013), Alessandro Spagnuolo (2011),
Giulia Giantesio (2010), Francesco Pancaldi (2009)

Università degli Studi di Ferrara

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

7 ottobre 2013

Indice

Introduzione

Gli argomenti trattati nel corso di recupero si possono così riassumere:

Gli insiemi, le funzioni, i numeri naturali, i numeri interi, i numeri razionali, i numeri reali, i monomi, i polinomi, la scomposizione in fattori, le frazioni algebriche, le equazioni e le disequazioni lineari, i sistemi lineari, le equazioni e le disequazioni di 2^o *grado, risoluzione di equazioni di ordine superiore al* 2^o*, sistemi vari di equazioni e disequazioni, geometria euclidea, brevi cenni sulle geometrie non euclidee e l'assiomatica moderna, nozioni base di geometria, piano cartesiano, parabola, ellisse (e circonferenza), iperbole nel piano cartesiano.*

Per qualsiasi chiarimento contattare il tutor all'indirizzo e-mail: *cecilia.secco@student.unife.it* oppure rivolgersi al manager didattico o al Professore Roselli Valter.

Quanto segue è un riassunto dei contenuti del corso di recupero di Matematica per gli studenti di Scienze Biologiche, in quanto tale presenta solo una piccola parte di quanto visto in aula riguardo ai precedenti argomenti, pertanto non deve essere considerata una fonte esauriente riguardo le conoscenze matematiche di base richieste. È consigliabile integrare lo studio con gli appunti delle lezioni e seguire un qualsiasi testo di Matematica degli istituti superiori (primi due anni). Soprattutto per quanto riguarda gli esercizi si rimanda a quanto svolto in aula, mentre per la parte di geometria si consiglia di provare a disegnare tutti i concetti mentre si studia.

Capitolo 1

Insiemi

Il termine **insieme** in matematica designa un contenitore in grado di contenere oggetti, di diverse tipologie, che vengono chiamati **elementi** dell'insieme; se un oggetto fa parte dell'insieme si dice che gli **appartiene**.
Generalmente indichiamo con le lettere maiuscole gli insiemi, mentre con quelle minuscole gli elementi. Se a fa parte di un insieme A, scriviamo quindi che $a \in A$ e leggiamo: *l'elemento a appartiene all'insieme A*.
L'insieme vuoto è l'insieme che non ha elementi e si indica con il simbolo $\emptyset$.

Se tutti gli elementi dell'insieme B stanno anche in A, allora l'insieme B è un **sottoinsieme** di A ($B \subseteq A$).
Se A è un sottoinsieme di B e B è un sottoinsieme di A, allora $A = B$.
Se $B \subseteq A$ e $B \neq A$ e $B \neq \emptyset$, allora B è un sottoinsieme **proprio** di A ($B \subset A$). I sottoinsiemi impropri di un insieme sono solo l'insieme stesso e l'insieme vuoto.

L'intersezione di A e B ($A \cap B$) è l'insieme degli elementi comuni ad A e B.
L'unione di A e B ($A \cup B$) è l'insieme degli elementi che appartengono ad A o a B.
Due insiemi si dicono **disgiunti** se non hanno elementi in comune.

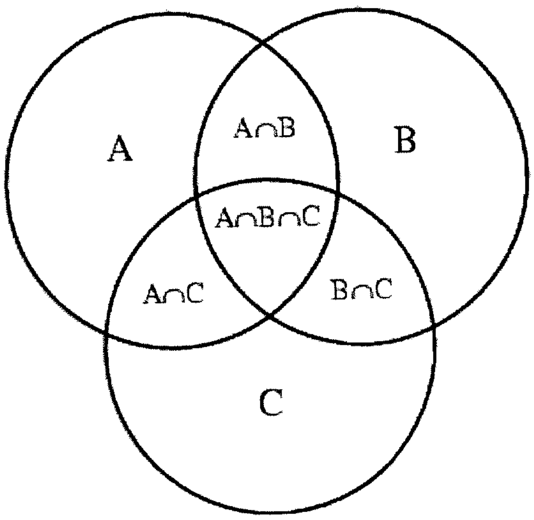


Figura 1.1: Intersezione di insiemi.

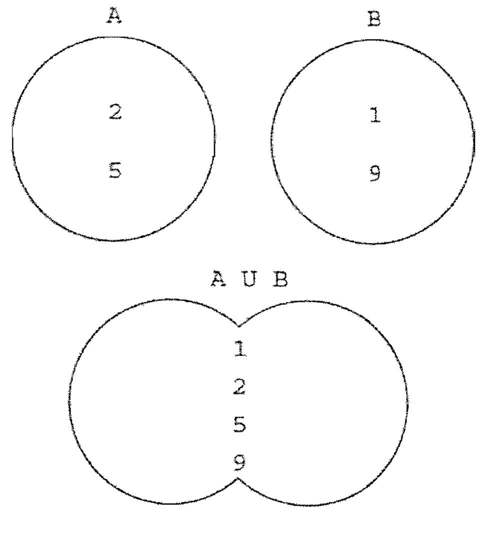


Figura 1.2: $A \cup B$

La differenza fra B e A $(B - A)$ è l'insieme formato dagli elementi di B che non sono elementi di A.
Il **prodotto cartesiano** di A e B si indica $A \times B$ ed è costituito da tutte le coppie ordinate $(a; b)$ con $a \in A$ e $b \in B$. Il prodotto cartesiano non è commutativo.

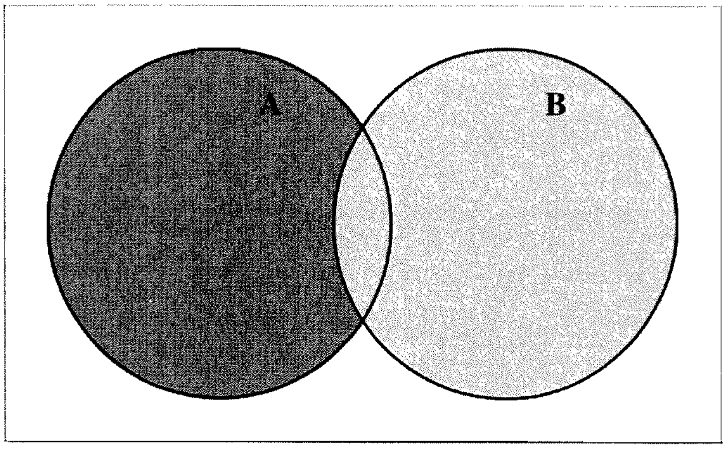


Figura 1.3: $A \setminus B$

L'insieme delle parti di A, $\wp(A)$ è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di A.

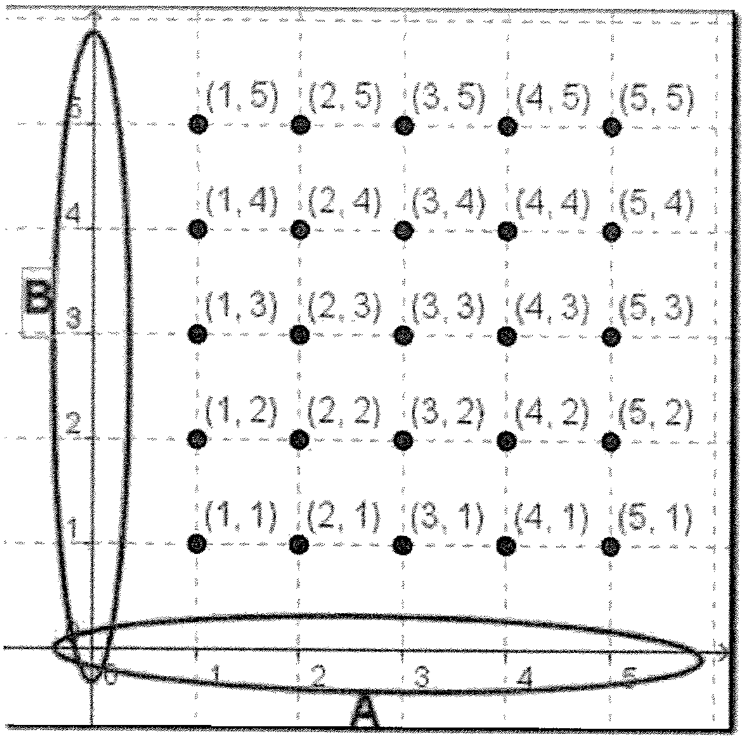


Figura 1.4: $A \times B$

Una **partizione** di A è un sottoinsieme di $\wp(A)$ che non contiene $\emptyset$ in cui

tutti i sottoinsiemi di A sono disgiunti e la loro unione è l'insieme A.
Infine, nella teoria degli insiemi si indica con **insieme universo** (indicato con U) quel particolare insieme che contiene tutti gli elementi e tutti gli insiemi esistenti, compreso quindi anche se stesso e l'insieme vuoto. Il complementare di un insieme contiene gli elementi che stanno nell'universo ma non nell'insieme.

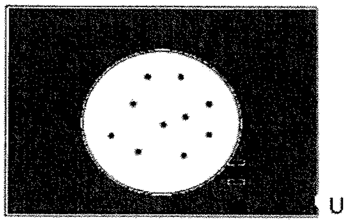


Figura 1.5: La parte colorata rappresenta il complementare di I.

