24/10/2018

FUNZIONI CONTINUE

Definizione. Sia $f(x)$ definita in $[a,b]$ e sia $c \in]a,b[$. La funzione $f(x)$ si dice **continua in c** se $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

1) $f(x)$ è definita in c
2) $\exists \lim_{x \to c} f(x)$
3) Tale limite coincide con $f(c)$.

Definizione. $f(x)$ è continua in $I \subseteq \mathbb{R}$ se è continua in ogni punto di I.

① $f(x)=k$ è continua in $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c) \iff \lim_{x\to c} k = k$$

$$|k-k|<\varepsilon \qquad 0<\varepsilon \qquad S=\mathbb{R}$$

c

② $f(x)=x$ è continua in $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to c} f(x)=f(c) \iff \lim_{x\to c} x = c$$

$$|x-c|<\varepsilon \iff -\varepsilon < x-c < \varepsilon$$

$$c-\varepsilon < x < c+\varepsilon$$

$c-\varepsilon$ $\quad c \quad$ $c+\varepsilon$

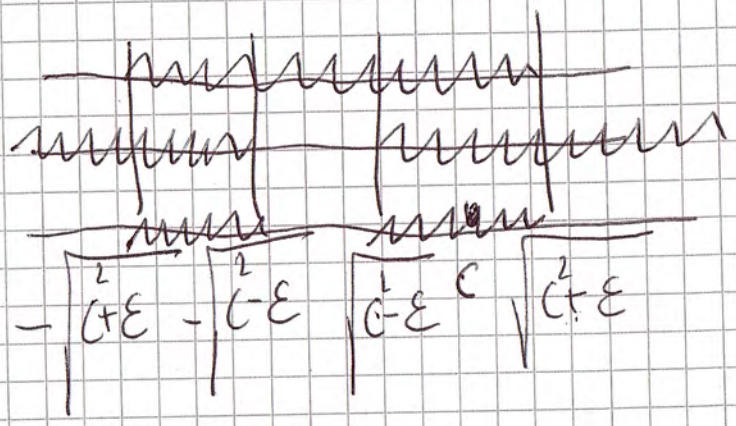
(3) $f(x) = x^2$ è continua in $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) \iff \lim_{x \to c} x^2 = c^2 \qquad (c \neq 0)$$

$$|x^2 - c^2| < \varepsilon$$

$$\begin{cases} x^2 - c^2 < \varepsilon \\ x^2 - c^2 > -\varepsilon \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 < c^2 + \varepsilon \\ x^2 > c^2 - \varepsilon \end{cases} \quad \varepsilon < c^2$$

$$\begin{cases} -\sqrt{c^2+\varepsilon} < x < \sqrt{c^2+\varepsilon} \\ x > \sqrt{c^2-\varepsilon} \ \vee \ x < -\sqrt{c^2-\varepsilon} \end{cases}$$



$(c > 0)$

$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0 \qquad |x^2 - 0| < \varepsilon \qquad x^2 < \varepsilon \qquad -\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon}$$

$f(x)$, $g(x)$ $\quad (f+g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)+g(x) \quad (f-g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)-g(x)$

$(fg)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x)g(x) \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{f(x)}{g(x)} \quad g(x)\neq 0$

Teorema. Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue in c, allora $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$ sono continue in c (se $g(c)\neq 0$)

Hp. $f(x)$ e $g(x)$ continue in c $\Rightarrow$ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ (= l) e $\lim_{x\to c} g(x) = g(c)$ (= m).

Ter. $(f+g)(x)$ è continua in c $\Rightarrow$ $\lim_{x\to c}(f+g)(x) = (f+g)(c) \iff \lim_{x\to c} f(x)+g(x) = f(c)+g(c)$

vero perché il limite di una somma è la somma dei limiti

$f(x) = x^2 = x \cdot x$ è continua perché prodotto di f.c.