Esempio 1. Dati i due insiemi A, B definiti per elencazione
$A = \{1, 2\}, \quad B = \{1, 2, 3\}$,
sono vere le seguenti affermazioni:
$1 \in A$
$\{2\} \in A$
$2 \notin A$
$\emptyset \subset A$
$2 \in B$
$\{2\} \subset B$
$\{\{2\}\} \subset A$
$A \cap B = \{1\}$
$A \cup B = \{1, 2, 3, \{2\}\}$

Capitolo 2

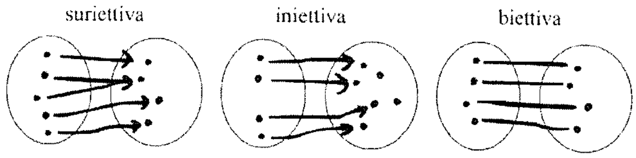
Funzioni

Concetto di funzione:
parliamo di funzione ogni volta che il valore di una grandezza dipende dal valore di un'altra grandezza. La definizione formale di funzione data nel linguaggio insiemistico è il risultato di una lunga evoluzione.

Definizione formale:
Una **funzione** dall'insieme A all'insieme B, che indichiamo con $f : A \longrightarrow B$, è una relazione che ad ogni elemento di A associa uno ed un solo elemento di B. Chiamiamo A, **dominio** o **campo di esistenza** della funzione; B, **insieme di arrivo** della funzione e $f(A)$ **codominio** o **immagine** della funzione.
Nota bene: non sempre insieme d'arrivo e immagine coincidono.

Una funzione da A a B è:
· **iniettiva** se a due **distinti** elementi di A sono associati elementi distinti di B;
· **suriettiva** quando **tutti** gli elementi di B hanno un elemento di A a cui sono associati;
· **biiettiva** quando è suriettiva e iniettiva, in tal caso si parla di **corrispondenza biunivoca**.

L'inversa di una funzione è definita se e solo se la funzione è biiettiva.



Date le funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$, si può definire la **funzione composta** $g \circ f : A \to C$, che ad ogni elemento $a \in A$ associa l'elemento di C così ottenuto:
· ad a si associa $b \in B$ tale che $b = f(a)$;
· a b si associa $c \in C$ tale che $c = g(b)$.

In generale non è vero che $g \circ f = f \circ g$.

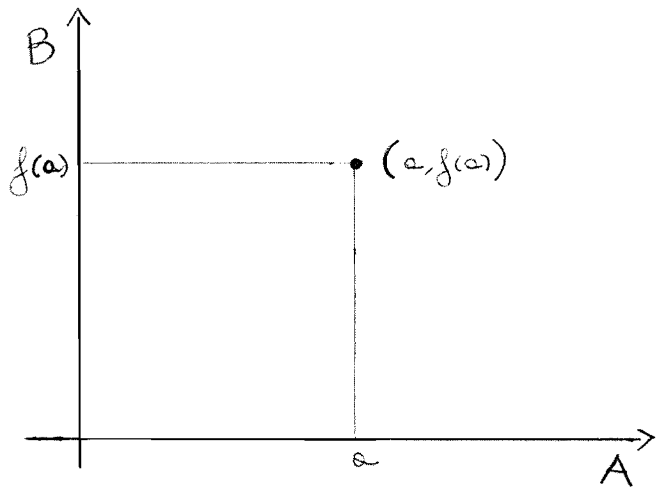
Una **funzione numerica** ha come dominio e come codominio due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Data la funzione numerica $f : x \mapsto y = f(x)$, x si chiama **variabile indipendente** e y si chiama **variabile dipendente**.

Esempio 2. Siano $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3x + 1$ allora:
$f(g(x)) = f \circ g = (3x + 1)^2$
$g(f(x)) = g \circ f = 3x^2 + 1$

Alcune funzioni esprimono proporzionalità particolari tra variabile indipendente e dipendente.
Sia $k \in \mathbb{R}$:
· $y = kx$ esprime la proporzionalità diretta;
· $y = \frac{k}{x}$ esprime la proporzionalità inversa;
· $y = kx^2$ esprime la proporzionalità quadratica;

Rappresentazione cartesiana di una funzione

Consideriamo una funzione $f : A \longrightarrow B$; abbiamo detto che ad ogni elemento di A associamo uno ed un solo elemento di B, perciò possiamo innanzitutto considerare il prodotto cartesiano $A \times B$ che è l'insieme di tutte le coppie ordinate (a, b) con a $a \in A$ e $b \in B$, e poi considerare il suo sottoinsieme $\gamma = \{(a, b) | b = f(a), a \in A, b \in B\}$ che prende il nome di **grafico della funzione**.



Quindi $P = (a, b) \in \gamma \Leftrightarrow b = f(a)$.

Capitolo 3

Numeri

3.1 Numeri Naturali $\mathbb{N}$

I numeri naturali $\mathbb{N} = \{\ 0, 1, 2, 3, ...\}$ servono per contare, possiamo quindi utilizzarli per indicare la **cardinalità** di un insieme. Per denotare un generico numero naturale si può usare una lettera dell'alfabeto, che viene chiamata **variabile numerica**. I numeri naturali sono infiniti, si dimostra infatti la **proprietà archimedea**: dati due numeri qualunque $a, b > 0$, esiste sempre un numero naturale n tale che $nb > a$. I numeri naturali costituiscono un **insieme ordinato** (cioè dotato di una relazione d'ordine) e possono essere rappresentati su una semiretta orientata.

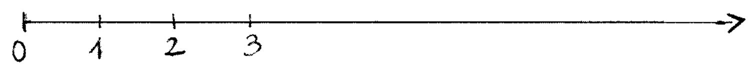


Figura 3.1: Rappresentazione dei numeri naturali.

Relazione d'ordine $>$: dati due numeri qualunque a, b diciamo $a > b \Leftrightarrow$ esiste un numero $c \neq 0$ tale che $a = b + c$; se togliamo la condizione $c \neq 0$ abbiamo la relazione $\geq$.

Le **quattro operazioni**: addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione.

Considereremo l'operazione di addizione come nota; la moltiplicazione viene definita come una addizione ripetuta, cioé il prodotto di a e b é dato da:

$$a \cdot b = a + a + a + ... + a \text{ (b volte)} = b + b + ... + b \text{ (a volte)}$$

Addizione e moltiplicazione sono **operazioni interne** in $\mathbb{N}$, cioè sono sempre possibili, la sottrazione e la divisione, invece, sono possibili solo in particolari condizioni (ed è questo uno dei motivi per cui si costruiscono nuovi insiemi numerici, comunque contenenti $\mathbb{N}$ e verificanti le sue proprietà, in cui però tali operazioni sono sempre effettuabili; vedremo quindi l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ in cui la sottrazione è un'operazione interna, ma non la divisione. Costruiremo perciò l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ in cui sia la sottrazione che la divisione sono operazioni interne, e così via).

Una **potenza** é un'operazione che associa ad una coppia di numeri a e n, detti rispettivamente base ed esponente, il numero dato dal prodotto di n fattori uguali ad a.Qualsiasi numero elevato alla 1 dà come risultato se stesso, un numero diverso da 0 elevato alla 0 dà come risultato 1, **l'espressione** 0^0 **non ha significato**.

Le operazioni vanno svolte nell'ordine seguente:
1. potenze
2. moltiplicazioni e divisioni
3. addizioni e sottrazioni
e le operazioni scritte tra parentesi hanno la precedenza.

Le **proprietà delle operazioni**:

Proprietà dell'addizione	
proprietà	espressione
commutativa	$a + b = b + a$
associativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$

Proprietà della moltiplicazione	
proprietà	espressione
commutativa	$a * b = b * a$
associativa	$(a * b) * c = a * (b * c)$
distributiva a destra	$(a + b) * c = a * c + b * c$
distributiva a sinistra	$a * (b + c) = a * b + a * c$

Proprietà della sottrazione		
proprietà	espressione	con
invariantiva	$a - b = (a + n) - (b + n)$	$a \geq b$
	$a - b = (a - n) - (b - n)$	$a \geq b \geq n$

Proprietà della divisione		
proprietà	espressione	con
invariantiva	$a : b = (an) : (bn)$	$b \neq 0, n \neq 0, a = kb, (k \neq 0)$
	$a : b = (a : n) : (b : n)$	$b \neq 0, n \neq 0, a = kb, (k \neq 0), b = hn, (h \neq 0)$
distributiva	$(a + b) : c = a : c + b : c$	$c \neq 0, a = kc, b = hc, a + b = mc, (k, h, m \neq 0)$

Proprietà delle potenze		
proprietà	espressione	con
prodotto di potenze di uguale base	$a^m a^n = a^{m+n}$	
quoziente di potenze di uguale base	$a^m : a^n = a^{m-n}$	$m \geq n, a \neq 0$
potenza di una potenza	$(a^m)^n = a^{mn}$	
prodotto di potenze di uguale esponente	$a^n b^n = (ab)^n$	
quoziente di potenze di uguale esponente	$a^n : b^n = (a : b)^n$	$b \neq 0, a = kb, (k \neq 0)$

Diremo **multiplo** di a il prodotto di a stesso per un qualunque numero naturale. Un numero naturale a è **divisibile** per un altro numero naturale b, se a é un multiplo di b. In tal caso diremo che b é un **divisore** (o **sottomultiplo**) di a.

Teorema 3.1.1. *Teorema di divisibilitá*
Data una coppia ordinata di numeri naturali (a,b) con $b \neq 0$ *esiste una e una sola coppia ordinata (q,r) con* $0 \leq r < b$ *tale che* $a = bq + r$.

Sfruttando il teorema di divisibilitá possiamo verificare quando un numero naturale a é divisibile per un altro numero naturale b: controlleremo se nella divisione $a : b$ il quoziente é un numero naturale e il resto é 0. Nella divisione **il divisore deve essere sempre diverso da 0**.

Un numero naturale $n > 1$ è **primo** quando è divisibile solo per uno e per se stesso.

Teorema 3.1.2. *Teorema fondamentale dell'aritmetica.*
Ogni numero naturale diverso da zero e da uno o é primo, o é il prodotto di fattori primi. Tale decompozione in fattori primi é unica a meno dell'ordine dei fattori.

Il **M.C.D.** (massimo comun divisore) fra due o più numeri, diversi da 0, è il più grande dei divisori comuni ed è dato dal prodotto dei fattori primi comuni, ognuno preso una sola volta con la potenza più bassa.

Il **m.c.m.** (minimo comune multiplo) fra due o più numeri, diversi da 0, è il più piccolo dei multipli comuni diverso da 0 ed è dato dal prodotto di tutti i fattori primi, comuni e non, ognuno preso una sola volta con la potenza più alta.

Tra **M.C.D.** e **m.c.m.** sussiste la seguente relazione:

$$\text{M.C.D.(a,b)} \cdot \text{ m.c.m.(a,b)} = a \cdot b$$

Due numeri a e b si dicono **primi tra loro** se: M.C.D.(a,b)= 1.

3.2 Numeri Interi $\mathbb{Z}$

I numeri interi (o relativi) si ottengono facendo precedere i numeri naturali dal segno $+$ o dal segno $-$: $\mathbb{Z} = \{ ..., -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, ...\}$, anch'essi costituiscono un **insieme ordinato** e possono essere rappresentati su una retta orientata.

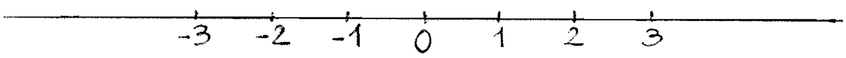


Figura 3.2: Rappresentazione dei numeri interi.

ORDINAMENTO:
Se supponiamo che le lettere non abbiamo incorporato nessun segno distintivo, ma che indichino solo dei numeri naturali (considereremo cioè $a, b > 0$), possiamo introdurre il seguente ordinamento:

- i numeri del tipo $+a$ sono maggiori di 0 e di tutti i numeri del tipo $-b$ (li chiameremo numeri **positivi**)
- nell'insieme dei numeri positivi l'ordine è esattamente quello dei numeri naturali. In altre parole: $+a > +b$ quando $a > b$. I numeri naturali ed i numeri positivi si comportano esattamente allo stesso modo riguardo all'ordinamento.
- 0 è maggiore di tutti i numeri del tipo $-b$ (questi ultimi li chiameremo invece numeri **negativi**)
- nell'insieme dei numeri negativi l'ordine è esattamente opposto a quello dei numeri naturali. In altre parole: $-a > -b$ quando $b > a$.

Due numeri interi sono **concordi** quando hanno lo stesso segno e **discordi** se hanno segno diverso.

Dato un qualunque numero y, il suo **opposto additivo** è il numero x tale che $y + x = x + y = 0$. Quindi due numeri opposti sono equidistanti dallo 0.

OPERAZIONI:

Per **sommare due numeri interi** si parte dal primo addendo, che può essere positivo o negativo o nullo; se il secondo addendo ha il segno $+$ si fanno tanti passi di lunghezza 1 verso destra quanti ne indica il secondo addendo; se il secondo addendo ha il segno $-$ si fanno tanti passi di lunghezza 1 verso sinistra quanti ne indica il secondo addendo. Il numero a cui si arriva con questo procedimento è il risultato dell'addizione. Vale quindi che:

- La somma di due numeri con il segno $+$ è un numero con il segno $+$ e sulla linea dei numeri ci si comporta esattamente come quando si trattano i numeri naturali.
- La somma di due numeri con il segno $-$ ci fa restare nel settore dei numeri con il segno $-$.
- La somma di due numeri con il segno diverso può cadere nel settore dei numeri con il segno $+$, oppure in quello dei numeri con il segno $-$, oppure situarsi nel punto 0.

La **sottrazione in** $\mathbb{Z}$ è sempre possibile e si riduce ad una addizione secondo la seguente regola:

$$a - b = a + (-b)$$

Il **prodotto di due interi** è quel numero intero la cui parte naturale è data dal prodotto dei due numeri presi senza segno (quindi applichiamo la definizione già vista di prodotto tra numeri naturali) e il cui segno è determinato dalle regole della seguente tabella:

$\cdot$	$+$	$-$
$+$	$+$	$-$
$-$	$-$	$+$

La **divisione** non è un'operazione interna in $\mathbb{Z}$; laddove è possibile, il **quoziente di due numeri interi** è ancora un numero intero la cui parte naturale è data dal quoziente dei due numeri presi senza segno (quindi applichiamo la definizione già vista di divisione tra numeri naturali) e il cui segno è determinato seguendo ancora le regole della precedente tabella.

La **potenza di un numero intero**, con esponente naturale, è ancora un numero intero la cui parte naturale è data dalla potenza del numero preso senza segno (quindi applichiamo la definizione già vista di potenza di un numero naturale) e il cui segno è positivo se l'esponente è pari mentre rimane invariato se l'esponente è dispari. In $\mathbb{Z}$ valgono le stesse proprietà delle potenze che valgono in $\mathbb{N}$.

3.3 Numeri Razionali $\mathbb{Q}$

Le frazioni sono espressioni della forma $\frac{a}{b}$ dove a e b sono numeri interi e $b \neq 0$. Due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ frazioni si dicono **equivalenti** quando $ad = bc$.
La frazione $\frac{a}{b}$ si dice **ridotta ai minimi termini** quando a e b sono primi tra loro. Chiamiamo **numero razionale** ogni classe di equivalenza di frazioni e come rappresentante della classe si sceglie la frazione ridotta ai minimi termini. L'insieme dei numeri razionali si indica con $\mathbb{Q}$.

ORDINAMENTO:
Si dice $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$, dove $b, d > 0$, se e solo se $ad \geq bc$ (lo stesso vale cambiando il segno della disuguaglianza con maggiore stretto, minore uguale o minore stretto).

OPERAZIONI:
Addizione e Sottrazione

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd} \tag{3.1}$$

con $b, d \neq 0$.

Moltiplicazione

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \tag{3.2}$$

con $b, d \neq 0$.

Divisione

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \tag{3.3}$$

con $b, c, d \neq 0$. La divisone è interna in $\mathbb{Q}$.

Potenza

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \tag{3.4}$$

con $b \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

Queste operazioni tra numeri razionali godono ancora di tutte le proprietà viste in $\mathbb{Z}$.

Dato il numero razionale $\frac{a}{b}$, con $a, b \neq 0$, definiamo il suo **reciproco** come il numero razionale $\frac{b}{a}$. Il prodotto di un numero per il suo reciproco è 1, cioè l'elemnto neutro per la moltiplicazione.

Dato il numero razionale $\frac{a}{b}$, definiamo la **potenza con esponente intero negativo** di $\frac{a}{b}$ come:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} \tag{3.5}$$

con $a, b \neq 0, n \in \mathbb{N}$.

In $\mathbb{Q}$ (e quindi anche in ogni suo sottoinsieme, in particolare in $\mathbb{N}$ e in $\mathbb{Z}$) valgono le **leggi di monotonia**:

Prima legge
se $a \lesseqqgtr b$, allora $a + n \lesseqqgtr b + n$.
Seconda legge
Se $a = b$, allora $an = bn$; $(n \neq 0)$.
Se $a < b$, allora $an < bn$; se $n > 0$.
Se $a < b$, allora $an > bn$; se $n < 0$.

e la **legge di annullamento del prodotto:**
$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ o $b = 0$

Le **percentuali** sono frazioni aventi per denominatore 100.

Una **proporzione** è un modo per scrivere un'uguaglianza fra frazioni equivalenti.

Proprietà delle proporzioni	
proprietà fondamentale	$a : b = c : d$ se e solo se $ad = bc$
del comporre	$(a+b) : a = (c+d) : c$
	$(a+b) : b = (c+d) : d$
dello scomporre	$(a-b) : a = (c-d) : c$
	$(a-b) : b = (c-d) : d$
del permutare	$a : c = b : d$
	$d : b = c : a$
dell'invertire	$b : a = d : c$

Ogni numero razionale non intero è rappresentato da un **numero decimale finito** o **periodico** (in particolare diremo *periodico semplice* se il periodo inizia subito dopo la virgola, *periodico misto* se tra la virgola e il periodo c'è l'antiperiodo).
Ogni **numero decimale finito** si può scrivere sotto forma di frazione, moltiplicandolo e dividendolo per il numero costituito da 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre decimali del numero dato.