$f(x) = x^3 = x^2 \cdot x$ è " " " "

$f(x) = x^n$ è continua $\forall n \in \mathbb{N}$

$f(x) = 2x$ è continua " " " "

$f(x) = ax^n$ $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ $n \in \mathbb{N}$ " " "

$f(x) = 3x^3 - 4x^2 + \frac{11}{2}x - 2$ è una f.c. perché somma di f.c.

TEOREMA. I polinomi sono f.c. in $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \frac{P(x)}{H(x)} \qquad P(x), H(x) \text{ polinomi}$$

è continua in $\mathbb{R} \setminus \{\text{zeri di } H(x)\}$

(1) $f(x) = a^x$ è continua in $\mathbb{R} \iff \lim_{x \to c} a^x = a^c$

(2) $f(x) = \log_a x$ è continua in $\mathbb{R}^+ \iff \lim_{x \to c} \log_a x = \log_a c$ $\quad (c > 0)$

(3) $f(x) = \sqrt{x}$ è continua in $\mathbb{R}^+_0 \setminus \{0\} \iff \lim_{x \to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$ $\quad c \geq 0$

PUNTI DI DISCONTINUITÀ

(1) c è punto di discontinuità di 1ª specie se

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = l \qquad \lim_{x \to c^-} f(x) = m \qquad l \neq m$$