Esempio 3. $0,135 = \frac{0,135 \cdot 1000}{1000} = \frac{135}{1000}$

La frazione generatrice di un **numero periodico semplice** è una frazione che ha per numeratore la differenza tra parte intera, se c'è, seguita dal periodo e parte intera, e per denominatore il numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo.

Esempio 4. $0,\overline{13} = \frac{13}{99}$

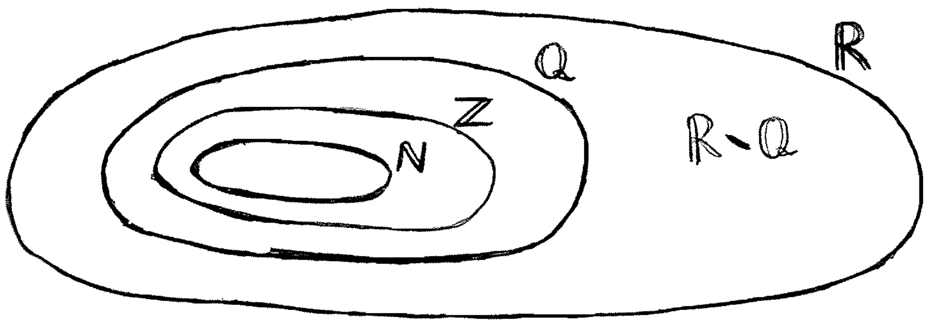
Esempio 5. $27,\overline{2} = \frac{272-27}{9} = \frac{245}{9}$

La frazione generatrice di un **numero periodico misto** è una frazione che ha per numeratore il numero formato da tutte le cifre che precedono il periodo, seguite da quelle del periodo, meno il numero formato da tutte le cifre che precedono il periodo; e per denominatore il numero formato da tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Esempio 6. $0,2\overline{12} = \frac{212-2}{990} = \frac{210}{990}$

3.4 Numeri Reali $\mathbb{R}$

Anche l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali si rivela insufficiente quando si voglia, per esempio, eseguire l'operazione inversa dell'elevamento al quadrato, cioè l'estrazione di radice quadrata: *si dice radice quadrata del numero* $a \geq 0$*, e si indica con* $\sqrt[2]{a}$*, quel numero* $b \geq 0$ *il cui quadrato è uguale ad a.* Quindi l'estrazione di radice quadrata (vedremo tra poco anche l'estrazione di radice n-esima) non è un operazione interna in $\mathbb{Q}$. Ad esempio, 2 non ha per radice quadrata un numero razionale (dimostrazione vista in classe), ma la sua radice è $1,4142135662...$, cioè un numero decimale illimitato non periodico; chiameremo questi numeri *irrazionali.* I numeri **reali** sono tutti i numeri razionali e irrazionali, li indicheremo con la lettera $\mathbb{R}$.



All'interno di questo insieme possiamo definire una nuova operazione interna: la **potenza a esponente razionale**.

Partiamo dalla *potenza a esponente* $\frac{1}{n}$, che indicheremo con $x^{\frac{1}{n}}$ oppure con $\sqrt[n]{x}$ (detto **radicale**), dove $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$:

· se n dispari, $x^{\frac{1}{n}}$ è l'unico numero che elevato alla n dà x.

· se n pari, $x^{\frac{1}{n}}$ è definito solo per $x \geq 0$ ed è l'unico numero non negativo che elevato alla n d à x.

Esempio 7. $\sqrt[2]{4} = 2$ *non* ± 2

Definiamo ora la *potenza a esponente* $\frac{m}{n}$, che indicheremo con $x^{\frac{m}{n}}$ oppure con $\sqrt[n]{x^m}$, dove $m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$:

$$x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m = x^{\frac{1}{n}} \cdot x^{\frac{1}{n}} \cdot ... \cdot x^{\frac{1}{n}} \text{ (m volte)}$$

Vediamo ora alcune proprietà dei radicali:

· **proprietà invariantiva**: $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$, con $p \in \mathbb{N}, p \neq 0$;
· **proprietà del prodotto**: il prodotto di radicali con lo stesso indice è un radicale con lo stesso indice e con radicando (la base) uguale al prodotto dei radicandi: $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;
· **proprietà della potenza**: $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$, con $p \in \mathbb{N}, p \neq 0$.

Due radicali sono **simili** quando hanno la stessa parte radicale. Due radicali simili si possono sommare ottenendo un radicale simile che ha come coefficiente la somma dei coefficienti.

È possibile **razionalizzare il denominatore** (in cui compaiono radicali) di una frazione moltiplicando numeratore e denominatore per un opportuno fattore diverso da 0.
$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Abbiamo visto come sia possibile scrivere i radicali sotto forma di potenze con esponenti razionali:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \tag{3.6}$$

questo ci permette di studiare le operazioni tra radicali come operazioni tra potenze, utilizzando tutte le regole di queste ultime.

Capitolo 4

Il calcolo letterale

4.1 Monomi

A cosa serve il calcolo letterale? Lo utilizziamo per esprimere proprietà di carattere generale o per generalizzare un determinato problema.
Partiamo dalla definizione di un **monomio**: un'espressione letterale formata dal prodotto di numeri e potenze che hanno per base una lettera e per esponente un numero naturale, perciò fra le lettere non compaiono addizioni, sottrazioni o divisioni.
Un monomio in **forma normale** è scritto come prodotto fra un numero (**coefficiente**) e una o più lettere diverse tra loro, con i relativi esponenti (**parte letterale**). Il **grado** di un monomio è la somma degli esponenti della parte letterale.

Esempio 8. $-\frac{3}{4}ab^2$ è un monomio di 3^o grado

Due monomi sono **simili** se hanno la stessa parte letterale.

Esempio 9. $2ac$ e $\frac{4}{3}ac$ sono monomi simili

OPERAZIONI:

La **somma** o la **differenza di due monomi simili** è il monomio che si ottiene sommando algebricamente i coefficienti (con relativo segno) e lasciando invariata la parte letterale. Se i due monomi <u>non</u> sono simili, la loro somma

o differenza ci darà un'espressione letterale che nella prossima sezione definiremo come polinomio.
Se invece abbiamo un prodotto, un quoziente o una potenza possiamo operare con qualsiasi monomi, simili e non. Nel **prodotto**, per i coefficienti si usano le regole relative ai numeri, mentre per le lettere si usano le proprietà delle potenze. Lo stesso per il **quoziente** o la **potenza** di monomi.

Esempio 10. Prodotto di monomi: $\frac{x^3y}{4} \cdot \frac{xy^2}{2} = \frac{x^4y^3}{8}$

Esempio 11. Potenze di monomi: $(-\frac{2}{3}a^2bx^3)^2 = \frac{4}{9}a^4b^2c^6$

La parte letterale del **massimo comun divisore** (M.C.D.) di monomi è il prodotto delle sole lettere comuni a tutti i monomi ognuna presa una sola volta con l'esponente minimo. Il coefficiente può essere qualsiasi numero, ma se i coefficienti sono interi si preferisce prendere il M.C.D. dei coefficienti.

La parte letterale del **minimo comune multiplo** (m.c.m.) di monomi è il prodotto di tutte le lettere, comuni e non comuni, ognuna presa una sola volta con l'esponente massimo. Il coefficiente può essere qualsiasi numero, ma se i coefficienti sono interi si preferisce prendere il m.c.m. dei coefficienti.

Esempio 12. Dati i due monomi $3x^2y$ e $15xz$, il loro M.C.D. è $3x$, mentre il loro m.c.m. è $15x^2yz$.

4.2 Polinomi

Un **polinomio** è la somma algebrica di più monomi. Anche ogni monomio è considerato un polinomio.

Esempio 13. $3a^2b + 2ab^5$ è un polinomio

Un polinomio è **ridotto** in forma normale se lo è ogni suo monomio e tra di loro non ci sono monomi simili.
I polinomi ridotti con uno, due, tre o quattro termini si chiamano rispettivamente **monomi, binomi, trinomi e quadrinomi**.
Il **grado** di un polinomio è il grado maggiore dei suoi termini.

Esempio 14. $3a^2b + 2ab^5$ è un polinomio di 6^o grado

Il **grado rispetto a una lettera** di un polinomio è il grado maggiore dei suoi termini rispetto a quella lettera.

Esempio 15. $3a^2b + 2ab^5$ è un polinomio di 2^o grado rispetto alla lettera a

Un polinomio è:

· **omogeneo** quando tutti i suoi termini sono dello stesso grado;

· **ordinato rispetto a una lettera** se i suoi termini sono disposti con esponenti di quella lettera in ordine decrescente o crescente;

· **completo** rispetto a una lettera se questa compare con tutte le potenze dal grado massimo al grado 0.

Il **termine noto** è il termine formato soltanto da un numero, ossia il monomio di grado 0.

Un polinomio può essere anche considerato come una funzione in una o più variabili (**funzione polinomiale**). Si possono calcolarne pertanto il valore per particolari valori assegnati delle variabili. I valori per i quali un polinomio si annulla sono detti **zeri** o **radici** del polinomio.

Esempio 16. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ e valuto $P(5) = 5^3 + 2 \cdot 5^2 - 3 \cdot 5 + 5$

Esempio 17. $P(x) = x^3 - 1$, valuto $P(1) = 1^3 - 1 = 0$ quindi 1 è una radice del polinomio $P(x)$

OPERAZIONI:

La **somma** di due polinomi è il polinomio che ha per termini tutti i termini del primo e del secondo addendo; la **differenza** di due polinomi è il polinomio che si ottiene sommando al primo l'opposto del secondo. In generale si parla di **somma algebrica**.

Il **prodotto** di due polinomi si ottiene moltiplicando ciascun termine del primo con ciascuno del secondo (e facendo la somma dei termini ottenuti).

I prodotti notevoli:

· Differenza di quadrati (oppure somma per differenza):

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \tag{4.1}$$

· Somma di quadrati: non può essere vista come prodotto di polinomi (vedi spiegazione a fine sezione)

· Quadrato di un binomio:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \tag{4.2}$$

· Quadrato di un trinomio:

$$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC \tag{4.3}$$

· Cubo di un binomio:

$$(A+B)^3 = A^3 + B^3 + 3A^2B + 3AB^2 \tag{4.4}$$

· Somma di cubi:

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2) \tag{4.5}$$

· Differenza di cubi:

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2) \tag{4.6}$$

Un polinomio è **divisibile per un monomio** se lo sono tutti i suoi termini, in tal caso il quoziente si ottiene dividendo ogni termine per il monomio.
Il procedimento studiato per la **divisione** tra due polinomi, $A : B$, ci permette di ottenere il polinomio quoziente Q e il polinomio resto R, in modo che si ha: $A = B \cdot Q + R$.

Mostriamo alcune particolarità della divisione tra polinomi:

· Se il divisore di un polinomio è del tipo $x-a$, con $a \in \mathbb{R}$ possiamo utilizzare la **Regola di Ruffini** per svolgere la divisione (vista in classe).

· **Il teorema del resto**: il resto della divisione di un polinomio $P(x)$ per un binomio $x-a$ è $P(a)$.

Dal teorema del resto segue quindi:

· **Il teorema di Ruffini**. Un polinomio $P(x)$ è divisibile per un binomio $x - a$ se e soltanto se $P(a) = 0$.

Si tratta perciò di capire quali sono i possibili valori di a per cui $P(a) = 0$:
· 1^o **regola**: dato un polinomio $P(x)$ a coefficienti interi, le eventuali radici intere del polinomio sono da ricercarsi tra i divisori, positivi o negativi, del suo termine noto.
· 2^o **regola**: dato un polinomio $P(x)$ a coefficienti interi, le eventuali radici razionali del polinomio sono da ricercarsi tra le frazioni aventi per numeratore un divisore (positivo o negativo) del termine noto e per denominatore un divisore (positivo o negativo) del coefficiente di grado massimo.

ATTENZIONE! Se la differenza di quadrati abbiamo visto sopra essere scomponibile nel prodotto di due polinomi, ciò non si può dire per la somma di quadrati! Infatti, se lo fosse sarebbe il prodotto di due polinomi di primo grado, cioè di polinomi del tipo $x + a$; ma se il polinomio $x^2 + 1$ avesse come fattore il polinomio $x + a$, esso avrebbe come radice $-a$ e questo non è possibile perchè $x^2 + 1 > 0$ per ogni x !

4.3 La scomposizione in fattori

Scomporre un polinomio significa riscriverlo come prodotto di polinomi di grado inferiore. Se è possibile scomporre un polinomio questo è detto **riducibile**, in caso contrario è detto **irriducibile**.

Esempio 18. $x^2 + 1$ è un polinomio irriducibile

Esistono vari **metodi di scomposizione**:

· Il raccoglimento totale (o a fattore comune);

· Il raccoglimento parziale;

· La scomposizione riconducibile a prodotti notevoli;

· La scomposizione di particolari trinomi di secondo grado:
$x^2 + sx + p = (x + x_1)(x + x_2)$, con $s = x_1 + x_2$ e $p = x_1 x_2$;

· La scomposizione mediante il Teorema e la regola di Ruffini.

La ricerca del **M.C.D.** e del **m.c.m.** fra polinomi avviene in modo analogo a quello per i monomi. I polinomi devono essere scomposti in fattori irriducibili (questi vengono trattati come le lettere nel caso dei monomi, notatate che le singole lettere nel prodotto sono fattori irriducibili).

4.4 Frazioni algebriche

Una **frazione algebrica** è una frazione che ha dei polinomi al numeratore e al denominatore. Il polinomio al denominatore non può essere il polinomio nullo. Inoltre una frazione algebrica non esiste dove si annulla il denominatore (per i valori che sostituiti alle lettere danno come risultato 0).

OPERAZIONI:

Per le frazioni algebriche valgono le stesse **regole di calcolo** che si hanno per le frazioni numeriche.

Esempio 19. $\frac{2ab^4}{5x^2y^3}$, $\frac{a+2b}{a-3b}$, $\frac{4x+1}{x^2-1}$

Capitolo 5

Equazioni e disequazioni di primo grado

5.1 Equazioni lineari

Un'**identità** è un'uguaglianza tra due espressioni letterarie che risulta verificata per qualunque valore attribuito alle lettere.

Un'**equazione** è un'uguaglianza tra due espressioni letterarie che è verificata per particolari valori attribuiti alle lettere, tali valori sono detti **soluzioni o radici** dell'equazione.

Un'**equazione lineare** è un'equazione di primo grado. Un'equazione $P(x) = 0$ è in **forma normale** se il polinomio $P(x)$ non contiene termini simili. Il **grado** dell'equazione è il grado del polinomio ridotto.

Esistono diversi tipi di equazioni:
· numerica intera (coefficienti solo numerici e incognita solo al numeratore);
· numerica fratta(coefficienti solo numerici e incognita anche al denominatore);
· letterale intera(coefficienti anche letterali e incognita solo al numeratore);
· letterale fratta(coefficienti anche letterali e incognita anche al denominatore).

PRIMO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA delle equazioni: data un'equazione se si aggiunge o si toglie ad entrambi i membri dell'equazione uno stesso numero o una stessa espressione si ottiene un'equazione equivalente.

Dal primo principio discendono due regole:

· **Regola del trasporto**: è possibile spostare un termine da un membro all'altro dell'equazione cambiandone il segno, ottenendo un'equazione equivalente.

Esempio 20. $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x - 5 + 5 = 0 + 5 \Leftrightarrow x = 5$

· **Regola di cancellazione**: è possibile eliminare dai due membri termini uguali, ottenendo un'equazione equivalente.

Esempio 21. $x - 3 = -3 \Leftrightarrow x - 3 + 3 = -3 + 3 \Leftrightarrow x = 0$

SECONDO PRINCIPIO DI EQUIVALENZA delle equazioni: data un'equazione se si moltiplica o si divide entrambi i membri dell'equazione per uno stesso numero o una stessa espressione, diversi da 0, si ottiene un'equazione equivalente.

Dal secondo principio discendono due regole:

· **Regola della divisione per un fattore comune**: se tutti i termini dell'equazione hanno un fattore comune si possono dividere tutti i termini per quel fattore, ottenendo un'equazione equivalente.

Esempio 22. $2x = 2 \Leftrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{2}{2} \Leftrightarrow x = 1$

· **Regola del cambiamento di segno**: è possibile cambiare il segno di **tutti** i termini dell'equazione, ottenendo un'equazione equivalente.

Esempio 23. $-x = 9 \Leftrightarrow (-1) \cdot (x) = (-1) \cdot 9 \Leftrightarrow x = -9$

Le **equazioni numeriche intere**.

È sempre possibile un equazione di primo grado nella forma $ax = b$.

Si distinguono 3 casi:
· se $a \neq 0$, allora $\frac{ax}{a} = \frac{b}{a}$ la soluzione è $x = \frac{b}{a}$ e l'equazione è **determinata**;
· se $a = 0$ e $b = 0$, allora $0 \cdot x = 0$ e l'equazione è **indeterminata**;
· se $a = 0$ e $b \neq 0$, allora $0 \cdot x = b$ e l'equazione è **impossibile**.

Quando risolviamo un **equazione letterale intera** dobbiamo distinguere il caso in cui il coefficiente letterale della x è 0 da quello in cui è diverso da 0.

Prima di risolvere un'**equazione numerica fratta** bisogna determinarne le **condizioni di esistenza** poi una volta ottenuto il risultato controllare se la soluzione è **accettabile**.

Anche nel caso delle **espressioni letterali fratte** bisogna distinguere i due casi riguardo il coefficiente angolare della x.

5.2 Disequazioni lineari

Proprietà delle disuguaglianze, valide $\forall a, b \in \mathbb{R}$:

· monotonia dell'addizione: $a < b \Rightarrow a + k < b + k$ ($\forall k \in \mathbb{R}$)

Esempio 24. $-5 < 2 \Rightarrow -5 + 3 < 2 + 3$

Esempio 25. $-5 < 2 \Rightarrow -5 - 3 < 2 - 3$

· moltiplicazione per un numero positivo: $a < b \Rightarrow ak < bk$ ($\forall k \in \mathbb{R}^+$)

Esempio 26. $-5 < 2 \Rightarrow -5 \cdot (3) < 2 \cdot (3)$

· moltiplicazione per un numero negativo: $a < b \Rightarrow ak > bk$ ($\forall k \in \mathbb{R}^-$)

Esempio 27. $5 < 7 \Rightarrow 5 \cdot (-1) > 7 \cdot (-1)$

· reciproci concordi: $a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ($\forall a, b$ concordi)

Esempio 28. $2 < 3 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$

Esempio 29. $-5 < -2 \Rightarrow \frac{1}{-5} > \frac{1}{-2} \Leftrightarrow -\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$

Una disuguaglianza dove compaiono espressioni letterali è una **disequazione** se risulta vera solo per determinati valori delle lettere. Questi valori sono l'insieme delle soluzioni della disequazione e possono essere rappresentati in vari modi (disequazione semplificata, rapprsentazione grafica, scrittura di un intervallo in forma di espressione).