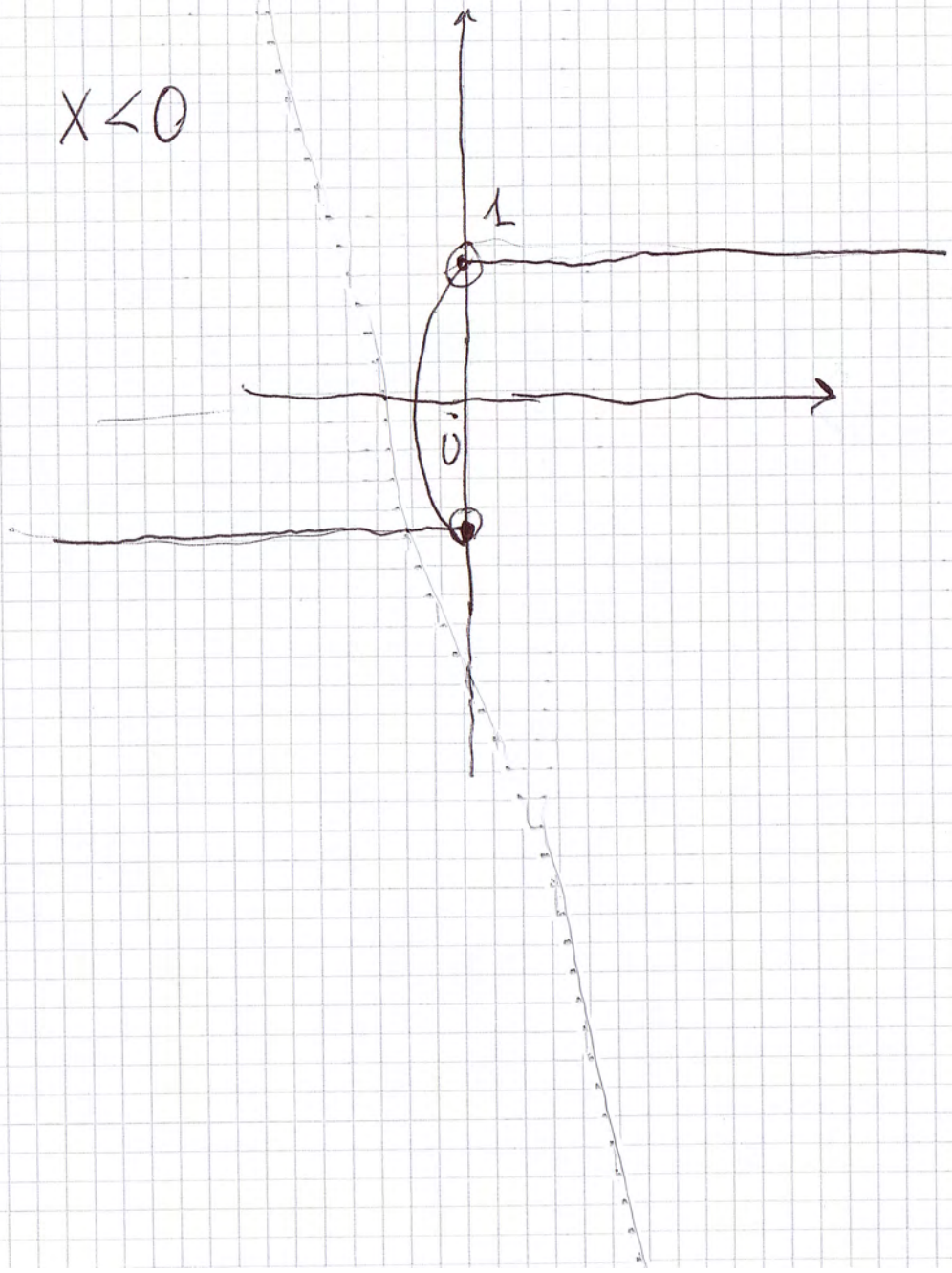
e $l - m$ salto della funzione in c

$$f(x) = \frac{|x|}{x} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1 \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \to 0^-} |-1| = -1 \end{cases}$$

salto = 2

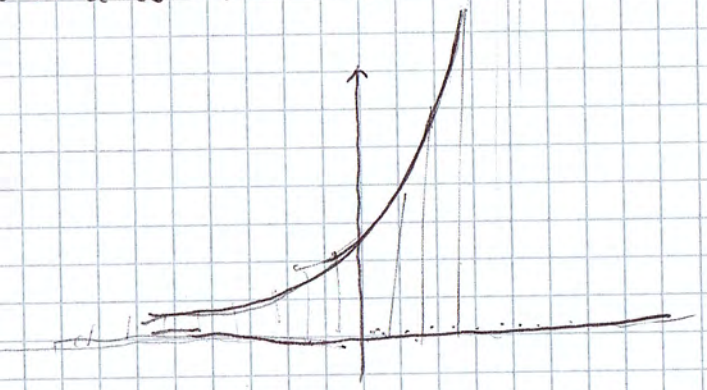
$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



(2) c è un punto di discontinuità di 2ª specie per $f(x)$ se

$\lim_{x \to c^+} f(x)$ o ~~il limite destro~~ $\lim_{x \to c^-} f(x)$ o non esistono o sono ∞

$f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ $\quad D = \mathbb{R} - \{0\}$



$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2^{\left(\frac{1}{x}\right) \to -\infty} = 0$

$\lim_{x \to 0^+} 2^{\left(\frac{1}{x}\right) \to +\infty} = +\infty$

(3) c è un punto di discontinuità di 3ª specie (eliminabile) per $f(x)$ se

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = \ell \quad \left(\Leftrightarrow \lim_{x\to c} f(x) = \ell\right)$$

ma o $f(x)$ in c non esiste oppure $f(c) \neq \ell$.

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \qquad D = \mathbb{R}\setminus\{1\} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} \qquad x+1$$

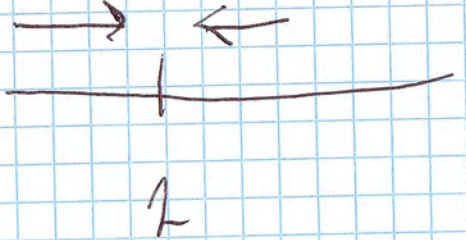
$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \\ \text{mais} & \\ \text{ensemble} & 2 \end{cases}$$

$$x \neq 1$$

$$\Rightarrow x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-1} \qquad D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$$



$$\lim_{x \to -1} \frac{|x-1|}{x^2-1} = \left(\frac{2}{0}\right) = \infty \qquad 2^a \text{ specie}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x^2-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{-(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \left(\frac{-1}{2}\right) \qquad 1^a \text{ specie}$$

salto = 1