Per risolvere una disequazione si utilizzano le proprietà delle disuguaglianze per ottenere via via disequazioni equivalenti alla prima ma più semplici fino ad arrivare ad un'espressione chiara delle soluzioni.

Le disequazioni si dividono come le equazioni in **intere, numeriche, fratte e letterali**. Inoltre una disequazione può avere soluzioni (**determinata**), essere sempre verificata (**indeterminata**) o non avere soluzioni (**impossibile**).

Le **disequazioni fratte** si risolvono con la regola dei segni: si studiano la positività di numeratore e denominatore.

Un **sistema di disequazioni** è un insieme di due o più disequazioni nelle stesse variabili per cui si cercano i valori che rendono tali disequazioni verificate *contemporaneamente.*
Per trovare le soluzioni di un sistema di disequazioni si si rappresentano su rette orizzontali le soluzioni di ogni disequazione. Le soluzioni del sistema sono date dagli intervalli comuni a tutte le soluzioni.

Capitolo 6

Equazioni e Disequazioni di secondo grado

6.1 Equazioni di secondo grado

Un'**equazione di secondo grado** è riconducibile alla forma normale: $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ (altrimenti ritorneremmo allo studio delle equazioni di 1^o grado).
Se tutti i coefficienti sono diversi da 0 l'equazione si dice **completa**, altrimenti **incompleta**. Distinguiamo in due tabelle il calcolo delle soluzioni di equazioni di secondo grado incomplete e complete:

Soluzioni delle equazioni di secondo grado incomplete	
equazione	soluzioni
$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}; x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$ le radici sono reali se e solo se a e c sono discordi
$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0; x_2 = -\frac{b}{a}$
$ax^2 = 0$	$x_1 = x_2 = 0$

Il **discriminante** di un equazione di secondo grado completa è $\Delta = b^2 - 4ac$.

Soluzioni delle equazioni di secondo grado complete	
segno del discriminante	soluzioni
$\Delta > 0$	due radici reali e distinte $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	due radici reali e coincidenti $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
$\Delta < 0$	non esistono soluzioni reali

Se le soluzioni dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ sono x_1, x_2, posto $s = x_1 + x_2$, $p = x_1x_2$ si ha:
$s = -\frac{b}{a}; p = \frac{c}{a}$
l'equazione quindi è equivalente a:
$x^2 - sx + p = 0$

Se $\Delta > 0 : ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,
se $\Delta = 0 : ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$,
se $\Delta < 0$ l'equazione è irriducibile.

Un'**equazione parametrica** è un'equazione letterale in cui si richiede che il valore di una lettera (**parametro**) soddisfi a certe condizioni.

6.2 Disequazioni di secondo grado

Ricordando che per studiare il segno di un prodotto di polinomi si studia il segno di ogni polinomio fattore e poi si determina il segno del prodotto con la regola dei segni della moltiplicazione, cerchiamo di trasformare il nostro polinomio di secondo grado nel prodotto di polinomi:
· Se $\Delta > 0 : ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,
· se $\Delta = 0 : ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$,
· se $\Delta < 0$ con il metodo del completamento del quadrato si dimostra che:
$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}\right]$ quindi mi basterà studiare il segno del coefficiente a

In ciascuno dei tre casi dallo studio del segno dei fattori si ricavano poi le soluzioni della disequazione.

Per le **disequazioni fratte** si procede analogamente ricordando però che il denominatore deve essere sempre diverso da 0.

Capitolo 7

Geometria Euclidea

7.1 Gli “Elementi” di Euclide

tratto da ”Le geometrie non euclidee e i fondamenti della geometria dal punto di vista elementare”, Agazzi, Palladino, Editrice La Scuola

Gli Elementi di Euclide costituiscono il primo vero e proprio trattato di matematica che ci sia pervenuto e, al tempo stesso, hanno rappresentato il più autorevole testo di aritmetica e geometria almeno fino al secolo scorso.
All’inizio del primo libro dell’opera euclidea troviamo enunciati tre gruppi di proposizioni, le quali introducono i *termini*, i *postulati* e le *nozioni comuni*.
L’elencazione dei termini, come viene fatta da Euclide, si presenta in un certo senso come una serie di definizioni e ciò ha condotto alcuni studiosi moderni a criticare questo modo di procedere perchè, a stretto rigore una definizione può essere data utilizzando termini primitivi indefiniti e posti esplicitamente come tali. Se consideriamo ad esempio come Euclide introduce la nozione di punto, dicendo $<<$ *Punto è ciò che non ha parti* $>>$, sembra di poter giustamente rimproverare che la nozione di “parte” non figura tra quelle primitive enunciate e, pertanto, la definizione in parola potrebbe apparire scorretta.
Tale critica sarebbe giustificata se Euclide avesse inteso introdurre i termini mediante definizioni formali. Al contrario, egli intende proprio introdurre i

termini come primitivi nel suo discorso geometrico, solo che, non pensando affatto che essi debbano essere privi di significato, egli tende a chiarire tale significato, facendo riferimento a nozioni di senso comune che aiutino ad afferrarlo.

Alcuni *termini*:

punto è ciò che non ha parti;

linea è una lunghezza senza larghezza;

linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti;

superficie è ciøche ha soltanto lunghezza e larghezza;

angolo piano è l'inclinazione reciproca di due linee che in un piano hanno un estremo in comune ma non sono per diritto;

parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dalle due parti, non si incontrano tra loro da nessuna delle due parti.

I cinque postulati:

1. Tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta;
2. si può prolungare una retta oltre i due punti indefinitamente;
3. dato un punto e una lunghezza, è possibile descrivere un cerchio;
4. tutti gli angoli retti sono uguali.
5. se una retta taglia altre due rette determinando dallo stesso lato angoli interni la cui somma è minore di quella di due angoli retti, prolungando le due rette, esse si incontreranno dalla parte dove la somma dei due angoli è minore di due angoli retti.

Nella tradizione didattica moderna il V postulato è in genere sostituito dall'assioma di Playfair:
"Data una qualsiasi retta r ed un punto P non appartenente ad essa, è possibile tracciare per P una ed una sola retta parallela alla retta r data."

Il quinto postulato di Euclide o "delle parallele" è quello che nel corso dei secoli ha suscitato il maggior interesse. La caratteristica che contraddistingue i postulati e gli assiomi della geometria di Euclide, secondo le idee del tempo, è l'essere asserzioni la cui verità è garantita dall'evidenza. Secondo Euclide, l'evidenza è una caratteristica dei primi quattro postulati degli Elementi: basta infatti usare riga e compasso; inoltre essi restano validi se ci si limita a una porzione finita di piano.
Sempre nell'ottica euclidea, invece, il Postulato delle parallele non è 'evidentemente vero', infatti non rimanda ad alcuna costruzione geometrica che possa limitarsi sempre ad una porzione finita di piano. Pare che lo stesso Euclide non fosse convinto dell'evidenza del postulato e questo è dimostrato dall'uso limitato che ne ha fatto nelle dimostrazioni dei teoremi della sua geometria. Negli oltre duemila anni successivi alla diffusione degli Elementi di Euclide, molti sono stati i tentativi di dimostrare il V postulato o di riformularlo o, addirittura, di sostituirlo con altri equivalenti. Tuttavia tali tentativi sono falliti in quanto i ragionamenti riconducevano sempre all'uso del V postulato.

7.2 Brevi cenni sulle geometrie non euclidee e l'assiomatica moderna

Nei primi decenni del XIX secolo, il fallimento di tutti i tentativi effettuati aveva convinto i matematici dell'impossibilità di dimostrare il V postulato. È da questo momento che inizia a farsi strada l'idea di costruire altre geometrie che facciano a meno del V postulato. Nascono così le prime geometrie non euclidee (ad esempio la geometria ellittica o la geometria iperbolica) e i

loro modelli, inizialmente al fine di dimostrarne l'inconsistenza e quindi, per assurdo, il V postulato.
Ad esempio Nikolai Ivanovic Lobacevskij (1793-1856) sviluppa una geometria nella quale il quinto postulato viene sostituito dalla sua negazione:
"Data una retta a qualunque, per ogni punto A fuori di essa passano infinite rette complanari con a che non hanno punti in comune con a."

La geometria di Lobacevskij non è stata accolta a pieno diritto fin tanto che i matematici non si sono sentiti in qualche modo rassicurati circa la sua non contraddittorietà. Il problema della non contraddittorietà non si poneva per le teorie matematiche concepite secondo il modello dell'assiomatica classica, in cui gli assiomi erano pensati come proposizioni evidenti, cioè vere di per sè. Deducendo correttamente a partire da proposizioni vere, infatti, non si possono ottenere altro che proposizioni vere e, quindi, non si ricaveranno mai contraddizioni, che sono proposizioni sempre false. Nel caso delle geometrie non euclidee, così ricche di asserti controintuitivi, non si poteva più fare appello all'evidenza come garanzia della coerenza.
Queste due teorie geometriche, pur essendo entrambe internamente non contraddittorie, sono però tali che parecchi enunciati dell'una rappresentano la negazione più o meno diretta di altrettanti enunciati dell'altra. Ciò comportava che esse non potessero essere simultaneamente vere e che, quindi, una sola di esse (al massimo) fosse la vera, oppure che entrambe non fossero nè vere nè false. Alla fine fu quest'ultimo il punto di vista che prevalse, dando luogo alla prospettiva dell'assiomatica moderna, la quale si caratterizza per il fatto di concepire le teorie matematiche come sistemi ipotetico-deduttivi in cui, ammessi certi enunciati iniziali, si ricavano le loro conseguenze logiche senza preoccuparsi di sapere se essi sono veri o falsi.Ció portava a mettere in secondo piano il problema dell'esistenza degli enti matematici come oggetti a cui gli assiomi delle teorie intendono riferirsi; anche se, necessariamente, gli assiomi contengono termini primitivi come *punto*, *retta*, *stare fra*, *congruente*, ecc., il significato di questi non è più di tipo referenziale, ma soltanto

linguistico, ossia determinato dalle pure relazioni contestuali che li legano reciprocamente negli assiomi.
Presentiamo ora un sistema di assiomi per la geometria euclidea formulato e concepito in questo nuovo spirito: si tratta di quello esposto nel 1899 da David Hilbert nei suoi *Fondamenti della Geometria*. In esso non si trovano sostanziali differenze rispetto a quello degli *Elementi* di Euclide, proprio perchè la differenza si colloca più nelle intenzioni e nello spirito della nuova assiomatica e non già nel possibile contenuto intuitivo delle sue affermazioni.

Gli assiomi di Hilbert
Consideriamo tre diversi sistemi di oggetti: chiamiamo *punti* gli oggetti del primo sistema e li indichiamo con A, B, C, ...; chiamiamo *rette* gli oggetti del secondo sistema e li indichiamo con a, b, c,...; chiamiamo *piani* gli oggetti del terzo sistema e li indiichiamo con α,β, γ, ...
Noi consideriamo punti, rette, piani in certe relazioni reciproche ed indichiamo queste relazioni con parole come 'giacere', 'fra', 'congruente'; la descrizione esatta e completa, ai fini matematici, di queste relazioni segue dagli assiomi della geometria.

Hilbert divide gli assiomi in cinque gruppi.

I GRUPPO: assiomi di appartenenza
: Gli assiomi di questo gruppo stabiliscono i collegamenti tra gli oggetti sopra introdotti, per esempio: "*per ogni coppia di punti, esiste una retta a cui appartengono*", "*per ogni coppia di punti distinti vi è al più una retta a cui appartengono*"...

II GRUPPO: assiomi di ordinamento
: Essi servono a determinare le proprietà del concetto di *stare fra* o di *giacere fra*, ossia la relazione d'ordine dei punti di una retta; per esempio "*dati tre punti distinti qualsiasi di una retta ve ne è al più uno che sta tra gli altri due*"...

III GRUPPO: assiomi di congruenza

Questi assiomi caratterizzano il concetto di eguaglianza tra segmenti e angoli; per esempio " *se due segmenti sono congruenti ad un terzo segmento, allora sono congruenti tra loro*", " *ogni angolo è congruente a se stesso*"...

IV GRUPPO: assioma della parallela

Definite *parallele* due rette complanari che non si incontrano, Hilbert assume come assioma l'unicità della parallela: " *data una retta a e un punto A fuori di essa, nel piano da essi individuato esiste al più una retta passante per A e parallela ad a* ".

V GRUPPO: assiomi di continuità

Gli assiomi di questo gruppo stabiliscono, da un lato che si può associare ai segmenti una misura e, dall'altro, che una retta è qualcosa di tutt'intero, senza lacune o interruzioni. In sintesi questi assiomi consentono di stabilire che vi è una corrispondenza biunivoca tra i punti di una retta e i numeri reali.

Quindi la geometria si basa su **enti primitivi** (come punto retta e piano), che vengono accettati come noti. Tutti gli altri enti geometici vengono descritti tramite **definizioni**.

7.3 Nozioni base di geometria

Una **figura geometrica** è un qualsiasi insieme di punti. Lo **spazio** è l'insieme di tutti i punti.

Fissato un punto O su una retta tutti i punti della retta che lo seguono formano una **semiretta** (lo stesso vale anche per i punti che lo precedono). Fissati due punti su una retta A e B il **segmento** AB è costituito dai due punti stessi e da tutti i punti compresi tra i due. Se due segmenti hanno un estremo in comune (anche non sulla stessa retta) sono detti **consecutivi**, se sono consecutivi e appartengono alla stessa retta sono detti **adiacenti**.

Una **poligonale** è una figura costituito da un insieme ordinato di segmenti in cui ciascuno è consecutivo con il successivo.

Data una retta di un piano, un **semipiano** è formato dalla retta stessa e da una delle due regioni in cui la retta divide il piano.

Un **angolo** è ciascuna delle due parti di piano individuate da due semirette aventi l'origine in comune.
Due angoli sono detti **consecutivi** se hanno in comune il vertice e un lato, mentre sono detti **adiacenti** se sono consecutivi e i lati non comuni appartengono alla stessa retta.

Un angolo è **piatto** quando i suoi lati appartengono alla stessa retta, mentre

Figura 7.1: angoli consecutivi

è detto **giro** se coincide con l'intero piano.

Una figura è **convessa** se presi due punti qualsiasi della figura il segmento che li congiunge è tutto contenuto all'interno della figura, è detta **concava** in caso contrario (i.e. esistono due punti per cui non è vero).

Figura 7.2: angoli adiacenti

Due figure sono **congruenti** quando è possibile sovrapporle senza deformarle.

Il **punto medio** di un segmento è quel punto che lo divide in due segmenti congruenti. È sempre possibile dividere un segmento in un qualsiasi numero di segmenti congruenti.

La **bisettrice** di un angolo è quella retta passante per l'origine che lo divide in due angoli congruenti. È sempre possibile dividere un angolo in un qualsiasi numero di angoli congruenti.

Un angolo **retto** è la metà di un angolo piatto.
Due angoli sono detti **supplementari** se la loro somma forma un angolo piatto, **complementari** se la loro somma forma un angolo retto e **esplementari** se la loro somma forma un angolo giro.

Due angoli sono **opposti al vertice** se i lati di un angolo sono i prolungamenti dei lati dell'altro.

Figura 7.3: angoli opposti al vertice

7.4 Poligoni

Un **poligono** è un sottoinsieme del piano costituito da una poligonale chiusa (i.e. l'ultimo segmento ha il secondo estremo coincidente con il primo estremo del primo segmento) e dai suoi punti interni, i segmenti sono detti **lati** e gli angoli interni, formati dalle semirette su cui giacciono lati consecutivi, sono detti **angoli** del poligono, i verici degli angoli sono detti anche **vertici** del poligono.Un poligono contiene tanti lati quanti angoli e quanti vertici. Ogni angolo è più piccolo di un angolo giro. Inoltre se è più piccolo di un angolo retto è detto **acuto**, mentre è detto **ottuso** se è più grande.

Un **triangolo** è un poligono con 3 lati.

La **bisettrice** di un angolo del triangolo è il segmento che congiunge il vertice dell'angolo e il lato opposto e divide l'angolo in due angoli congruenti.

L'**altezza** relativa a un lato è quel segmento che congiunge il lato e il vertice opposto e che forma un angolo retto con il lato (o con il suo prolungamento). La **mediana** relativa a un lato è il segmento che congiunge il punto medio del lato con il vertice opposto.

L'**asse** di un lato è quel segmento che ha un estremo nel punto medio del lato e forme con esso un angolo retto

Il punto di incontro delle bisettrici è chiamato **incentro**. Il punto di incontro delle altezze è chiamato **ortocentro**. Il punto di incontro delle mediane è chiamato **baricentro**. Il punto di incontro degli assi è chiamato **circocentro**.

Figura 7.4: Baricentro di un triangolo

Figura 7.5: Ortocentro di un triangolo

I triangoli possono essere classificati rispetto ai lati:
· **scaleno** (nessun lato congruente);
· **isoscele** (2 lati congruenti);
· **equilatero** (tutti i lati congruenti).

I triangoli possono essere classificati rispetto anche rispetto agli angoli:
· **acutangolo** (3 angoli acuti);
· **rettangolo** (un angolo retto);
· **ottusangolo** (un angolo ottuso).

Proprietà:
· La somma degli angoli di un triangolo è un angolo piatto (la somma degli angoli interni di un poligono di n lati è $(n-2)$ angoli piatti).
· **Disuguaglianza triangolare**: In un triangolo, la somma di due lati è sempre maggiore del terzo lato.

7.5 Rette perpendicolari e parallele

Due rette del piano si dicono **incidenti** se hanno un solo punto in comune. Se due rette incidenti formano un angolo retto sono dette **perpendicolari**, altrimenti **oblique**.

La **proiezione di un segmento** AB su una retta è il segmento che ha per estremi le intersezioni della retta con le perpendicolari passanti per quei punti.

La **distanza di un punto da una retta** è la lunghezza del segmento perpendicolare alla retta passante per il punto.

Due rette, del piano, sono **parallele** se non hanno punti in comune o se coincidono.

7.6 Quadrilateri

Un poligono con 4 lati è un **quadrilatero**.
Un quadrilatero con i lati a 2 a 2 paralleli è un **parallelogramma**.
Un **rettangolo** è un parallelogramma con gli angoli congruenti (retti).
Un **rombo** è un parallelogramma con i lati congruenti.
Un **quadrato** è un parallelogramma con lati e angoli congruenti.
Un quadrilatero con 2 soli lati paralleli è un **trapezio**. Il lato parallelo più corto è detto **base minore** e l'altro **base maggiore**, gli altri due lati sono detti **lati obliqui**.
Un trapezio con i 2 lati obliqui congruenti è detto **trapezio isoscele**.
Un trapezio con un lato obliquo perpendicolare alla base è detto **trapezio rettangolo**.

7.7 Poligoni inscritti e circoscritti

Un **luogo geometrico** è l'insieme di tutti e soli i punti del piano che soddisfano certe condizioni specifiche.
L'asse del segmento è il luogo dei punti equidistanti dal segmento.

La **circonferenza** è il luogo dei punti che hanno distanza assegnata (**raggio**) da un punto assegnato (**centro**). Il **cerchio** è la figura formata dalla circonferenza e dai suoi punti interni. Il cerchio può essere anche visto come un poligono con infiniti lati. Un **diametro** è un segmento che congiunge due

punti della circonferenza e passa per il centro.
Una retta che interseca la circonferenza in 2 punti è detta **secante**, in un solo punto **tangente**, in nessun punto **esterna**.

Un poligono è **inscritto** in una circonferenza (o equivalentemente una circonferenza è circoscritta ad un poligono) quando tutti i vertici del poligono appartengono alla circonferenza. Il centro di tale circonferenza è il punto d'incontro degli assi dei lati del poligono (circocentro). Un poligono è **circoscritto** ad una circonferenza (o equivalentemente una circonferenza è inscritta in un poligono) quando tutti i lati del poligono sono tangenti alla circonferenza. Il centro di tale circonferenza è l'intersezione delle bisettrici degli angoli del poligono (incentro).

Figura 7.6: Incentro di un triangolo

Figura 7.7: Circocentro di un triangolo

Capitolo 8

Il Piano Cartesiano

Dato un punto A su una retta, il numero reale x_A a esso associato è detto **ascissa** del punto.
Dati due punti A e B, la distanza fra A e B è $\overline{AB} = |x_B - x_A|$.
L'ascissa del punto medio di AB è $x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$.

Il piano cartesiano è diviso dai due assi in 4 angoli retti chiamati quadranti. Ogni punto del piano cartesiano è individuato da una coppia ordinata di numeri reali $(a; b)$ chiamate **coordinate**. La prima coordinata si chiama **ascissa** e la seconda **ordinata**. L'origine O ha coordinate $(0; 0)$.

La **distanza tra due punti** $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ è data da:
$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

Il **punto medio** del segmento AB è $M(x_M; y_M)$ con:
$x_M = \frac{x_A+x_B}{2}$ e $y_M = \frac{y_A+y_B}{2}$

8.1 La Retta nel piano cartesiano

Una **retta passante per l'origine**, purchè diversa dall'asse y, ha equazione $y = mx$, mentre l'asse y ha equazione $x = 0$.

Il numero m dell'equazione è chiamato **coefficiente angolare**, in particolare:
· se $m = 0$ otteniamo $y = 0$ (asse x);
· se $m = 1$ otteniamo $y = x$ (bisettrice del I e III quadrante);
· se $m = -1$ otteniamo $y = -x$ (bisettrice del II e IV quadrante).

L'equazione generale di una retta è del tipo: $ax + by + c = 0$ (forma implicita). Se un punto appartiene ad una retta le sue coordinate soddisfano l'equazione della retta.

Se una retta non è parallela all'asse y l'equazione può essere scritta nella forma: $y = mx + q$ (forma esplicita), in cui m è il coefficiente angolare e q il termine noto (i.e. l'ordinata del punto sulla retta che ha ascissa uguale a 0). Se una retta è parallela all'asse y ha un'equazione del tipo $x = k$.

Casi particolari:
· se $q = 0 \rightarrow y = mx$ (retta passante per l'origine);
· se $m = 0 \rightarrow y = q$ (retta parallela all'asse x);
· se $q = 0$ e $m = 0 \rightarrow y = mx$ (asse x).

Se $P(x_1; y_1)$ e $Q(x_2; y_2)$ sono punti distinti di una retta allora il **coefficiente angolare** è dato da: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Il coefficiente angolare m è negativo se la retta forma una angolo ottuso con l'asse x, m è positivo se la retta forma una angolo acuto con l'asse x, se $m = 0$ la retta è parallela all'asse x. Se m non esiste la retta forma un angolo retto con l'asse x (retta parallela ad y).

Due rette (non parallele a y) sono fra loro:
· parallele quando hanno uguale coefficiente angolare;
· perpendicolari quando il prodotto dei coefficienti angolari è -1.

Sia data una retta $r : y = mx + q$,
chiamiamo **fascio improprio** di rette parallele a r tutte le rette del tipo

$y = mx + \overline{q}$, con $\overline{q} \in \mathbb{R}$.

L'insieme di tutte le rette che passano per uno stesso punto $P(x_1; y_1)$ si chiama **fascio proprio** di rette e ognuna ha equazione del tipo:

$y - y_1 = m(x - x_1)$, con $m \in \mathbb{R}$.

P è il centro del fascio.

L'equazione della retta passante per due punti $P(x_1; y_1)$ e $Q(x_2; y_2)$ è:

$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

La distanza di un punto $P(x_0; y_0)$ **da una retta** r di equazione $ax + by + c = 0$ è data da:

$d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

8.2 La Circonferenza nel piano cartesiano

La **circonferenza** è il luogo dei punti del piano la cui distanza (raggio), da un fissato punto del piano (centro), è fissa.
Sia $C(x_0; y_0)$ è il centro e r il raggio allora la circonferenza ha equazione:

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$

Se il centro è l'origine: $x^2 + y^2 = r^2$.

L'equazione si può presentare anche nella forma:
$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$, con $\alpha = -2x_0, \beta = -2y_0, \gamma = x_0^2 + y_0^2 - r^2$

detta **forma normale o canonica**.

Si ha che il centro è dato da: $C\left(-\frac{\alpha}{2};-\frac{\beta}{2}\right)$
e il raggio è dato da: $r=\sqrt{\left(-\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(-\frac{\beta}{2}\right)^2-\gamma}$

8.3 L'Ellisse nel piano cartesiano

L'**ellisse** è il luogo dei punti del piano per cui è costante la somma delle distanze da due punti del piano detti **fuochi**.
La somma delle 2 distanze è indicata come $2a$, la distanza tra i due fuochi è chiamata **distanza focale** e indicata come $2c$.
La retta che contiene i due fuochi è detto asse maggiore dell'ellissi, mentre quella perpendicolare passante per il punto medio dei fuochi è detto asse minore. I punti di intersezione dell'ellisse con queste rette sono detti vertici dell'ellisse. L'intersezione dei due assi è detta centro dell'ellissi. I segmenti che congiungono i vertici al centro sono detti semiassi (sono 2 coppie di congruenza).
Sia $O'(x_0;y_0)$ è il centro a,b le lunghezze dei semiassi e gli assi paralleli agli assi cartesiani, allora l'ellissi ha equazione:

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$
Se il centro è l'origine: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

L'equazione si può presentare anche nella forma:
$mx^2+ny^2+px+qy+r=0$,
con $m=b^2,n=a^2,p=-2x_0b^2,q=-2y_0a^2,r=x_0^2b^2+y_0^2a^2-a^2b^2$
detta **forma normale o canonica**.

Si ha che il centro è dato da: $O'\left(-\frac{p}{2m};-\frac{q}{2n}\right)$

8.4 La Parabola nel piano cartesiano

La **parabola** è il luogo dei punti equidistanti da una retta fissa d (direttrice) e da un punto fisso F (fuoco).
La retta perpendicolare a d passante per F è detto asse di simmetria, il punto equidistante a d e F sull'asse di simmetria si chiama vertice V.

Parabola con asse parallelo a y: $y = ax^2 + bx + c$
$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$, l'asse è $x = -\frac{b}{2a}$, $F\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{1-b^2+4ac}{4a}\right)$, $d : y = -\frac{1+b^2-4ac}{4a}$.

Similmente per l'asse parallelo a x scambiando x e y e le prime e le seconde coordinate.

8.5 L'Iperbole nel piano cartesiano

L'**iperbole** è il luogo dei punti per cui è costante la differenza delle distanze da due punti detti fuochi.
L'equazione di un' iperbole può presentarsi nella forma: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ che comunque non è l'unico caso.

Osservazione 8.1. Circonferenza, ellisse, parabola, iperbole vengono chiamate coniche perché si ottengono come sezione da un cono a doppia falda: ovvero per ottenerle bisogna intersecare un cono con un piano: