

Soluzioni degli esercizi di
Matematica e Statistica

Terza edizione

Marco Abate

25 giugno 2017

Indice

Capitolo 1. Aritmetica	1
Numeri e unità di misura	1
Operazioni	2
Notazione scientifica e ordini di grandezza	2
Approssimazioni	3
Uguaglianze e disuguaglianze	3
Propagazione degli errori	4
Percentuali	4
Teoria intuitiva degli insiemi	6
Logica elementare	6
Capitolo 2. Rappresentazioni dei dati	9
Funzioni	9
Funzioni iniettive, surgettive, bigettive	9
Composizione e grafici	10
Coordinate cartesiane	11
Equazioni e disequazioni	12
Diagrammi cartesiani	14
Istogrammi	15
Capitolo 3. Geometria analitica	17
Vettori applicati	17
Lunghezze e angoli	17
Piani	18
Rette	19
Capitolo 4. Algebra lineare	21
Sistemi lineari triangolari superiori	21
Basi e dimensione	21
La riduzione a scala	22
Operazioni sulle matrici	26
Determinanti	30
Autovalori e autovettori	31
Capitolo 5. Bestiario, I: funzioni algebriche	33
Funzioni lineari	33
Programmazione lineare	36
Funzioni quadratiche	36
Funzioni polinomiali	42
Funzioni potenza	42

Funzioni razionali	43
Limiti e continuità	45
Capitolo 6. Bestiario, II: funzioni trascendenti	47
Funzioni esponenziali	47
Funzioni logistiche	47
Funzioni logaritmiche	48
Funzioni trigonometriche	49
Funzioni sinusoidali	51
Successioni e serie	51
Capitolo 7. Calcolo differenziale	55
Derivate	55
Calcolo di derivate: funzioni algebriche	55
Calcolo di derivate: funzioni trascendenti	56
Massimi e minimi	58
Studio qualitativo di funzioni	59
La regola di de l'Hôpital	72
Sviluppo di Taylor	73
Propagazione degli errori	74
Il metodo di Newton-Raphson-Wallis	74
Derivate parziali	74
Capitolo 8. Calcolo integrale	77
Definizione di integrale	77
Proprietà dell'integrale	77
Integrale indefinito	78
Integrazione per parti	79
Integrazione per sostituzione	80
Integrali impropri	80
Media integrale	81
Capitolo 9. Equazioni differenziali	83
Introduzione	83
L'equazione $y' = ay + b$	85
Separazione delle variabili	85
Sistemi lineari di equazioni	87
L'equazione $y'' = ay' + by + c$	88
Capitolo 10. Probabilità discreta	91
Eventi	91
Distribuzioni di probabilità	92
Frequenze relative	92
Assiomi della probabilità	93
Eventi indipendenti	93
La legge di Hardy-Weinberg	93
Probabilità condizionata	93
Test diagnostici	95
Calcolo combinatorio	95
Distribuzione binomiale	97

Capitolo 11. Statistica	99
Media, mediana e moda	99
Varianza	99
Il metodo dei minimi quadrati	100
Tecniche di interpolazione	100
Capitolo 12. Probabilità continua	103
Variabili aleatorie	103
Valore atteso e varianza di variabili aleatorie discrete	104
Distribuzione di Poisson	105
Variabili aleatorie continue	106
Funzione di distribuzione	108
Distribuzione uniforme	110
Distribuzione esponenziale	110
Distribuzione normale	111
Campioni e popolazione	111
Test d'ipotesi	111
Test Z	111
Test T di Student	112
Test F di analisi della varianza (ANOVA)	112
Test χ^2	112

CAPITOLO 1

Aritmetica

Numeri e unità di misura

Esercizio 1.1 (a), (b), (c), (e), (f).

Esercizio 1.2 $-\frac{7}{3} < -0.5 < (-2)^{-4} < \frac{3}{5} < \sqrt{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$.

Esercizio 1.3

(a) 63 libbre = 63/2.2 kg;

(b) 2.5 kg = 5.5 libbre.

Esercizio 1.4

(a) Celsius=Kelvin−273.16

(b) Kelvin=Celsius+273.16

(c) Kelvin= 5/9·Fahrenheit+255.382

(d) Fahrenheit= 9/5·Kelvin−459.688

Esercizio 1.5

(a) 337.16 Kelvin

(b) 104 Fahrenheit

(c) -173.16 Celsius

(d) -459.688 Fahrenheit

(e) 288.16 Kelvin

(f) -35 Celsius

Esercizio 1.6

Supponiamo che la radice quadrata di n sia data dal numero razionale ridotto ai minimi termini p/q ; questo vuol dire che $n = p^2/q^2$, cioè $q^2n = p^2$. Scriviamo ora la decomposizione in fattori primi di p e q : $p = p_1^{a_1} \cdots p_h^{a_h}$ e $q = q_1^{b_1} \cdots q_k^{b_k}$, dove $p_1, \dots, p_h$ e $q_1, \dots, q_k$ sono numeri primi e $a_1, \dots, a_h$ e $b_1, \dots, b_k$ sono numeri naturali. Inoltre, siccome la frazione p/q è ridotta ai minimi termini, tutti i p_i sono diversi da tutti i q_j . L'uguaglianza $q^2n = p^2$ diventa

$$q_1^{2b_1} \cdots q_k^{2b_k} n = p_1^{2a_1} \cdots p_h^{2a_h}.$$

Siccome la decomposizione in fattori primi di un numero è unica, nei due membri di questa uguaglianza con esponente diverso da zero devono apparire esattamente gli stessi numeri primi. Ma nessuno dei q_j compare nel membro destro; quindi gli esponenti dei q_j devono essere tutti uguali a zero, cioè $b_1 = \cdots = b_k = 0$ e $q = 1$. Ma allora $n = p^2$, per cui n è effettivamente il quadrato di un numero naturale.

Operazioni

Esercizio 1.7

- (a) 7^2 ;
- (b) $3^{-3/4}$
- (c) 1;
- (d) 3^4 ;
- (e) $2^{-7/4}$;
- (f) $6^{5/6}$;
- (g) $2^{-19/4}$.

Esercizio 1.8

- (a) $\frac{b+a}{ab}$;
- (b) $\frac{ab-a}{b^2}$;
- (c) $\frac{-2a-4b}{a^2-b^2}$;
- (d) $\frac{b+2a}{ab(a+b)}$.

Esercizio 1.9 Applicando 2 volte la proprietà distributiva otteniamo $(a^2 - ab) - (b^2 + ba)$. Applicando la proprietà commutativa della somma e quella del prodotto otteniamo poi $(a^2 - ab) + (ab - b^2)$. Infine, applicando la proprietà associativa otteniamo $(a^2 - ab) + (ab - b^2)$.

Esercizio 1.10 Per la proprietà commutativa del prodotto $by \cdot b^3 = yb \cdot b^3$ e per la proprietà associativa del prodotto $yb \cdot b^3 = yb^4$.

Consideriamo ora l'espressione $x(3 - y) - y(3 - x)$. Per la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma diventa $x3 + x(-y) - y3 + (-y)(-x)$. Per le proprietà commutative del prodotto quest'ultima diventa $3x - xy - 3y + (-x)(-y)$. Le proprietà associative e commutative del prodotto ci dicono che $(-x)(-y) = (-1)x(-1)y = (-1)^2xy = xy$; quindi la nostra espressione diventa $3x - xy - 3y + xy$. Applicando la proprietà commutativa della somma otteniamo poi $3x - 3y$; infine per la proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto concludiamo $3(x - y)$.

Esercizio 1.11 $R_1 = \frac{RR_2}{R_2 - R}$.

Esercizio 1.12 Il secondo cono ha altezza uguale a $h/20$, dove h è l'altezza del primo cono.

Notazione scientifica e ordini di grandezza

Esercizio 1.13 La 4, cioè $10^{-3} < c < 10^{-2}$.

Esercizio 1.14 $2.23 \cdot 10^{-27}$ g.

Esercizio 1.15 2985.

Esercizio 1.16 47250.

Esercizio 1.17 80.

Esercizio 1.18 Supponiamo che la superficie con capelli sia un rettangolo di 12 cm per 25 cm, e di disporre i capelli in maniera regolare. Siccome $1 \mu\text{m} = 10^{-4}$ cm, e accanto

a ogni capello ci dev'essere uno spazio di un capello, su una riga di 12 cm ci stanno $12/(2 \cdot 50 \cdot 10^{-4}) = 12 \cdot 10^2$ capelli. Analogamente, una colonna di 25 cm contiene $25/(2 \cdot 50 \cdot 10^{-4}) = 25 \cdot 10^2$ capelli; quindi in totale ci sono $(12 \cdot 10^2) \cdot (25 \cdot 10^2) = 3 \cdot 10^6$ capelli. Quindi in ogni gruppo di esseri umani comprendente più di 3 milioni di persone ce ne devono essere almeno due con lo stesso numero di capelli. In particolare, questo vale per il mondo e per l'Italia; per la tua regione o la tua città dipende da se ha più o meno di 3 milioni di abitanti.

Esercizio 1.19 1000.

Esercizio 1.20 18.73 m.

Esercizio 1.21 La massa totale dell'atmosfera è di $5.1 \cdot 10^{18}$ kg, mentre quella dell'ossigeno in essa è di $1.122 \cdot 10^{18}$ kg.

Esercizio 1.22 124666. $\bar{6}$ anni.

Esercizio 1.23 $1.6 \cdot 10^4$ l.

Esercizio 1.24 $191.\bar{1} \cdot 10^6$.

Approssimazioni

Esercizio 1.25

- (a) Falso;
- (b) Vero;
- (c) Vero;
- (d) Vero.

Esercizio 1.26 $b = 14$.

Esercizio 1.27

Prima classe: $s \in [3, 3.2]$; $3 \leq s \leq 3.2$; $v \pm e = 3.1 \pm 0.1$.

Seconda classe: $s \in (3.2, 3.5]$; $3.2 < s \leq 3.5$; $v \pm e = 3.35 \pm 0.15$.

Terza classe: $s \in (3.5, 3.9]$; $3.5 < s \leq 3.9$; $v \pm e = 3.7 \pm 0.2$.

Esercizio 1.28

$0.1237 \simeq 0.1, 0.12, 0.124$.

$11.4563 \simeq 11.5, 11.46, 11.456$.

$-12.66666 \simeq -12.7, -12.67, -12.667$.

$0.123456 \simeq 0.1, 0.12, 0.123$.

$151.151151 \simeq 151.2, 151.15, 151.151$.

Esercizio 1.29

[Errata: nel testo di questo esercizio l'ultima percentuale dev'essere 66.6%.] Rispettivamente 10%, 11%, 12%, 67%.

Uguaglianze e disuguaglianze

Esercizio 1.30

$$(a) (3a + 5)2 = \frac{1}{2}(a + \frac{a}{2}) \implies a = -\frac{40}{21};$$

$$(b) \frac{2b+6}{3} = 2(b^2 + \frac{b}{3}) \implies b = \pm 1;$$

$$(c) \frac{4c-3}{2} = 2(c + \frac{c}{3}) \implies c = -\frac{9}{4};$$

$$(d) \frac{4d+3}{3} = 3(d + \frac{d}{2}) \implies d = \frac{6}{19}.$$

Esercizio 1.31

- (a) $x = 0$ oppure $x = 4$;
 (b) $x = 0$ oppure $x = \sqrt{5}$ oppure $x = -\sqrt{5}$;
 (c) $x = 0$ oppure $x = c$ oppure $x = -c$.

Esercizio 1.32 $2 < x < 5$.

Esercizio 1.33 $a = 2, b = -1$.

Esercizio 1.34 $-0.1 < y - x < 2.1$.

Esercizio 1.35 $x > 4$.

Esercizio 1.36

- (a) Non sempre (dipende dal segno di a e b).
 (b) Sì.

Esercizio 1.37 Il ragionamento è corretto fino a quando si ottiene l'uguaglianza $a(b - a) = (b + a)(b - a)$, ma a questo punto non possiamo semplificare dividendo ambo i membri per $b - a$, dato che $b - a = 0$ per ipotesi.

Propagazione degli errori

Esercizio 1.38 $xy = 1001 \pm 110 \simeq 1000 \pm 110$; $\frac{x}{y} = \frac{91}{9} \pm \frac{10}{9} \simeq 10 \pm \frac{11}{10}$.

Esercizio 1.39 210 ± 30 .

Esercizio 1.40 $xy = 811 \pm 99$; $\frac{x}{y} = \frac{811}{80} \pm \frac{99}{80}$.

Esercizio 1.41 $xy = 100.04 \pm 4 \simeq 100 \pm 4$; $\frac{x}{y} = 1.0008 \pm 0.040016 \simeq 1 \pm 0.04$.

Esercizio 1.42 $xy = 8.1 \pm 1.8$.

Esercizio 1.43 $2001 \pm 120 \simeq 2000 \pm 120$.

Esercizio 1.44 $(16.168 \pm 2.8832) \cdot 10^{-21} \simeq (16 \pm 2.88) \cdot 10^{-21}$; l'errore relativo è circa 0.178.

Esercizio 1.45 Il valore stimato è circa 5 h, mentre l'errore assoluto è circa 0.75 h (il valore stimato preciso è $\frac{335}{66}$ h e l'errore assoluto preciso è $\frac{25}{33}$ h).

Esercizio 1.46 Il valore stimato è circa 2985.6688, mentre l'errore assoluto è circa 452.64.

Esercizio 1.47 È compreso tra $4.46 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3$ e $6.23 \cdot 10^{-12} \text{ m}^3$.

Percentuali

Esercizio 1.48 0.8%.

Esercizio 1.49 56%.

Esercizio 1.50 È indifferente.

Esercizio 1.51 È diminuito dell'1%.

Esercizio 1.52 In quello sotto casa.

Esercizio 1.53 -0.3%.

Esercizio 1.54 -0.327%.

Esercizio 1.55 Nell'Esercizio 1.53 l'abbassamento di popolazione è dell'1.8% rispetto alla popolazione iniziale, mentre nell'Esercizio 1.54 l'abbassamento del prezzo è dell'1.8% rispetto al prezzo iniziale aumentato del 1.5%.

Esercizio 1.56 I prezzi sono aumentati del 21% rispetto al prezzo di prima di lunedì, e devono essere abbassati del $\frac{2100}{121} \simeq 17.36\%$ sul loro valore di venerdì per tornare al valore originale.

Esercizio 1.57 Nel secondo, perché il primo ha applicato lo sconto percentuale a un prezzo più basso.

Esercizio 1.58 1900 euro.

Esercizio 1.59 85.7 g.

Esercizio 1.60

- (a) 700 kg.
- (b) 25%.
- (c) Tra 190 kg e 210 kg.
- (d) 25.5%.

Esercizio 1.61

- (a) 1500.
- (b) Il 12.5% per la RR, il 62.5% per la VV.
- (c) 50%.
- (d) È diminuita.

Esercizio 1.62 Rispettivamente 5 e 7.

Esercizio 1.63

- (a) 37.5%.
- (b) Tra 76 m² e 84 m².
- (c) Di circa il 16.7%.
- (d) Il salotto diminuisce di circa il 44.3%, mentre la camera da letto di circa il 66.7%.

Esercizio 1.64 Nel 2019 l'alga coprirà 40.5 km², che corrispondono al 20.25% del lago. L'alga impiegherà poco meno di 7 anni a coprire tutta la superficie del lago.

Esercizio 1.65 Dopo n giorni l'intensità di radiazione sarà $I_0 \cdot (1 - 0.05)^n$, e pertanto si sarà dimezzata dopo $\log(0.5)/\log(0.95) \simeq 14$ giorni.

Esercizio 1.66 Circa il 10.2% hanno cancro alla prostata, il 6.1% hanno cancro al fegato ed il 83.7% non hanno malattie cancerogene.

Esercizio 1.67 2.4%.

Esercizio 1.68 $\simeq 0.01136\%$.

Esercizio 1.69 Può voler dire che il numero di diagnosi errate è passato dal 60% al 40%. Oppure può voler dire che il numero di diagnosi errate è passato dal 60% al $60 \cdot (1 - 0.2) = 48\%$.

Esercizio 1.70 Sta sbagliando: anche supponendo che il deficit sia rimasto costante, un aumento del PIL del 2% causa una diminuzione del rapporto deficit/PIL pari solo a circa 1.96%.

Teoria intuitiva degli insiemi**Esercizio 1.71** Vero.**Esercizio 1.72** $C \subset D$.**Esercizio 1.73** $F \subset E$.**Esercizio 1.74**

$$A \cap B = \{1, 3, 5, 7, 9\};$$

$$A \setminus B = \{0, 2, 4, 6, 8\};$$

$$\mathbb{N} \setminus B = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\};$$

$$\mathbb{N} \setminus (A \cap B) = \{0, 2, 4, 6, 8\} \cup \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 10\}.$$

Esercizio 1.75

$$A \times B = \{(1, 2), (5, 4), (6, 6), (7, 2), (1, 4), (5, 6), (6, 2), (7, 4), (1, 6), (5, 2), (6, 4), (7, 6)\}.$$

$$B \times A = \{(2, 1), (4, 5), (6, 6), (2, 7), (4, 1), (6, 5), (2, 6), (4, 7), (6, 1), (2, 5), (4, 6), (6, 7)\}.$$

Esercizio 1.76 591.**Esercizio 1.77** 12.

Esercizio 1.78 Se $x \in A \setminus B$, allora $x \in A$ e $x \in B^c$, quindi $x \in A \cap B^c$. Questo dimostra che $A \setminus B \subseteq A \cap B^c$. Ora, se $y \in A \cap B^c$, allora $y \in A$ ma non si ha $y \in B$, quindi $y \in A \setminus B$. Questo dimostra che inoltre $A \cap B^c \subseteq A \setminus B$; dunque $A \cap B^c = A \setminus B$.

Esercizio 1.79 Dapprima siccome $B \cup C$ contiene sia B sia C si ha $A \setminus (B \cup C) \subseteq A \setminus B$ e $A \setminus (B \cup C) \subseteq A \setminus C$, da cui $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Viceversa, se consideriamo un arbitrario $a \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, allora a appartiene a A ma non a B né a C , da cui $a \in A \setminus (B \cup C)$, e per l'arbitrarietà di a otteniamo $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$.

Analogamente, siccome $B \cap C$ è contenuto sia in B sia in C si ha $A \setminus B \subseteq A \setminus (B \cap C)$ e $A \setminus C \subseteq A \setminus (B \cap C)$, da cui $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cap C)$. Viceversa, se consideriamo un arbitrario $a \in A \setminus (B \cap C)$, allora a appartiene a A ma non contemporaneamente a B e C , ovvero $a \in A \setminus B$ oppure $a \in A \setminus C$, da cui $a \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, e per l'arbitrarietà di a otteniamo $A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Logica elementare**Esercizio 1.80** L'affermazione è vera. Esprime che ogni $x \in A$ è un numero pari.**Esercizio 1.81** L'affermazione è vera. Esprime che ogni multiplo di 10 è multiplo di 5.**Esercizio 1.82** Esiste un giovane che non ama le canzoni dei Beatles.**Esercizio 1.83** Tutti i bambini delle scuole materne non credono a Babbo Natale.**Esercizio 1.84** Se domani piove non è detto che dorma fino a tardi. Equivalentemente: può essere che domani piova e io non dorma fino a tardi.**Esercizio 1.85** Mostrargli un caso in cui qualche malato di cancro alla prostata mastica una foglia di ananas due volte al giorno ma non guarisce in un mese dal cancro.**Esercizio 1.86** Controbatti osservando che l'esempio di decine di persone guarite non costituisce una prova della sua affermazione. Chi ci dice che non esistano altri esempi (che lui non conosce) di persone non guarite pur avendo masticato foglie di ananas?

Esercizio 1.87 Determinare un meccanismo biologico che spieghi l'influenza delle foglie di betel sugli stimoli della fame.

Esercizio 1.88 (c), (d), (e).

Esercizio 1.89 (c).

Esercizio 1.90

(a) Falso

(b) Vero

(c) Per esempio $A = \{9\}$

(d) Per esempio $B = \mathbb{N}$

Esercizio 1.91 (b), (c).

Esercizio 1.92 (a), (c).

Esercizio 1.93 Sono vere (b), (c), (e) ed (f). La 1. è espressa dalla (b), e la 2. dalla (f).

Rappresentazioni dei dati

Funzioni

Esercizio 2.1 Dominio = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, Codominio = $\{\text{rosso, blu}\}$. Si tratta di una funzione in quanto a ogni elemento del dominio viene associato uno e un solo elemento del codominio.

Esercizio 2.2

- (a) Dominio = Insieme di persone, Codominio = $\{\text{destro, mancino, ambidestro}\}$.
- (b) No, perché alla stessa pressione sanguigna potrebbero essere associate diverse temperature corporee.
- (c) Il dominio è costituito dalle ore del giorno. Codominio = $\mathbb{R}^+$.
- (d) No, in quanto l'insieme dei pazienti in quell'ospedale potrebbe cambiare da un'ora all'altra, e quindi il codominio non è ben definito. (e) Il dominio è costituito dalle ore del giorno. Codominio = $\mathbb{R}^+$.
- (f) Dominio = $\mathbb{R}^+$, Codominio = $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.3 Dominio = $\mathbb{N}$, Immagine = $\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Esercizio 2.4 (a) è falso, e la funzione $f(x) = -x$ serve sia a dare un controesempio ad (a) sia a fornire l'esempio richiesto per (b).

Funzioni iniettive, surgettive, bigettive

Esercizio 2.5 È iniettivo per ogni $a \neq 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Per questi valori è anche surgettivo e bigettivo.

Esercizio 2.6 No, in quanto non è iniettiva.

Esercizio 2.7

- (a) Sì. Per esempio, scrivendo $A = \{x_1, \dots, x_m\}$ e $B = \{y_1, \dots, y_n\}$, la funzione $F: A \rightarrow B$ data da $f(x_i) = y_i$ per $i = 1, \dots, n$ e $f(x_i) = y_n$ per $i = n + 1, \dots, m$ è surgettiva.
- (b) No. Se $f: A \rightarrow B$ è iniettiva, elementi distinti di A devono essere mandati da f in elementi distinti di B ; ma allora l'immagine tramite f dei primi n elementi di A ha esaurito tutti gli elementi di B , e non c'è modo di definire l'immagine dei successivi elementi di A senza contraddire l'iniettività.

Esercizio 2.8 $I = [1, \infty)$.

Esercizio 2.9 Non sono iniettive f_2 ed f_5 , in quanto funzioni pari.

Composizione e grafici

Esercizio 2.10

- (a) $f \circ g(x) = 32x^6 - 60x^3 + 28$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; $g \circ f(x) = 4(2x^2 - 3x + 1)^3 - 3$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- (b) $f \circ g(x) = (x^2 - x + 2)^3 - 4$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; $g \circ f(x) = x^6 - 9x^3 + 22$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- (c) $f \circ g(x) = 9x^6 + 9x^2 - 18x^4 - 2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; $g \circ f(x) = 3x^4 - 15x^2 + 18$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- (d) $f \circ g(x) = g \circ f(x) = 1/x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (e) $f \circ g(x) = 1/(x^2 - 6x + 10)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; $g \circ f(x) = (-3x^2 - 2)/(x^2 + 1)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
- (f) $f \circ g(x) = 1/(x^2 + 2)^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; $g \circ f(x) = x^{-4} + 2$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (g) $f \circ g(x) = \sqrt{x/(x-1)}$ per ogni $x \in (-\infty, 0] \cup (1, \infty)$; $g \circ f(x) = \sqrt{x}/(\sqrt{x} - 1)$ per ogni $x \in [0, 1) \cup (1, \infty)$.

Esercizio 2.11 Si deduce che g è surgettiva, ma non che f lo sia. Considera l'esempio in cui $f: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ e $g: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0\}$ sono date da $f(x) = x$ per ogni $x \in \{0, 1\}$ e $g(y) = 0$ per ogni $y \in \{0, 1, 2\}$.

Esercizio 2.12 Si deduce che f è iniettiva, ma non che g lo sia. Considera l'esempio in cui $f: \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ e $g: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1\}$ sono date da $f(x) = x$ per ogni $x \in \{0, 1\}$ e

$$g(y) = \begin{cases} y & \text{se } y \in \{0, 1\}, \\ 0 & \text{se } y = 2. \end{cases}$$

Esercizio 2.13 Dai due esercizi precedenti, concludiamo solo che f è iniettiva e g è surgettiva. In particolare nell'esempio dell'esercizio precedente abbiamo $g \circ f$ bigettiva senza che né f né g lo siano.

Esercizio 2.14 Rappresentano un grafico di funzione (b), (d) ed (f). I restanti non rappresentano un grafico di funzione.

Esercizio 2.15 Γ è il grafico della funzione $f: A_1 \rightarrow B$ data da $f(a) = b_a$ per ogni $a \in A_1$, dove b_a è l'unico elemento di B tale che $(a, b_a) \in B$.

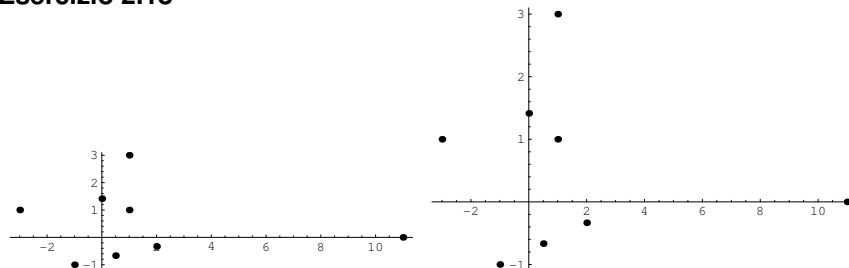
Esercizio 2.16

- (a) Dominio = $\mathbb{R}$, Immagine = $[0, \infty)$, non iniettiva.
- (b) Dominio = $[-2, 2]$, Immagine = $[0, 9/4]$, non iniettiva.
- (c) Dominio = $[-1, 0) \cup [1, \infty)$, Immagine = $(-\infty, 1)$, non iniettiva.
- (d) Dominio = $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, Immagine = $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, iniettiva.
- (e) Dominio = $\{1, 2, 3, 4\}$, Immagine = $\{b, c, d, e\}$, iniettiva.
- (f) Dominio = $\{1, 2, 3, 4\}$, Immagine = $\{a, b, c\}$, non iniettiva.

Esercizio 2.17 La relazione “mangiato/ucciso da” è data da $\{(erba, erbivori), (erba, onnivori), (erba, altre cause), (erbivori, onnivori), (erbivori, carnivori), (erbivori, altre cause), (onnivori, carnivori), (carnivori, onnivori), (onnivori, altre cause), (carnivori, altre cause)\}$.

Coordinate cartesiane

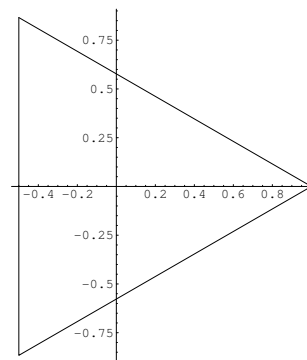
Esercizio 2.18



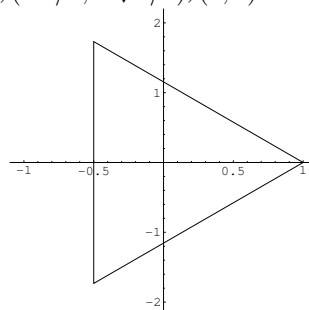
Esercizio 2.19 $(-1, -1)$ appartiene al III quadrante ed ai semipiani sinistro ed inferiore; $(0, \sqrt{2})$ appartiene al semipiano superiore; $(2, -1/3)$ appartiene al IV quadrante ed ai semipiani destro ed inferiore; $(1, 1)$ appartiene al I quadrante ed ai semipiani destro e superiore; $(1, 3)$ appartiene al I quadrante ed ai semipiani destro e superiore; $(-3, 1)$ appartiene al II quadrante ed ai semipiani sinistro e superiore; $(1/2, -2/3)$ appartiene al IV quadrante ed ai semipiani destro ed inferiore; $(11, 0)$ appartiene al semipiano destro.

Esercizio 2.20

	$(-1, -1)$	$(0, \sqrt{2})$	$(2, -1/3)$	$(1, 1)$	$(1, 3)$	$(-3, 1)$	$(1/2, -2/3)$	$(11, 0)$
$(-1, -1)$	0	$\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$	$\sqrt{85}/3$	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{85}/6$	$\sqrt{145}$
$(0, \sqrt{2})$		0	$\sqrt{55 + 6\sqrt{2}}/3$	$\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$	$\sqrt{12 - 6\sqrt{2}}$	$\sqrt{12 - 2\sqrt{2}}$	$\sqrt{97/36 + 4\sqrt{2}}/3$	$\sqrt{123}$
$(2, -1/3)$			0	$5/3$	$\sqrt{101}/3$	$\sqrt{241}/3$	$\sqrt{85}/6$	$\sqrt{730}/3$
$(1, 1)$				0	2	4	$\sqrt{109}/6$	$\sqrt{101}$
$(1, 3)$					0	$2\sqrt{5}$	$\sqrt{493}/6$	$\sqrt{109}$
$(-3, 1)$						0	$\sqrt{541}/6$	$\sqrt{197}$
$(1/2, -2/3)$							0	$\sqrt{3985}/6$
$(11, 0)$								0

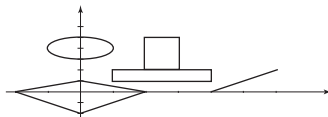


Esercizio 2.21 Vertici: $(-1/2, \sqrt{3}/2)$, $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$, $(1, 0)$.



Vertici: $(-1/2, \sqrt{3})$, $(-1/2, -\sqrt{3})$, $(1, 0)$.

Esercizio 2.22 Con un sistema di riferimento monometrico in cui ogni unità lungo gli assi corrisponde ad 1 cm, il triangolo può essere ottenuto scegliendo come vertici $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 3\sqrt{2})$.



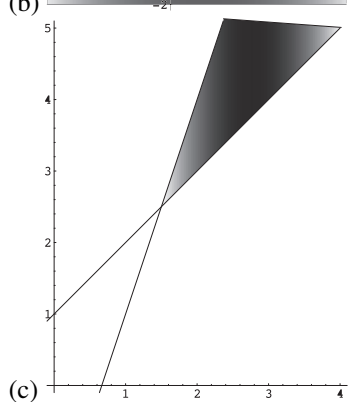
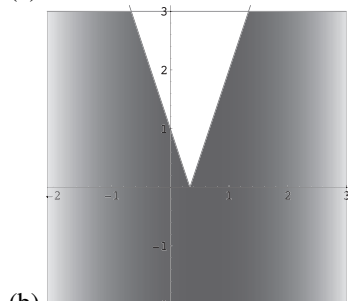
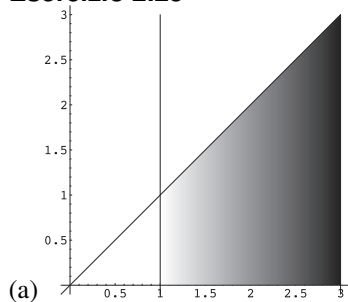
Esercizio 2.23

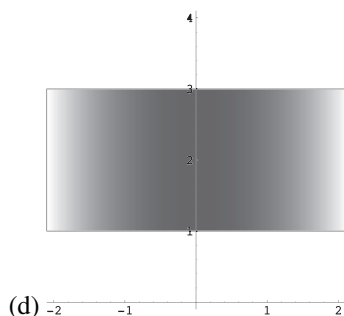
Equazioni e disequazioni

Esercizio 2.24

- Si traccia la retta $y = c$, e si determinano le $x \in I$ per cui $f(x)$ sta sopra tale retta.
- Si traccia la retta $y = c$, e si determinano le $x \in I$ per cui $f(x)$ sta sotto tale retta.
- Si tracciano le due curve $y = f(x)$ ed $y = g(x)$, e si determinano le $x \in I$ per cui la prima curva sta sotto la seconda.

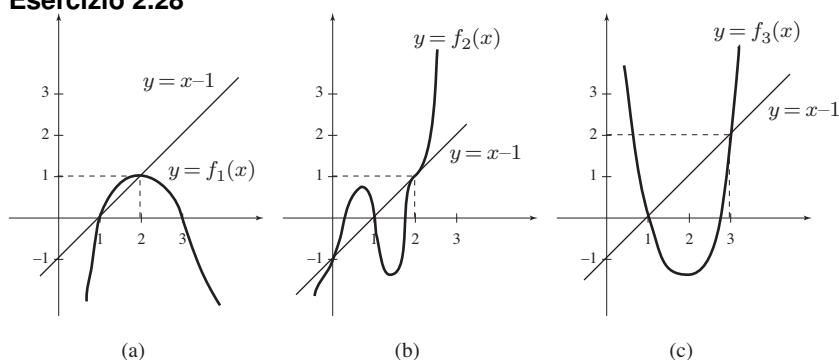
Esercizio 2.25



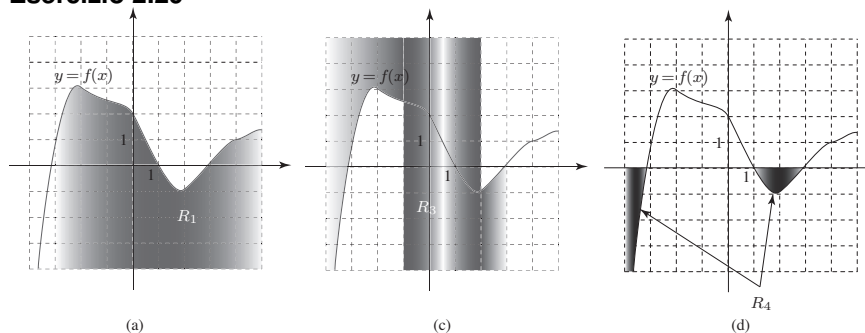
**Esercizio 2.26**

- (a) $0 < y < 4, -1 < x < 6$.
 (b) $y = 10, -10 < x \leq 4$.
 (c) $y \geq -1$.
 (d) Primo: $x \geq 0, y \geq 0$; secondo: $x \leq 0, y \geq 0$; terzo: $x \leq 0, y \leq 0$; quarto: $x \geq 0, y \leq 0$.
 (e) $x < 2$.
 (f) $-3 \leq x \leq 2$.

Esercizio 2.27 Per $k = -1$ non ci sono soluzioni, per $k \neq -1$ c'è un'unica soluzione.

Esercizio 2.28

$f_1(x) \geq x - 1$ per $x \in [1, 2]$. $f_2(x) \geq x - 1$ per $x \in [0, 1] \cup [2, +\infty)$. $f_3(x) \geq x - 1$ per $x \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$.

Esercizio 2.29

(b) L'insieme R_2 è vuoto.

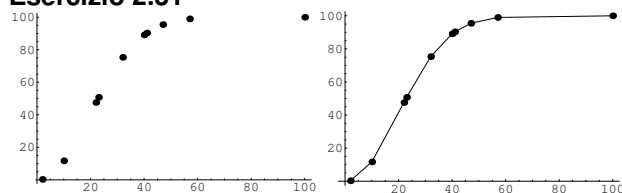
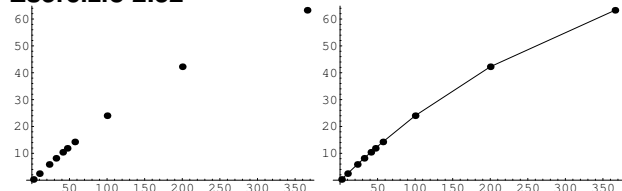
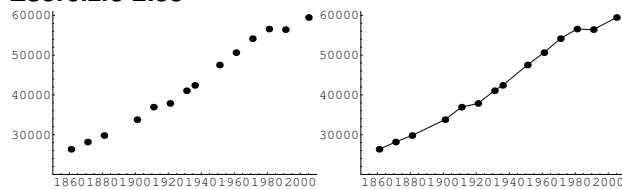
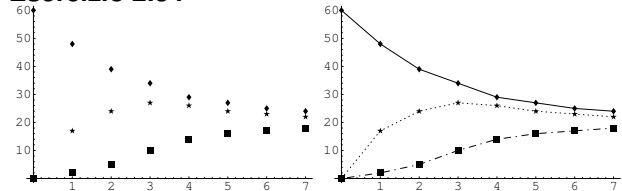
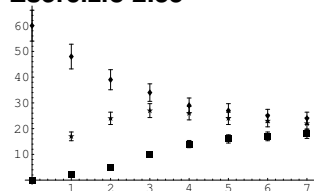
Esercizio 2.30

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x \leq -1, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

$$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 5, \max\{1, f(x)\} \leq y \leq 3\},$$

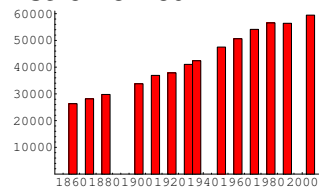
$$S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x \leq 3, f(x) \leq y \leq 0\},$$

$$S_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x \leq 5, -4 \leq y \leq f(x)\}.$$

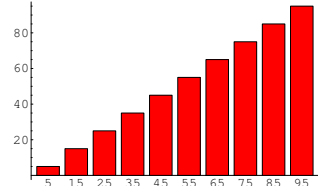
Diagrammi cartesiani**Esercizio 2.31****Esercizio 2.32****Esercizio 2.33****Esercizio 2.34****Esercizio 2.35**

Istogrammi

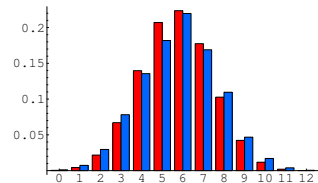
Esercizio 2.36



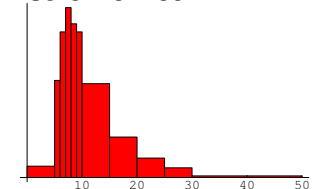
Esercizio 2.37



Esercizio 2.38



Esercizio 2.39

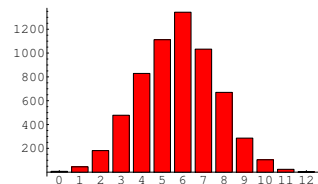


L'insetticida è più efficace a una concentrazione di 10–15 ppm.

Esercizio 2.40

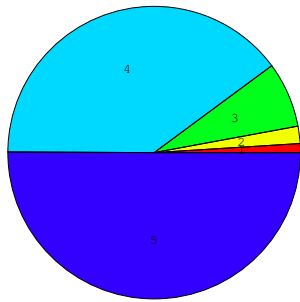
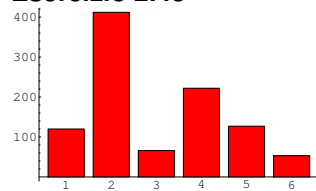
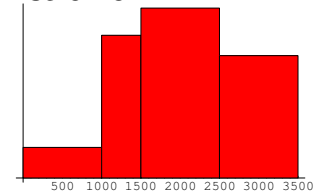
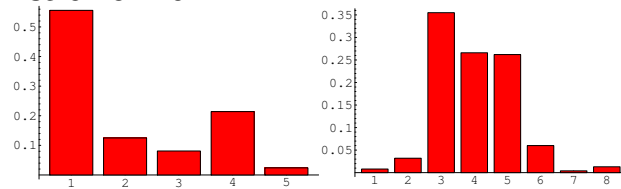
54.54%.

Esercizio 2.41



Simili.

Esercizio 2.42

**Esercizio 2.43****Esercizio 2.44****Esercizio 2.45**

Esercizio 2.46 Si è verificato un aumento progressivo della natalità fino al 1965, successivamente un calo progressivo fino al 1985, e quindi la natalità si è mantenuta pressoché costante sino al 2005.

Geometria analitica

Vettori applicati

Esercizio 3.1 Se $\lambda = 0$ allora $\lambda \overrightarrow{OA}$ ha lunghezza 0 e quindi è il vettore nullo $\overrightarrow{OO}$. Viceversa, se $\lambda \neq 0$ moltiplicando $\lambda \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO}$ per λ^{-1} si ottiene $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OO}$.

Esercizio 3.2 Basta osservare che $\vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j}$ e $\vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j}$.

Esercizio 3.3 $F_B(\overrightarrow{OD_1}) = (4, 0, -4)$, $F_B(\overrightarrow{OD_2}) = (1, 3, 4)$.

Esercizio 3.4 $F_B(\overrightarrow{OD_1}) = (2, \sqrt{2} - 2, 4)$, $F_B(\overrightarrow{OD_2}) = (1, 2 - \sqrt{2}, 3)$.

Esercizio 3.5 $F_{B'}(\overrightarrow{OC}) = (1/4, 1/4)$.

Esercizio 3.6 $a \neq -2$; $F_{B_a}(\overrightarrow{OC}) = (3/(a+2), (a-4)/(a+2))$.

Esercizio 3.7 Procedi una componente alla volta, come in $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 3.8 Indica con r_1 (rispettivamente, r_2, r_3) la retta passante per l'origine e parallela a $\vec{i}$ (rispettivamente, $\vec{j}, \vec{k}$). Dato un punto P dello spazio, la retta passante per P e parallela a r_3 interseca il piano π_1 passante per l'origine e parallelo a $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ in un punto P_1 ; e il piano passante per P parallelo a π_1 interseca la retta r_3 in un punto P_2 . Per costruzione, $\overrightarrow{OP_1} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j}$, $\overrightarrow{OP_2} = x_3\vec{k}$, e $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$, e puoi definire $F_B: \mathcal{V}_O^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $F_B(\overrightarrow{OP}) = (x_1, x_2, x_3)$. A questo punto procedi come visto nel testo per $\mathcal{V}_O^2$.

Lunghezze e angoli

Esercizio 3.9

(a) $\sqrt{5}, \sqrt{5}$;

(b) $1, \sqrt{14}, \sqrt{14}, 2\sqrt{6}, \sqrt{91}$ e $2\sqrt{14}$.

Esercizio 3.10 Distanze fra il primo vettore e i successivi: $3, \sqrt{17}, \sqrt{21}, \sqrt{74}$, e $3\sqrt{5}$. Distanze fra il secondo vettore e i successivi: $4\sqrt{2}, \sqrt{14}, \sqrt{41}$, e $\sqrt{14}$. Distanze fra il terzo vettore e i successivi: $\sqrt{14}, \sqrt{105}$, e $\sqrt{78}$. Distanze fra il quarto vettore e i successivi: $\sqrt{51}$, e $4\sqrt{2}$. Distanza fra il quinto e il sesto vettore: $\sqrt{19}$.

Esercizio 3.11 Coseno degli angoli fra il primo vettore e i successivi: $3/\sqrt{14}, -1/\sqrt{14}, 1/\sqrt{6}, 9/\sqrt{91}$, e $3/\sqrt{14}$. Coseno degli angoli fra il secondo vettore e i successivi: $-1/7, \sqrt{3/7}, 16\sqrt{2}/7\sqrt{13}$, e 1 . Coseno degli angoli fra il terzo vettore e i successivi: $\sqrt{3/7}, 0$, e $-1/7$. Coseno degli angoli fra il quarto vettore e i successivi: $8\sqrt{2}/273$, e $\sqrt{3/7}$. Coseno dell'angolo fra il quinto e il sesto vettore: $16\sqrt{2}/7\sqrt{13}$.

Esercizio 3.12 Il terzo e il quinto.

Esercizio 3.13 È un'ellisse.

Esercizio 3.14 Seguono subito dalla definizione e dalle usuali proprietà di somma e prodotto fra numeri reali.

Esercizio 3.15

- (a) $\|v + w\|^2 = (v_1 + w_1)^2 + (v_2 + w_2)^2 = v_1^2 + w_1^2 + 2(v_1w_1) + v_2^2 + w_2^2 + 2(v_2w_2) = \|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2$;
- (b) $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = (v_1 + w_1)^2 + (v_2 + w_2)^2 + (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 = 2(v_1^2 + v_2^2) + 2(w_1^2 + w_2^2) = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$. L'interpretazione geometrica è che la somma delle aree dei quadrati costruiti sulle diagonali del parallelogramma è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui quattro lati.
- (c) Dimostriamolo in $\mathbb{R}^3$, visto che in $\mathbb{R}^2$ è analogo. Prima di tutto, dall'ovvia disuguaglianza

$$(v_1w_2 - v_2w_1)^2 + (v_1w_3 - v_3w_1)^2 + (v_2w_3 - v_3w_2)^2 \geq 0$$

sviluppando i quadrati segue subito che $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\|\|w\|$; inoltre l'uguaglianza si ha se e solo se $v_1/v_2 = w_1/w_2 = v_3/v_3$, cioè se e solo se v e w sono proporzionali. Da questo segue

$$\| \|v\| - \|w\| \|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\|w\| \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle = \|v + w\|^2,$$

con uguaglianza se e solo se $\langle v, w \rangle = -\|v\|\|w\|$; e

$$\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v, w \rangle \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2,$$

con uguaglianza se e solo se $\langle v, w \rangle = \|v\|\|w\|$.

- (d) Una delle due uguaglianze vale se e solo se $|\langle v, w \rangle| = \|v\|\|w\|$, e abbiamo visto che questo succede se e solo se v e w sono proporzionali.

Esercizio 3.16 Sono tutti i vettori della forma $a\vec{i} + b\vec{j} + (3a + 2b)\vec{k}$ dove $a, b \in \mathbb{R}$ soddisfano $a^2 + b^2 + (3a + 2b)^2 = 1$; sono infiniti.

Esercizio 3.17 Sono tutti i vettori della forma $(3a + 2b)\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$ dove $a, b \in \mathbb{R}$ soddisfano $(3a + 2b)^2 + a^2 + b^2 = 4$; sono infiniti.

Esercizio 3.18 $h = -2$.

Piani

Esercizio 3.19 $2x - y + 3z = -1$.

Esercizio 3.20 $2x + 2y - 4z = 8$.

Esercizio 3.21 Ce ne sono esattamente due: $\pm \frac{1}{\sqrt{14}}(3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$.

Esercizio 3.22 $3x + y - z = -5$.

Esercizio 3.23 Ce ne sono esattamente due: $\pm \frac{3}{\sqrt{24}}(2\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k})$.

Esercizio 3.24 $x + 2y + 3z = 5$.

Esercizio 3.25 Sono tutti i piani di equazione cartesiana $-x + 2y - d$ al variare di $d \in \mathbb{R}$; sono infiniti.

Esercizio 3.26 Equazione cartesiana: $x = 2$. Equazioni parametriche: $\begin{cases} x = 2, \\ y = s, \\ z = t. \end{cases}$

Esercizio 3.27
$$\begin{cases} x = s, \\ y = t, \\ z = \frac{1}{3}(1 - 2s + t). \end{cases}$$

Esercizio 3.28 $x - 2y - z = 1.$

Esercizio 3.29 Equazioni parametriche:
$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 1 + s - t, \\ z = 1 + 2s. \end{cases}$$
 Equazione cartesiana:

$2x - 2y + z = 1.$

Esercizio 3.30 Sono incidenti.

Esercizio 3.31 Se $k \neq 1/2$ sono incidenti; se $k = 1/2$ sono paralleli.

Rette

Esercizio 3.32 Basta prendere $t = 1/2$.

Esercizio 3.33 $a = -1/2.$

Esercizio 3.34 $x = -1 + t, y = 2 + t, z = t.$

Esercizio 3.35 $x = -1 + 8t, y = \pi + t(52 - \pi), z = t.$

Esercizio 3.36 $x = 1 - 2t, y = e + 2et, z = \sqrt{2} + (\sqrt{2} + \sqrt{3})t.$ Il punto dato si trova prendendo $t = -1$, per cui appartiene a r .

Esercizio 3.37 $a = 15.$

Esercizio 3.38 $r_1 \cap r_2 = \{(2/5, 9/5)\}.$

Esercizio 3.39 $r_1 \cap r_2 = \{(5/2, 1)\}.$

Esercizio 3.40 $a \neq -1/3; r \cap s_a = \{(2(3a - 7)/(1 + 3a), (5a + 7)/(1 + 3a))\}.$

Esercizio 3.41 $r \cap r' = \{(1, 1, 1)\}.$

Esercizio 3.42 Si intersecano nel punto $(-1/2, 1, 3/2)$ per $a = -1$, e non sono mai parallele.

Esercizio 3.43

(a) $x = 1 + t, y = 1 + 2t, z = 1 - 5t.$

(b) $x + 2y - 5z = 2.$

(c) $Q = (\frac{17}{15}, \frac{19}{15}, \frac{1}{3}).$

Esercizio 3.44

(a) $x = 2 + 2t, y = -1 + 2t, z = 3 - 4t.$

(b) $P = (\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 0).$

Esercizio 3.45

(a) $x = 2 + t, y = -1 - 2t, z = 1 - t.$

(b) $x = s, y = -2 + 2s, z = 4 - 3s.$

(c) Sono sghembe.

Esercizio 3.46

(a) $x = -1 + 2t, y = 1 + t, z = 2 - t.$

(b) $x = s, y = 1 - 2s, z = 1 + s.$

(c) Sono sghembe.

Esercizio 3.47

- (a) $x = t, y = 3 + t, z = -3 - 2t$.
 (b) $x + y - 2z = -3$.
 (c) $Q = (-2, 1, 1)$.

Esercizio 3.48

- (a) $x = 3 + 3t, y = 2 + t, z = 5 - t$.
 (b) $P = (0, 1, 6)$.

Esercizio 3.49

- (a) $x = 1 - t, y = 2 - t, z = -3 + t$.
 (b) $-x - y + z = 3$.
 (c) $Q = (-2, -1, 0)$.

Esercizio 3.50

- (a) $x = -2 + t, y = 1 + 2t, z = -3 + 3t$.
 (b) $P = (-1, 3, 0)$.

Esercizio 3.51

- (a) $x = 2t, y = -t, z = 4 + t$.
 (b) $x = 1 + 3s, y = 3 - s, z = s$.
 (c) $y + z = 1$.

Esercizio 3.52

- (a) $x = t, y = -1 + 2t, z = 1 + t$.
 (b) $x = 1 + s, y = 2 + 2s, z = -2 - 3s$.
 (c) $2x - y = 4$.

Esercizio 3.53 Per $k \neq 1/4$ sono incidenti; per $k = 1/4$ sono paralleli.

Esercizio 3.54 Per $h \neq 1$ sono sghembe; per $h = 1$ sono incidenti nel punto $(1, -1, 1)$.

Esercizio 3.55 Per $k \neq 1$ sono incidenti; per $k = 1$ e $h \neq 1$ sono paralleli; per $k = 1$ e $h = 1$ la retta è contenuta nel piano.

Esercizio 3.56

- (a) No, perché sostituendo $(0, -1, 0)$ a (x, y, z) nelle equazioni parametriche della retta il risultante sistema nell'incognita t non ammette soluzione.
 (b) $2x - 3y + z = 9$.
 (c) $P = (\frac{4}{7}, -\frac{13}{7}, \frac{16}{7})$.

Esercizio 3.57 Per $k \neq -4$ sono incidenti; per $k = -4$ sono paralleli.

Esercizio 3.58 $x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}t, y = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3}t, z = t$.

Esercizio 3.59
$$\begin{cases} x + 3z = -1, \\ y - 2z = 2. \end{cases}$$

Esercizio 3.60 Per $k \neq 1/2$ sono sghembe; per $k = 1/2$ sono incidenti nel punto $(1, -1, 2)$.

Algebra lineare

Sistemi lineari triangolari superiori

Esercizio 4.1

- (a) $(-1, 1, -1, 1, 4)$.
- (b) $(-7, 1, 4, -3, 2)$.
- (c) $(0, 0, 4/3, 3/2, -1, 1)$.
- (d) Non ammette soluzioni.

Basi e dimensione

Esercizio 4.2

- (a) $(0, 0, 0)$.
- (b) $(0, 0, 0)$.
- (c) $(0, 0, 0)$.
- (d) $(-17t/18, -t/18, 2t/9, t)$.
- (e) $(9t/2, -5t/2, 3t/2, t)$.

Esercizio 4.3 La somma di combinazioni lineari in certi vettori è ancora una combinazione lineare negli stessi vettori; e il prodotto di uno scalare per una combinazione lineare in certi vettori è ancora una combinazione lineare negli stessi vettori.

Esercizio 4.4 $(x_1, \dots, x_n) = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, per cui $\{e_1, \dots, e_n\}$ è un sistema di generatori. Siccome se $i \neq j$ allora e_i ha 0 come coordinata j -esima, e_j non si può scrivere come combinazione lineare degli altri e_i con $i \neq j$, per cui $\{e_1, \dots, e_n\}$ sono linearmente indipendenti.

Esercizio 4.5 Siccome $\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2, per il teorema dell'esistenza delle basi per dimostrare che una coppia di vettori è una base di $\mathbb{R}^2$ basta verificare che sono linearmente indipendenti. Per l'Osservazione 4.3, due vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ sono linearmente indipendenti se e solo se il sistema lineare omogeneo $x_1 v_1 + x_2 v_2 = O$ ammette solo la soluzione nulla $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Quindi per risolvere l'esercizio basta verificare che per ciascuna coppia di vettori dati il sistema lineare omogeneo corrispondente ha come unica soluzione $(0, 0)$.

Esercizio 4.6 Il sistema
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$
 ha come unica soluzione $(0, 0, 0)$,

per cui $\mathcal{B}_1$ è una base di $\mathbb{R}^3$ (vedi la soluzione dell'esercizio precedente). Invece il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \end{cases}$$
 ha soluzioni $(-t, -t, t)$, per cui $\mathcal{B}_2$ non è una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 4.7 $t \neq \pm 2$.

Esercizio 4.8 Il sistema $\begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0, \end{cases}$ ammette una soluzione diversa da $(0, 0)$ se e solo se $ad - bc = 0$.

La riduzione a scala

Esercizio 4.9

- (a) $(1, 0, -2, 0, 2, 0) + (s, s, 0, 0, 0, 0) + (-t, 0, 2t, t, 0, 0) + (2u, 0, -2u, 0, u, u)$.
- (b) $(2, -1, 3, 0, 2, 0) + (0, s, 0, s, 0, 0) + (3t/4, t/2, 0, 0, -t, t)$.
- (c) $(49/16, 17/8, 5/4, 1/2, 0, 0) + (31s/16, 15s/8, 7s/4, 3s/2, s, 0) + (-15t/16, -7t/8, -3t/4, -t/2, t, t)$.
- (d) $(1, 3, 5, 7, 4, 0) + (0, 0, 0, 0, t, t)$.

Esercizio 4.10

- (a) $(4/5, -1/2, 3/4)$.
- (b) $(3, 0, -6, 3)$.
- (c) $(1/3, 1/2, 1/6, 0)$.
- (d) Non ammette soluzioni.
- (e) $(15/13, -11/13, -85/13, 0) + (-3t/13, -3t/13, 17t/13, t)$.
- (f) $(4/3, 7/3, 0) + (-t, 0, t)$.

Esercizio 4.11

- (a) $(6/5, -4/5, -108/25, 1)$.
- (b) $(46/5, -7.5, 8/5)$.
- (c) $(13/12, -11/12, -157/36, 11/12)$.
- (d) Non ammette soluzioni.
- (e) $(3/2, -2/3, 1/6, 41/6)$.
- (f) $(3, 2, 1)$.
- (g) $(-1, 7, 3, -2)$.

Esercizio 4.12

- (a) $(-1/31, 11/31, -7/31)$.
- (b) $(2, 0, 2, 3)$.
- (c) $(2, -1, 3)$.
- (d) $(1, 0, 0)$.
- (e) $(0, 1/2, -1/2, 0, 0) + (-t/3, -t/6, t/2, -t, t)$.
- (f) Non ammette soluzioni.
- (g) $(1/3, 1/3, 0) + (-t/3, -4t/3, t)$.

Esercizio 4.13

- (a) $(-7s/2, 9s/2, 9s/2, s, 0) + (4t, -11t, -17t, 0, t)$.
- (b) $(1/2, -1/2, -1, -3/2)$.
- (c) $(37, 6, 59, 0) + (-5t, -t, -8t, t)$.
- (d) $(11/73, 5/73, -14/73, 0) + (-79t/73, 57t/73, t/73, t)$.
- (e) $(2/3, 1/3, 2/3, 0) + (-5t/3, -7t/3, 4t/3, t)$.
- (f) $(-1, 0, 0, 1, 0) + (-3s, 2s, s, 0, 0) + (t, t, 0, -t, t)$.

Esercizio 4.14

- (a) Per $k \neq 0, \pm 2$ il sistema ha l'unica soluzione $(1, 0, 1)$. Per $k = 0$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(1, 0, 0) + (0, 0, t)$. Per $k = 2$ il sistema ammette le infinite soluzioni

- $(0, 1, 0) + (t, -t, t)$. Per $k = -2$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(2, 1, 0) + (-t, -t, t)$.
- (b) Per $k \neq 0$ il sistema ha l'unica soluzione $(k/3, 1/3, 1/k)$. Per $k = 0$ il sistema non ammette soluzioni.
- (c) Per $k \neq 1, -4/3$ il sistema ha l'unica soluzione $(21/(4+3k), -19/2(4+3k), 33/(4+3k))$. Per $k = 1$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(3, 1, 0) + (0, -t/2, t)$. Per $k = -4/3$ il sistema non ammette soluzioni.
- (d) Per $k \neq 0, 1/3$ il sistema ha l'unica soluzione $(9k(k+1)/(3k-1), -3(9k^2+10k+1)/(3k-1), -(27k^2+33k+4)/(3k-1))$. Per $k = 0$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(0, -1, 0) + (0, t, t)$. Per $k = 1/3$ il sistema non ammette soluzioni.
- (e) Per $k \neq 1$ il sistema non ammette soluzioni. Per $k = 1$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(1, 1, 0) + (-2t, -t, t)$.

Esercizio 4.15

- (a) Per $k \neq 0, \pm\sqrt{3}$ il sistema ha l'unica soluzione $(1+2k/(k^2-3), -2k/(k^2-3), (k^2-1)/(k^2-3))$. Per $k = 0$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(0, 0, 1/3) + (t, 0, 0)$. Per $k = \pm\sqrt{3}$ il sistema non ammette soluzioni.
- (b) Per $k \neq -2, -1/2$ il sistema ha l'unica soluzione $((4k+7)/2(2k+1), 2(k-2)/(2k+1), (-8k^2+4k-1)/2(2k+1))$. Per $k = -2$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(-13/4, -3/4, 0) + (t/2, t/2, t)$. Per $k = -1/2$ il sistema non ammette soluzioni.
- (c) Per $k \neq 1, -11$ il sistema ha l'unica soluzione $(-4/(k+11), 4/(k+11), 2(k+3)/(k+11))$. Per $k = 1$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(1/2, 3/2, 0) + (-5t/4, -7t/4, t)$. Per $k = -11$ il sistema non ammette soluzioni.
- (d) Per $k \neq 0, -3$ il sistema ha l'unica soluzione $((2k^2+4k+3)/(k^2+3k), (k^2-2k-6)/(k^2+3k), (-k^3+2k-3)/(k^2+3k))$. Per $k = 0, -3$ il sistema non ammette soluzioni.
- (e) Per $k \neq 0, 2$ il sistema ha l'unica soluzione $(-3, (k+3)/k, 3/k)$. Per $k = 2$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(1, 0, 0) + (-s, s, 0) + (-t, 0, t)$. Per $k = 0$ il sistema non ammette soluzioni.

Esercizio 4.16

- (a) Per $k \neq \pm 1$ il sistema ha l'unica soluzione $(4/3(k+1), (3k+7)/3(k+1), 4(k+2)/3(k+1))$. Per $k = 1$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(4/3, -5/3, 0) + (-t/3, 5t/3, 0)$. Per $k = -1$ il sistema non ammette soluzioni.
- (b) Per $k \neq -2 \pm \sqrt{33}$ il sistema ha l'unica soluzione $((12k-41)/(k^2+4k-29), -(7k+20)/(k^2+4k-29), (4k^2-6k+47)/(k^2+4k-29))$. Per $k = -2 \pm \sqrt{33}$ il sistema non ammette soluzioni.
- (c) Per $k \neq -2, 1, 3/2$ il sistema ha l'unica soluzione $(-(4k^2+9k-34)/(k-1)(2k^2+k-6), (6k^3+3k^2-40k+10)/(k-1)(2k^2+k-6), (5k+4)/(2k^2+k-6))$. Per $k = -2, 1, 3/2$ il sistema non ammette soluzioni.
- (d) Per $k \neq -13, 1$ il sistema non ammette soluzioni. Per $k = -13$ il sistema ha l'unica soluzione $(-5, -1)$. Per $k = 1$ il sistema ha l'unica soluzione $(1, 1)$.

Esercizio 4.17

- (a) Per $k \neq \pm 1$ il sistema ha l'unica soluzione $((3-k)/(k+1), 6/(k+1), (k-6)/(k+1), (4-k)/(k+1))$. Per $k = 1$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(1/4, 3, -7/4, 0) + (t/2, 0, -t/2, t)$. Per $k = -1$ il sistema non ammette soluzioni.

- (b) Per $k \neq 0, 1$ il sistema ha l'unica soluzione $((k^2 + k + 1)/k, -(k^3 + 2k^2 + 6k + 7)/2k, (k + 2)/k, (k + 1)/k)$. Per $k = 1$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(0, -7/2, 0, 2) + (t, -3t/2, t, 0)$. Per $k = 0$ il sistema non ammette soluzioni.
- (c) Per $k \neq -2, 0$ il sistema ha l'unica soluzione $(0, 2(2k + 1)/(k + 2), 3/(k + 2), 3/(k + 2))$. Per $k = 0$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(3, 1, 0, 0) + (-2t, 0, t, t)$. Per $k = -2$ il sistema non ammette soluzioni.
- (d) Per $k \neq -4/3$ il sistema ha l'unica soluzione $(-3k/(3k + 4), (3k + 1)/(3k + 4), (3k^2 + 7k)/(3k + 4))$. Per $k = -4/3$ il sistema non ammette soluzioni.
- (e) Per $k \neq 1, -42/25$ il sistema non ammette soluzioni. Per $k = 1$ il sistema ha l'unica soluzione $(8/23, -9/23, -21/23, -22/23)$. Per $k = -42/25$ il sistema ha l'unica soluzione $(-3/50, -1/10, -17/25, 1/2)$.
- (f) Per $k \neq 0, -2$ il sistema ha l'unica soluzione $(3/(k + 2), 0, 3/(k + 2), 2(2k + 1)/(k + 2))$. Per $k = 0$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(0, 3, 0, 1) + (t, -2t, t, 0)$. Per $k = -2$ il sistema non ammette soluzioni.
- (g) Per $k \neq -1/5$ il sistema ha l'unica soluzione $((k^2 + 4k - 3)/(5k + 1), (3k^2 - 2)/(5k + 1), -2(2k^2 - 4k + 1)/(5k + 1), (k^2 - 3k + 5)/(5k + 1))$. Per $k = -1/5$ il sistema non ammette soluzioni.

Esercizio 4.18

- (a) Per $k \neq -7$ il sistema ha l'unica soluzione $(-4 - k, 5 + k, -3 - k, 0)$. Per $k = -7$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(3, -2, 4, 0) + (4t, -3t, 4t, t)$.
- (b) Per $k \neq 0$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(25, 6/k, 41, 0) + (-3t, -t/k, -5t, t)$. Per $k = 0$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(7, 0, 11, 6) + (0, t, 0, 0)$.
- (c) Per $k \neq -12$ il sistema ha l'unica soluzione $(-2k/(k + 12), 6/(k + 12), 2(7k - 6)/3(k + 12), (6 - k)/3(k + 12))$. Per $k = -12$ il sistema non ammette soluzioni.
- (d) Per $k \neq -5/2, 1, 2$ il sistema ha l'unica soluzione $((-4k^2 + 3k + 22)/(2k^3 - k^2 - 11k + 10), (6k^3 - 9k^2 - 38k + 34)/(2k^3 - k^2 - 11k + 10), (5k^2 + 5k - 24)/(2k^3 - k^2 - 11k + 10))$. Per $k = -5/2, 1, 2$ il sistema non ammette soluzioni.
- (e) Per $k \neq 7$ il sistema non ammette soluzioni. Per $k = 7$ il sistema ha l'unica soluzione $(-1/2, 3/2)$.

Esercizio 4.19

- (a) Per $t \neq 0, -1$ il sistema ha l'unica soluzione $((\sin t - t^2 - t)/(t + 1), -(\sin t - t^2 - t)/t(t + 1), (\sin t)/t(t + 1))$. Per $t = 0$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(0, 1, 0) + (0, -t, t)$. Per $t = -1$ il sistema non ammette soluzioni.
- (b) Per $t \neq \pm 1$ il sistema ha l'unica soluzione $(-(2t^2 + 9t + 6)/2(t^2 - 1), -(2t^3 + 4t^2 - 11t - 12)/2(t^2 - 1), (2t^4 + 7t^3 + 2t^2 + 11t + 12)/2(t^2 - 1))$. Per $t = \pm 1$ il sistema non ammette soluzioni.

Esercizio 4.20

- (a) Per $h \neq 1$ il sistema ha l'unica soluzione $((b - 1)/(h - 1), (b^2 - 1)/(h - 1), (h - b^2 - b + 1)/(h - 1))$. Per $h = 1$ e $b \neq 1$ il sistema non ammette soluzioni. Per $h = b = 1$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(1, 0, 0) + (-s, s, 0) + (-t, 0, t)$.
- (b) Per $b \neq -2$ il sistema ha l'unica soluzione $((3b^2 + 6h + b(h^3 + 2h^2 + h + 2))/(b + 2)(h^2 + 1), -3/(h^2 + 1), -(h^3 + 2h^2 - 2h + 3b + 2)/(b + 2)(h^2 + 1))$. Per $b = -2$ il sistema non ammette soluzioni.
- (c) Per $b \neq 0$ e $h \neq -1, 2$ il sistema ha l'unica soluzione $((3h - 7)/(h - 2), -3(3h - 8)/2b(h - 2), -(9h + 2b - 24)/2b(h - 2))$. Per $b = 0$ e $h \neq -1, 8/3$ il sistema

non ammette soluzioni. Per $b = 0$ e $h = -1$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(-23/3, -34/3, 0) + (0, t, t)$. Per $b = 0$ e $h = 8/3$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(3/2, 3/2, 0) + (0, t, t)$. Per $h = -1$ e $b \neq 0, -1/2$ il sistema ammette le infinite soluzioni $((22b-23)/3(2b+1), -34/3(2b+1), 0) + (-2bt/(2b+1), t/(2b+1), t)$. Per $h = -1$ e $b = -1/2$ il sistema ammette le infinite soluzioni $(-23/3, 0, 34/3) + (t, t, 0)$. Infine, per $h = 2$ il sistema non ammette soluzioni.

- (d) Per $h \neq -1/4, 4$ il sistema ha l'unica soluzione $((bh^2 + 6h - 16b + 54)/(4h^2 - 15h - 4), -(2bh + 4h - 8b + 29)/(4h^2 - 15h - 4), -(bh - 4h - 4b + 13)/(4h^2 - 15h - 4))$. Per $h = -1/4, 4$ il sistema non ammette soluzioni.

Esercizio 4.21 Per $\alpha \neq -2, 1$ il sistema ha l'unica soluzione $((\alpha + 1 - \beta - \beta^2)/(\alpha + 2)(\alpha - 1), -(1 - \beta - \alpha\beta + \beta^2)/(\alpha + 2)(\alpha - 1), -(1 + \beta - \beta^2 - \alpha\beta^2)/(\alpha + 2)(\alpha - 1))$. Per $\alpha = 1$ il sistema ammette soluzioni solo se $\beta = 1$, e in tal caso le soluzioni sono $(1, 0, 0) + (-s, s, 0) + (-t, 0, t)$. Per $\alpha = -2$ il sistema non ammette soluzioni reali.

Esercizio 4.22 Il sistema ammette soluzione se e solo se $\beta = 2\alpha^2 + \alpha\gamma - 2\gamma - 7\alpha + 5$, e in tal caso le soluzioni sono date da $(1 - \alpha, 0, -2 + 2\alpha + \gamma) + (-2t, t, -t)$.

Esercizio 4.23

- (a) $a + b = c$.
(b) $a = b + c$.

Esercizio 4.24 Ci sono infiniti sistemi che soddisfano le condizioni indicate. Un

esempio particolarmente semplice è
$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \\ kz = k. \end{cases}$$

Esercizio 4.25 Ci sono infiniti sistemi che soddisfano le condizioni indicate. Un

esempio particolarmente semplice è
$$\begin{cases} (k-3)x = 2(k-3), \\ y = 1, \\ z = 1. \end{cases}$$

Esercizio 4.26 Ci sono infiniti sistemi che soddisfano le condizioni indicate. Un

esempio particolarmente semplice è
$$\begin{cases} x + z = 0, \\ y + w = 0, \\ x + y + z + w = k + 1. \end{cases}$$

Esercizio 4.27 Ci sono infiniti sistemi che soddisfano le condizioni indicate. Un

esempio particolarmente semplice è
$$\begin{cases} kx = 1, \\ kx + y = 1, \\ y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Esercizio 4.28 Una riduzione a scala effettuata cominciando con lo scambio fra la prima e la terza riga permette di ricavare $-1, 2$ e -1 come pivot di A , che quindi è sempre non singolare. Quando $\beta = 0$ non è corretto sostituire la combinazione $\beta A_2 - A_1$ alla riga A_2 .

Esercizio 4.29 I possibili pivot sono $\{1, 3, 9\}$, $\{1, 3, -9\}$, $\{2, -3/2, 9\}$ e $\{2, 3, 9/2\}$. Il prodotto dei pivot è 27 quando sono stati effettuati un numero pari di scambi di righe, ed è -27 quando il numero degli scambi di righe effettuati è dispari.

Esercizio 4.30 8 pezzi standard, 5 lusso e 3 fuoriserie.

Esercizio 4.31 Supponendo che P_1 sia il punto più vicino all'estremità a 20 °C e P_3 il punto più vicino all'estremità a 240 °C, la temperatura di P_1 è 75 °C, quella di P_2 è 130 °C e quella di P_3 è 185 °C.

Esercizio 4.32

- (a) 2.
- (b) 2.
- (c) 3.

Esercizio 4.33 Se $\alpha \neq 0, -4$ il rango è 3. Se $\alpha = 0, -4$ il rango è 2.

Esercizio 4.34 2.

Esercizio 4.35

- (a) $2 \text{ Na} + \text{H}_2\text{O} \longrightarrow \text{Na}_2\text{O} + \text{H}_2$.
- (b) $4 \text{ FeCl}_2 + \text{O}_2 + 4 \text{ H}_2\text{O} \longrightarrow 2 \text{ Fe}_2\text{O}_3 + 8 \text{ HCl}$.
- (c) $2 \text{ KMnO}_4 + 10 \text{ FeSO}_4 + 8 \text{ H}_2\text{SO}_4 \longrightarrow \text{K}_2\text{SO}_4 + 5 \text{ Fe}_2(\text{SO}_4)_3 + 2 \text{ MnSO}_4 + 8 \text{ H}_2\text{O}$.

Esercizio 4.36

- (a) Singolare.
- (b) Singolare.
- (c) Non singolare.
- (d) Non singolare.

Esercizio 4.37

- (a) $k = \pm 1$.
- (b) $k = 1/2$.

Operazioni sulle matrici

Esercizio 4.38 $AC = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; AF = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}; BA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}; BB = \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}; BE = \begin{vmatrix} -3 \\ 1 \end{vmatrix}; CA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}; CB = \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}; CE = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix};$

$DA = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}; DB = \begin{vmatrix} 7 & 0 \end{vmatrix}; DE = \begin{vmatrix} 3 \end{vmatrix}; ED = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}; FC = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}; FF = \begin{vmatrix} 29 & 20 & 11 \\ 20 & 14 & 8 \\ 11 & 8 & 5 \end{vmatrix}.$

Esercizio 4.39 $AC = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; AD = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}; BA = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}; BB = \begin{vmatrix} 7 & 15 \\ 5 & 52 \end{vmatrix}; CA = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}; CB = \begin{vmatrix} -1 & 10 \\ -1 & 10 \\ -1 & 10 \end{vmatrix}; DC = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 6 & 6 \\ 9 & 9 \end{vmatrix}; DD = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 8 & 14 & 20 \\ 11 & 20 & 29 \end{vmatrix}.$

Esercizio 4.40 È possibile sommare solo matrici che hanno lo stesso numero di righe e colonne; quindi ciascuna matrice con se stessa, le matrici A , B e C dell'Esercizio 4.38 con quelle con lo stesso nome dell'Esercizio 4.39, e la matrice F dell'Esercizio 4.38 con

la matrice D dell'Esercizio 4.39. I risultati sono: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 6 \end{vmatrix};$
 $\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 2 & 14 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix};$
 $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}.$

Esercizio 4.41 $k = -1$.

Esercizio 4.42

(a) $\begin{vmatrix} d-c & c \\ c & d \end{vmatrix}.$

(b) $\begin{vmatrix} d & c \\ c & d \end{vmatrix}.$

(c) $\begin{vmatrix} d & -c \\ c & d \end{vmatrix}.$

(d) $\begin{vmatrix} d & -c \\ c & d \end{vmatrix}.$

(e) $\begin{vmatrix} c+d & c \\ c & d \end{vmatrix}.$

Esercizio 4.43

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

(b) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$

(c) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

Esercizio 4.44

(a) $X = \begin{vmatrix} -3c & -3d \\ c & d \end{vmatrix}.$

(b) $X = \begin{vmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{vmatrix}.$

(c) $X = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$

(d) $X = \begin{vmatrix} a & b \\ -2a & -2b \end{vmatrix}.$

(e) $X = \begin{vmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{vmatrix}.$

(f) $X = \begin{vmatrix} a & b \\ -a & -b \end{vmatrix}.$

Esercizio 4.45

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$(b) \begin{vmatrix} -3 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$(c) A^2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \text{ e } A^n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ per } n \geq 3.$$

$$(d) \begin{vmatrix} (-1)^{n+1} & (-1)^n & \frac{1}{2}(1 - (-1)^n) \\ 2(-1)^{n+1} & 2(-1)^n & 1 - (-1)^n \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 4.46

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 11/2 & 8 & 7/2 \\ 0 & -1/2 & -1 & -1/2 \\ -2 & -7 & -10 & -4 \\ 2 & 5 & 8 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$(c) \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -3 & -2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$(d) \begin{vmatrix} 1/4 & -3/4 & 1/4 & 1/4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 5/4 & -3/4 & 1/4 & -7/4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$(e) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$(f) \begin{vmatrix} 6/31 & 2/31 & 5/31 & -4/31 \\ 5/62 & -19/62 & -1/62 & 7/62 \\ -3/31 & -1/31 & 13/31 & 2/31 \\ 3/62 & 1/62 & -13/62 & 29/62 \end{vmatrix}.$$

Esercizio 4.47 Procedi come nell'Esempio 4.31, effettuando prima una riduzione a scala usuale e poi una riduzione a scala dal basso verso l'alto.

Esercizio 4.48

- (a) Segue subito dalla formula del prodotto righe per colonne.
 (b) I pivot di una matrice triangolare superiore sono gli elementi sulla diagonale principale.
 (c) Lo si vede per esempio usando il metodo dell'Esempio 4.31 per calcolare l'inversa.

Esercizio 4.49 L'invertibilità e il fatto che l'inversa è triangolare superiore seguono dall'esercizio precedente. L'unipotenenza dell'inversa segue dal fatto che gli elementi sulla

diagonale principale dell'inversa di una matrice triangolare superiore T sono i reciproci degli elementi sulla diagonale principale di T .

Esercizio 4.50 Per vedere che $F_{rs}(\lambda)$ è triangolare superiore unipotente (e quindi invertibile) basta scriverla. Poi $F_{rs}(\lambda)F_{rs}(-\lambda) = I_n$ perché $E_{rs}E_{rs} = O$ se $r < s$.

Esercizio 4.51 Esistono infiniti esempi. Uno particolarmente semplice è $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Esercizio 4.52

(a) È invertibile per $a \neq \pm\sqrt{2}$, e in tal caso l'inversa è $\begin{vmatrix} \frac{a}{a^2-2} & \frac{-2}{a^2-2} & \frac{a}{a^2-2} \\ \frac{-2}{a^2-2} & \frac{2a}{a^2-2} & \frac{-a^2}{a^2-2} \\ \frac{1}{a^2-2} & \frac{-a}{a^2-2} & \frac{a^2-1}{a^2-2} \end{vmatrix}$.

(b) È invertibile per $ab \neq 1$, e in tal caso l'inversa è $\begin{vmatrix} \frac{b}{ab-1} & \frac{-1}{ab-1} & \frac{1}{ab-1} \\ \frac{-1}{ab-1} & \frac{a}{ab-1} & \frac{-a}{ab-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

(c) È invertibile per $k \neq 1/3$, e in tal caso l'inversa è $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -k & \frac{1}{3k-1} & \frac{k}{3k-1} & \frac{k-1}{3k-1} \\ \frac{3k-1}{-1} & \frac{3}{3k-1} & \frac{1}{3k-1} & \frac{-2}{3k-1} \\ \frac{3k-1}{-2k} & \frac{2}{3k-1} & \frac{2k}{3k-1} & \frac{-(k+1)}{3k-1} \end{vmatrix}$.

(d) È invertibile per $a \neq 1$, e in tal caso l'inversa è $\begin{vmatrix} \frac{b-2}{4(a-1)} & \frac{-b}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2a-b}{4(a-1)} \\ \frac{1}{b+2} & 1 & 0 & \frac{1}{a-1} \\ \frac{b+2}{4(a-1)} & \frac{-b}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2a+b}{4(1-a)} \\ \frac{1}{a-1} & 0 & 0 & \frac{1}{1-a} \end{vmatrix}$.

Esercizio 4.53 Per l'invertibilità vedi l'Esercizio 4.8; per verificare che quella è l'inversa basta fare il prodotto.

Esercizio 4.54

(a) Basta fare il prodotto e usare le formule di addizione di seno e coseno.

(b) Basta scrivere T_ϕ e $T_{-\phi}$ quando $\cos \phi = 0$ e fare il prodotto.

Esercizio 4.55

(a) $n_0^1 = 6000$, $n_1^1 = 80$, $n_2^1 = 50$; $n_0^2 = 5000$, $n_1^2 = 2400$, $n_2^2 = 40$.

(b) $n_0^1 = 3900$, $n_1^1 = 30$, $n_2^1 = 20$, $n_3^1 = 35$; $n_0^2 = 1900$, $n_1^2 = 780$, $n_2^2 = 12$, $n_3^2 = 10$.

Esercizio 4.56

(a) $a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}$.

(b) 100 kg.

(c) Se A è la matrice con elementi a_{ij} e B è la matrice con elementi b_{jh} , la risposta è data dall'elemento di posto (i, h) della matrice AB , o anche dal prodotto scalare fra la riga A_i della matrice A e la colonna B^h della matrice B .

Esercizio 4.57

(a) No.

(b) Sì.

(c) Sì.

(d) Sì.

(e) Sì.

(f) Sì.

Esercizio 4.58

- (a) 0.0513.
- (b) 0.1504.
- (c) 0.346414.
- (d) 0.3416.
- (e) 0.15741.
- (f) 0.153937.
- (g) 0.156839.

Determinanti

Esercizio 4.59 I determinanti delle matrici dell'Esercizio 4.36 sono: 0; 0; -8 ; -72 . I determinanti delle matrici dell'Esercizio 4.46 sono: 1; 2; 1; -4 ; 1; -62 .

Esercizio 4.60

- (a) 6π .
- (b) -3 .
- (c) -1 .
- (d) 36.
- (e) -8 .

Esercizio 4.61 Nell'ordine: $-(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_2 - a_3)$; $(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4)(a_3 - a_4)$; $(a_1 + a_2 + a_3)(a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)$; $(a_1^2 - a_2^2)(a_2^2 - a_3^2)(a_3^2 - a_1^2)$. La generalizzazione richiesta è la formula

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j).$$

Esercizio 4.62 Basta applicare la proprietà (D.2) dei determinanti a ciascuna delle n colonne.

Esercizio 4.63 Se $i = j$ è lo sviluppo di Laplace lungo una riga. Se $i \neq j$ il membro sinistro è lo sviluppo di Laplace lungo la riga j -esima del determinante di una matrice ottenuta da A sostituendo alla riga j -esima una copia della riga i -esima, cioè di una matrice con due righe uguali, per cui vale 0 per la proprietà (D.1) dei determinanti.

Esercizio 4.64 Il membro sinistro della formula dell'esercizio precedente è esattamente l'elemento di posto (i, j) del prodotto $A \cdot \text{Cof}(A)$, per cui $A \cdot \text{Cof}(A) = (\det A)I_n$. Dividendo questa uguaglianza per $\det A$ otteniamo che $\frac{1}{\det A} \text{Cof}(A)$ è la matrice inversa di A . Infine usando l'Esercizio 4.62 troviamo

$$\frac{1}{\det A} = \det(A^{-1}) = \det \left(\frac{1}{\det A} \text{Cof}(A) \right) = \frac{1}{(\det A)^n} \det \text{Cof}(A)$$

e quindi $\det \text{Cof}(A) = (\det A)^{n-1}$.

Esercizio 4.65

- (a) $x = 7/22$, $y = 17/44$, $z = -15/44$.
- (b) $x = 3$, $y = -2$, $z = 0$.
- (c) $x = 885\,781$, $y = -887\,112$.

Esercizio 4.66

- (a) $\sum_{i=1}^4 y_i$;
 (b) $\sum_{i=2}^{n+1} b_i$;
 (c) $\sum_{i=0}^k x_i$;
 (d) $\sum_{i=0}^n x_{2i}$;
 (e) $\sum_{i=1}^4 a_i^3$;
 (f) $\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2$;

Esercizio 4.67

- (a) $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6$;
 (b) $x_{-1} + x_0 + x_2 + x_3 + x_4$;
 (c) $0 + 1 + 2^2 + 3^2 = 14$.

Esercizio 4.68

- (a) Segue dalla proprietà associativa della somma;
 (b) Segue dalla proprietà distributiva della somma rispetto al prodotto;
 (c) Segue da (a) e (b).

Autovalori e autovettori**Esercizio 4.69**

- (a) Autovalore $-(13 + \sqrt{170})^{-1}$, autovettore $(-24 - (13 + \sqrt{170})^{-1}, 7)$ (o suoi multipli); autovalore $13 + \sqrt{170}$, autovettore $(-11 + \sqrt{170}, 7)$ (o suoi multipli).
 (b) Autovalore 1, autovettori $(-3, 0, 2)$ e $(-2, 1, 0)$ (o loro combinazioni lineari); autovalore 2, autovettore $(6, -4, 1)$ (o suoi multipli).
 (c) Autovalore 1, autovettore $(1, 0, 0)$ (o suoi multipli).
 (d) Autovalore -1 , autovettori $(-1, 0, 1)$ e $(2, 1, 0)$ (o loro combinazioni lineari); autovalore -5 , autovettore $(-1, -2, 1)$ (o suoi multipli).
 (e) Autovalore 1, autovettori $(0, -2, 1)$ e $(1, 0, 0)$ (o loro combinazioni lineari); autovalore 2, autovettore $(-2, -1, 1)$ (o suoi multipli).
 (f) Autovalore 0, autovettore $(-1, 0, 1)$ (o suoi multipli); autovalore 1, autovettore $(1, -1, 1)$ (o suoi multipli); autovalore 2, autovettore $(1, 0, 1)$ (o suoi multipli).
 (g) Autovalore 1, autovettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ (o loro combinazioni lineari).
 (h) Autovalore 1, autovettori $(1, 0, 0, 0)$ e $(0, 2, 3, 0)$ (o loro combinazioni lineari); autovalore 2, autovettore $(0, 1, 1, 0)$ (o suoi multipli).
 (i) Autovalore 1, autovettore $(2, 0, 3, 0)$ (o suoi multipli); autovalore 2, autovettore $(1, 0, 1, 0)$ (o suoi multipli).
 (j) Autovalore 2, autovettore $(1, 0, 0)$ (o suoi multipli).

Esercizio 4.70 Se $Av_1 = kv_1$ e $Av_2 = kv_2$ allora $A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = kv_1 + kv_2 = k(v_1 + v_2)$. Se $Av = kv$ allora $A(cv) = cAv = ckv = k(cv)$.

Esercizio 4.71 Il vettore $(1, \dots, 1)$ è un autovettore relativo all'autovalore 1 per qualsiasi matrice di Markov.

Esercizio 4.72

- (a) Gli autovalori della matrice A sono $-3/2$, $-1/2$, 0 e 2 . Siccome 1 non è un autovalore, non ci sono distribuzioni stabili di popolazioni. Un autovettore relativo a 2 è $(800, 100, 5, 2)$; questa (e i suoi multipli) è una distribuzione di popolazione tale che la proporzione fra le varie classi d'età rimane costante.
- (b) Esplode.

Esercizio 4.73 Gli autovalori della matrice A sono $-1/3$, $-1/6$, 0 e $1/2$. Siccome 1 non è un autovalore, non ci sono distribuzioni stabili di popolazioni. Un autovettore relativo a $1/2$ è $(360, 10, 2, 2)$; questa (e i suoi multipli) è una distribuzione di popolazione tale che la proporzione fra le varie classi d'età rimane costante. Infine, siccome tutti gli autovalori hanno modulo minore di 1 la popolazione tende a estinguersi quale che sia la distribuzione iniziale.

Bestiario, I: funzioni algebriche

Funzioni lineari

Esercizio 5.1

- (a) Non allineati.
- (b) Allineati sulla retta $y = 3x - 1$.
- (c) Non allineati.
- (d) Allineati sulla retta $y = 3x - 1$.

Esercizio 5.2 $f(x) = -x + 1$; la famiglia di funzioni lineari il cui grafico passa per il punto $(0, 1)$ è $\{f_m(x) = mx + 1 \mid m \in \mathbb{R}\}$.

Esercizio 5.3

- (a) $f(x) = 2x$;
- (b) $f(x) = -1$;
- (c) $f(x) = \frac{1}{2}x$;
- (d) $f(x) = -2x + 2$;
- (e) $f(x) = 3x - 7$;
- (f) $f(x) = x - 2$;
- (g) $f(x) = 3x$;
- (h) $f(x) = 1$;
- (i) $f(x) = -x$;
- (j) $f(x) = 2x + 10$;
- (k) $f(x) = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$;
- (l) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$;
- (m) $f(x) = -2x$.

Esercizio 5.4 Nell'Esercizio 5.3, le funzioni in (a), (c), (e), (f), (g), (j) e (k) sono strettamente crescenti. Le funzioni in (b), (d), (i), (l) e (m) sono strettamente decrescenti. Le funzioni in (b) e (h) sono costanti.

Esercizio 5.5 Per ogni funzione f dell'Esercizio 5.3 sono indicati, nell'ordine, gli insiemi $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 1\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq 1\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 1\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 1\}$.

- (a) $[1/2, \infty)$; $(-\infty, 1/2]$; $(1/2, \infty)$; $(-\infty, 1/2)$;
- (b) $\emptyset$; $\mathbb{R}$; $\emptyset$; $\mathbb{R}$;
- (c) $[2, \infty)$; $(-\infty, 2]$; $(2, \infty)$; $(-\infty, 2)$;
- (d) $(-\infty, 1/2]$; $[1/2, \infty)$; $(-\infty, 1/2)$; $(1/2, \infty)$;
- (e) $[8/3, \infty)$; $(-\infty, 8/3]$; $(8/3, \infty)$; $(-\infty, 8/3)$;
- (f) $[3, \infty)$; $(-\infty, 3]$; $(3, \infty)$; $(-\infty, 3)$;
- (g) $[1/3, \infty)$; $(-\infty, 1/3]$; $(1/3, \infty)$; $(-\infty, 1/3)$;
- (h) $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}$; $\emptyset$; $\emptyset$;

- (i) $(-\infty, -1]; [-1, \infty); (-\infty, -1); (-1, \infty)$;
- (j) $[-9/2, \infty); (-\infty, -9/2]; (-9/2, \infty); (-\infty, -9/2)$;
- (k) $[-1, \infty); (-\infty, -1]; (-1, \infty); (-\infty, -1)$;
- (l) $(-\infty, 0]; [0, \infty); (-\infty, 0); (0, \infty)$;
- (m) $(-\infty, -1/2]; [-1/2, \infty); (-\infty, -1/2); (-1/2, \infty)$.

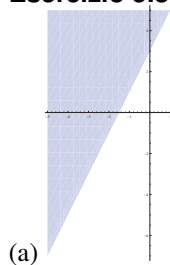
Esercizio 5.6 Per ogni funzione dell'Esercizio 5.3 sono indicati, nell'ordine, il limite per $x \rightarrow \infty$ e per $x \rightarrow -\infty$.

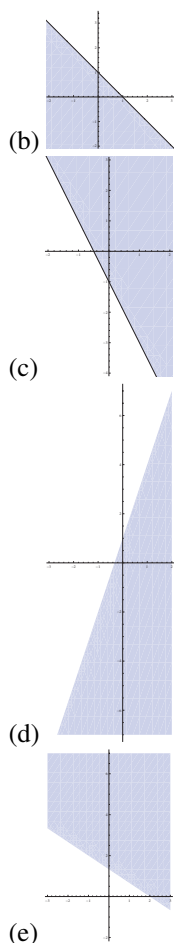
- (a) $+\infty, -\infty$;
- (b) $-1, -1$;
- (c) $+\infty, -\infty$;
- (d) $-\infty, +\infty$;
- (e) $+\infty, -\infty$;
- (f) $+\infty, -\infty$;
- (g) $+\infty, -\infty$;
- (h) $1, 1$;
- (i) $-\infty, +\infty$;
- (j) $+\infty, -\infty$;
- (k) $+\infty, -\infty$;
- (l) $-\infty, +\infty$;
- (m) $-\infty, +\infty$.

Esercizio 5.7 Per ogni funzione dell'Esercizio 5.3 sono indicati, nell'ordine, i punti di minimo, il valore minimo, i punti di massimo ed il valore massimo nell'intervallo $[-1, 10]$.

- (a) $-1, -2, 10, 20$;
- (b) $[-1, 10], -1, [-1, 10], -1$;
- (c) $-1, -1/2, 10, 5$;
- (d) $10, -20, -1, 4$;
- (e) $-1, -10, 10, 23$;
- (f) $-1, -3, 10, 8$;
- (g) $-1, -3, 10, 30$;
- (h) $[-1, 10], 1, [-1, 10], 1$;
- (i) $10, -10, -1, 1$;
- (j) $-1, 8, 10, 30$;
- (k) $-1, 1, 10, 14/3$;
- (l) $10, -4, -1, 3/2$;
- (m) $10, -20, -1, 2$.

Esercizio 5.8





Esercizio 5.9 Se $m > 0$, gli insiemi sono rispettivamente $(-\infty, \frac{y_0 - q}{m})$, $[\frac{y_0 - q}{m}, \infty)$ e $(-\infty, \frac{y_0 - q}{m}]$. Se $m < 0$, gli insiemi sono rispettivamente $(\frac{y_0 - q}{m}, \infty)$, $(-\infty, \frac{y_0 - q}{m}]$, e $[\frac{y_0 - q}{m}, \infty)$. Se $m = 0$ e $q < y_0$, gli insiemi sono rispettivamente $\mathbb{R}$, $\emptyset$, e $\mathbb{R}$. Se $m = 0$ e $q > y_0$, gli insiemi sono rispettivamente $\emptyset$, $\mathbb{R}$ e $\emptyset$. Se $m = 0$ e $q = y_0$, gli insiemi sono rispettivamente $\emptyset$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}$.

Esercizio 5.10

- Se $f(b) < y_0$, l'insieme è vuoto; altrimenti è dato da $[c, b]$, dove c è il minimo $x \in [a, b]$ tale che $f(x) \geq y_0$.
- Se $f(b) \geq y_0$, l'insieme è vuoto; Se $f(b) < y_0$, l'insieme è tutto $[a, b]$; altrimenti è dato da $[a, c]$, dove c è il massimo $x \in [a, b]$ tale che $f(x) \leq y_0$.
- Se $f(x) > y_0$ per ogni $x \in (a, \infty)$, l'insieme è vuoto; altrimenti, sia c l'estremo superiore dell'insieme degli $x \in (a, \infty)$ tali che $f(x) \leq y_0$; se $c < \infty$, l'insieme è dato da $(a, c]$, altrimenti è dato da tutto (a, ∞) .
- Se $f(b) \leq y_0$, l'insieme è vuoto; altrimenti è dato da $(c, b]$, dove c è l'estremo inferiore degli $x \in (a, b]$ tale che $f(x) \geq y_0$.

Esercizio 5.11 $P(h) = -\frac{0.67}{8884}h + 1$. L'immagine richiesta è $[a, 1]$, dove $a \simeq 0.2458$.

Esercizio 5.12 $v(t) = 9.81t$. Dopo 1 secondo la velocità è $v(1) = 9.81$ metri al secondo. Dopo 10 secondi la velocità è $v(10) = 98.1$ metri al secondo. Dopo 1 minuto la velocità è $v(60) = 588.6$ metri al secondo. Raggiunge la velocità di 10 metri al secondo dopo circa 1.019 secondi. Per $t < 0$ la velocità è negativa, che corrisponde a un movimento di salita invece che di caduta; per esempio, il tuo assistente prima dell'inizio delle misurazioni potrebbe aver saltato raggiungendo il punto di massima altezza per $t = 0$.

Esercizio 5.13 $v(t) = 1.622t + 1.2$. Dopo 1 secondo la velocità è $v(1) = 2.822$ metri al secondo. Dopo 10 secondi la velocità è $v(10) = 17.42$ metri al secondo. Dopo 1 minuto la velocità è $v(60) = 98.52$ metri al secondo. Raggiunge la velocità di 10 metri al secondo dopo circa 5.4254 secondi.

Esercizio 5.14 Lo spazio è $5/\pi \simeq 1.59$ m. Per stendere un filo lungo l'equatore ad altezza h metri dal suolo, dobbiamo allungare il filo di partenza di $2\pi h$ metri.

Esercizio 5.15 Rispettivamente -0.4 mg/m^3 , -5.6 mg/m^3 , -10.8 mg/m^3 (chiaramente il modello ottenuto mediante estrapolazione lineare non dà previsioni attendibili negli anni 2010, 2020 e 2030).

Esercizio 5.16 $A(l) = 0.1l + 0.9$.

Programmazione lineare

Esercizio 5.17

- (a) 1.6 g di mozzarella e 3 g di pollo.
- (b) 850.

Esercizio 5.18 20 g del reagente A e 40 g del reagente B, spendendo 380 Euro.

Esercizio 5.19 350 Euro. 50 auto.

Esercizio 5.20 300 ettari a patate e 700 ettari a grano.

Esercizio 5.21 70 g, ottenuti mediante la prima reazione usando 5 g del reagente A e 0 g del reagente B, e mediante la seconda reazione usando i grammi restanti di reagenti.

Funzioni quadratiche

Esercizio 5.22

- (a) $f(x) = -2x^2 + 4x$;
- (b) $f(x) = -1$;
- (c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2$;
- (d) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$;
- (e) $f(x) = -x^2 + 3$;
- (f) $f(x) = x^2$;
- (g) $f(x) = -x^2 + 1$;
- (h) $f(x) = -x^2 - x + 2$;
- (i) $f(x) = x^2 - 2x$;
- (j) $f(x) = -\frac{2}{9}x^2 + \frac{20}{9}x$.

Esercizio 5.23 Nell'esercizio precedente, le funzioni in (c), (d), (f) e (i) hanno concavità rivolta verso l'alto. Le funzioni in (a), (e), (g), (h), (j) hanno concavità rivolta verso il basso. La funzione in (b) è costante.

Esercizio 5.24

Per ogni funzione f dell'Esercizio 5.22 sono indicati, nell'ordine, gli insiemi $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 1\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \leq 1\}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 1\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < 1\}$.

- (a) $[1 - \sqrt{2}/2, 1 + \sqrt{2}/2]$; $(-\infty, 1 - \sqrt{2}/2] \cup [1 + \sqrt{2}/2, \infty)$; $(1 - \sqrt{2}/2, 1 + \sqrt{2}/2)$; $(-\infty, 1 - \sqrt{2}/2) \cup (1 + \sqrt{2}/2, \infty)$;
- (b) $\emptyset$; $\mathbb{R}$; $\emptyset$; $\mathbb{R}$;
- (c) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$; $[-2, 2]$; $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$; $(-2, 2)$;
- (d) $(-\infty, 1 - \sqrt{2}/2] \cup [1 + \sqrt{2}/2, \infty)$; $[1 - \sqrt{2}/2, 1 + \sqrt{2}/2]$; $(-\infty, 1 - \sqrt{2}/2) \cup (1 + \sqrt{2}/2, \infty)$; $(1 - \sqrt{2}/2, 1 + \sqrt{2}/2)$;
- (e) $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$; $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)$; $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$; $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$;
- (f) $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$; $[-1, 1]$; $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; $(-1, 1)$;
- (g) $\{0\}$; $\mathbb{R}$; $\emptyset$; $\mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- (h) $[-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$; $(-\infty, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$; $(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2})$; $(-\infty, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$;
- (i) $(-\infty, 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}, \infty)$; $[1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$; $(-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}, \infty)$; $(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$;
- (j) $[10 - \sqrt{82}, 10 + \sqrt{82}]$; $(-\infty, 10 - \sqrt{82}] \cup [10 + \sqrt{82}, \infty)$; $(10 - \sqrt{82}, 10 + \sqrt{82})$; $(-\infty, 10 - \sqrt{82}) \cup (10 + \sqrt{82}, \infty)$.

Esercizio 5.25 Per ogni funzione dell'Esercizio 5.22 sono indicati, nell'ordine, il limite per $x \rightarrow \infty$ e per $x \rightarrow -\infty$.

- (a) $-\infty, -\infty$;
- (b) $-1, -1$;
- (c) $+\infty, +\infty$;
- (d) $+\infty, +\infty$;
- (e) $-\infty, -\infty$;
- (f) $+\infty, +\infty$;
- (g) $-\infty, -\infty$;
- (h) $-\infty, -\infty$;
- (i) $+\infty, +\infty$;
- (j) $-\infty, -\infty$.

Esercizio 5.26 Per ogni funzione dell'Esercizio 5.22 sono indicati, nell'ordine, i punti di minimo, il valore minimo, i punti di massimo ed il valore massimo nell'intervallo $[-1, 10]$.

- (a) 10, -160, 1, 2;
- (b) $[-1, 10]$, -1, $[-1, 10]$, -1;
- (c) 0, 0, 10, 25;
- (d) 1, 0, 10, 162;
- (e) 10, -97, 0, 3;
- (f) 0, 0, 10, 100;
- (g) 10, -99, 0, 1;
- (h) 10, -108, $-1/2$, $5/4$;
- (i) 1, -1, 10, 80;
- (j) $\{-1, 1\}$, $-22/9$, 5, $50/9$.

Esercizio 5.27

- (a) $\{0, 2\}$;
- (b) $\emptyset$;
- (c) $\{0\}$;

- (d) $\{1\}$;
- (e) $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$;
- (f) $\{0\}$;
- (g) $\{1, -1\}$;
- (h) $\{1, 2\}$;
- (i) $\{0, 2\}$;
- (j) $\{0, 10\}$.

Esercizio 5.28

- (a) Coefficiente direttore negativo, discriminante positivo.
- (b) Coefficiente direttore positivo, discriminante negativo.
- (c) Coefficiente direttore positivo, discriminante nullo.
- (d) Coefficiente direttore negativo, discriminante negativo.

Esercizio 5.29 Rispettivamente $f(x) = -\frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$ e $\{f_a(x) = ax^2 + (1-a)x + 1 \mid a \in \mathbb{R}\}$.

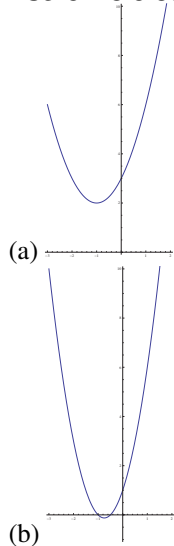
Esercizio 5.30 Se $a > 0$ e $\bar{y} < y_0$, le soluzioni sono i punti di (d_-, d_+) . Se $a > 0$ e $\bar{y} \geq y_0$, non ci sono soluzioni. Se $a < 0$ e $\bar{y} \geq y_0$, le soluzioni sono i punti di $(-\infty, d_-) \cup (d_+, \infty)$. Se $a < 0$ e $\bar{y} < y_0$, ogni punto di $\mathbb{R}$ è soluzione. Le costanti d_+ e d_- qui menzionate sono definite da

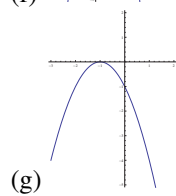
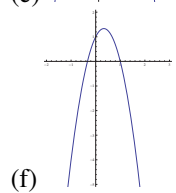
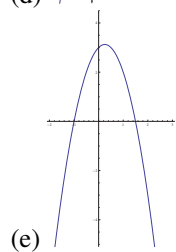
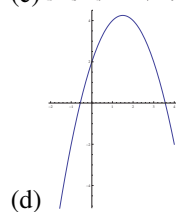
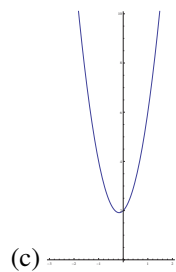
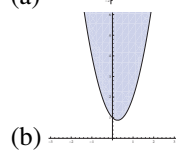
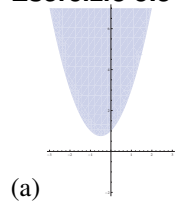
$$d_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c - y_0)}}{2a}.$$

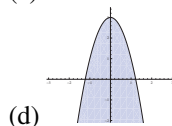
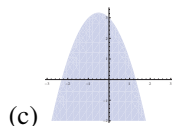
Esercizio 5.31 Se $a > 0$ e $D \geq 0$, le soluzioni sono i punti di $(-\infty, d_-) \cup (d_+, \infty)$. Se $a > 0$ e $D < 0$, ogni punto di $\mathbb{R}$ è soluzione. Se $a < 0$ e $D \geq 0$, le soluzioni sono i punti di (d_-, d_+) . Se $a < 0$ e $D < 0$, non ci sono soluzioni. Le costanti d_+ e d_- qui menzionate sono definite da

$$d_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Esercizio 5.32 No. Considera per esempio $f(x) = x^2$, $g(x) = x - 5$.

Esercizio 5.33

**Esercizio 5.34**



Esercizio 5.35 $f(x) = x^2 - 1$.

Esercizio 5.36 $y = -10x^2 - 10$. Interseca l'asse x nei punti $(1, 0)$ e $(-1, 0)$.

Esercizio 5.37 No. Infatti, per ogni $x \neq 0$ abbiamo $x \neq -x$ ma $f(x) = f(-x)$.

Esercizio 5.38

- (a) Pari.
- (b) Né pari né dispari.
- (c) Dispari.
- (d) Né pari né dispari.

Esercizio 5.39

- (a) 0;
- (b) -3 ;
- (c) $7/2$.

Esercizio 5.40

- (a) $h(t) = -\frac{3}{40}t^2 + \frac{11}{4}t - 10$.
- (b) Occorre confrontare il modello con la situazione (fisica, in questo caso) dell'esperimento. Per esempio, se il lancio è avvenuto sul terreno, si deve avere $h(t) \geq 0$, che accade per $\frac{5}{3}(11 - \sqrt{73}) \leq t \leq \frac{5}{3}(11 + \sqrt{73})$. Se invece il lancio avviene nel mare (per esempio, da un sottomarino) e l'altezza è misurata rispetto al livello del mare, allora sono ammissibili anche altezze negative (e tempi negativi, se il lancio è avvenuto prima dell'istante scelto come origine dei tempi).

Esercizio 5.41 La superficie (in m^2) in funzione della lunghezza (in m) è data da $S(l) = 0.25l^2 + 0.1l + 0.01$. Può essere realistica, in quanto è ragionevole che al crescere dell'elefante la lunghezza della proboscide cresca linearmente mentre la superficie delle orecchie cresca in modo quadratico.

Esercizio 5.42

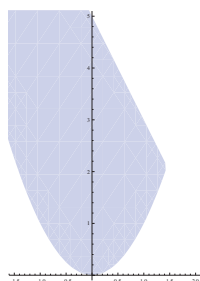
- (a) $T(t) = -\frac{1}{4}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{455}{4}$.
- (b) Prima di tutto ci aspettiamo che la temperatura della torta estratta dal forno diminuisca, mentre cresce o rimane costante finché è in forno. In questo caso $T(t)$ decresce per $t \geq -5/2$; quindi o il forno è stato spento 2.5 minuti prima di togliere la torta dal forno, oppure il modello è realistico solo per $t \geq 0$. Inoltre, ci aspettiamo che la temperatura della torta non scenda sotto alla temperatura ambiente della cucina; per esempio, se la temperatura della cucina è 20°C , allora ci aspettiamo che $T(t) \geq 20$. Siccome $T(t) < 20$ quando $t > 15$, il modello può rispecchiare il fenomeno solo fino a $t = 15$.

Esercizio 5.43 $D(r) = \frac{26}{25}r^2 - \frac{198}{5}r + 388$. Siccome la quantità di sostanza iniettata è fissata, la densità deve diminuire con l'aumentare del raggio (e quindi del volume). La

funzione trovata è decrescente solo per $r \leq \frac{495}{13} \simeq 38.08 \mu\text{m}$, per cui il modello può rispecchiare il fenomeno solo fino a questo raggio. Inoltre, bisogna imporre anche un limite inferiore positivo al raggio; infatti, ci aspettiamo che la densità tenda a $+\infty$ quando il raggio tende a 0^+ , mentre $D(0) = 388 < +\infty$. Una funzione più ragionevole che possa descrivere il fenomeno studiato è una funzione potenza della forma $f(r) = a/r^3$.

Esercizio 5.44 $a = \frac{\gamma - \bar{y}}{\bar{x}^2}$, $b = 2 \frac{\bar{y} - \gamma}{\bar{x}}$ e $c = \gamma$.

Esercizio 5.45 $y = ax^2 + 3$, dove $a \in \mathbb{R}$.



Esercizio 5.46

Esercizio 5.47

- (a) $f(x) = (x - 2)^2$;
- (b) $f(x) = (x + 4)^2 - 1$;
- (c) $f(x) = (x - 3)^2 - 4$;
- (d) $f(x) = (x + 1)^2 + 1$.

Esercizio 5.48

- (a) $f(x) = 18 - 24x^2$;
- (b) $f(x) = 18 - \frac{2}{3}x^2$;
- (c) $f(x) = 35 - 10x^2$;
- (d) $f(x) = 31 - 10x^2$;
- (e) $f(x) = -18x^2 - 24x - 2$;
- (f) $f(x) = -18x^2 - 72x - 66$;
- (g) $f(x) = -4x^2 + 16x - 4$;
- (h) $f(x) = -4x^2 + 16x - 4$.

Esercizio 5.49

- (a) $x_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$;
- (b) $x_{\pm} = \frac{7 \pm 5}{6}$;
- (c) $x_{\pm} = p \pm \sqrt{p^2 - q}$;
- (d) $x_1 = 0, x_2 = -3a$;
- (e) $x_1 = 0, x_2 = (3 - b)/b$;
- (f) $y_1 = 0, y_2 = -a/2$;
- (g) $y_{\pm} = \pm \sqrt{2/b}$;
- (h) $z_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{37}-1}{2}}$;
- (i) $z_{\pm} = \frac{13 \pm 3\sqrt{17}}{2}$;
- (j) $\lambda_{\pm} = \frac{18 \pm \sqrt{39}}{6}$.

Esercizio 5.50 $x^2 + (t^2 - t/3)x - t^3/3$.

Esercizio 5.51

(a) $a = 3 + \sqrt{5}$, $b = 3 - \sqrt{5}$;

(b) $a = \frac{k + \sqrt{k(k-4)}}{2}$, $b = \frac{k - \sqrt{k(k-4)}}{2}$.

Esercizio 5.52 $\lambda > -9/24$.

Esercizio 5.53 Affinché l'area sia massima, i lati devono essere della medesima lunghezza, ovvero 250 m. Nel caso generale, $l/4$.**Funzioni polinomiali****Esercizio 5.54** Il polinomio di minimo grado passante per i dati è $-\frac{1}{12}x^4 + \frac{7}{6}x^3 + \frac{13}{12}x^2 + \frac{5}{6}x$.**Esercizio 5.55** Rispettivamente $f(x) = x^3/6 - x^2 - x/6 + 1$, e $f_a(x) = ax^3 - x^2 - ax + 1$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.**Esercizio 5.56**

(a) $\frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{17}{6}x - 1$.

(b) $\frac{1}{8}x(x^2 - 1)$.

(c) $\frac{25}{24}x^3 - 3x^2 - \frac{25}{24}x + 2$.

(d) $-x^3 + \frac{8}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$.

Esercizio 5.57

(a) 1.

(b) 3.

(c) 1.

Funzioni potenza**Esercizio 5.58** Infatti risulta pari a $\frac{E}{16\pi^2 r^4}$, dove E è l'energia dell'onda emessa dalla nave.**Esercizio 5.59** Rispettivamente $\frac{129}{4} = 32.25\%$ e $\frac{4167}{80} = 52.0875\%$.**Esercizio 5.60** Rispettivamente $p = 50(12^{1/3} - 2) \simeq 14.4714$ e $50(18^{1/3} - 2) \simeq 31.0371\%$.**Esercizio 5.61**

(a) Dominio = $[0, \infty)$, immagine = $[0, \infty)$.

(b) Dominio = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, immagine = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(c) Dominio = $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, immagine = $(0, \infty)$.

Esercizio 5.62

(a) Strettamente crescente.

(b) Non monotona.

(c) Costante (dunque monotona, ma non strettamente).

(d) Strettamente crescente.

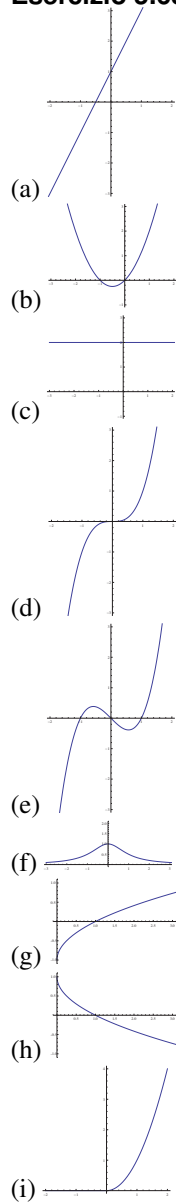
(e) Non monotona.

(f) Non monotona.

(g) Strettamente crescente.

(h) Strettamente decrescente.

(i) Crescente, ma non strettamente.

Esercizio 5.63**Funzioni razionali**

Esercizio 5.64 Le funzioni con grafico un'iperbole equilatera passante per il punto $(2, 1)$ sono tutte quelle della forma $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ con $2a + b = 2c + d$ e $ad - bc \neq 0$. Se inoltre si ha $a = 4c + d$ e $b = -6c - d$ allora il grafico passa anche per $(3, 2)$. Un esempio è $f(x) = \frac{5x-7}{x+1}$.

Esercizio 5.65

- (a) $f(x) = \frac{x-3}{x-1} + 3$;
 (b) $f(x) = \frac{x-4}{x+5} + 2$;

(c) $f(x) = \frac{x-4}{x-2} - 1$;

(d) $f(x) = \frac{x}{x-2} + 4$.

Esercizio 5.66

(a) $f(x) = \frac{3x}{x-1}$;

(b) $f(x) = \frac{x}{x/3-2}$;

(c) $f(x) = \frac{10x-10}{x-2}$;

(d) $f(x) = \frac{6x-2}{x-2}$;

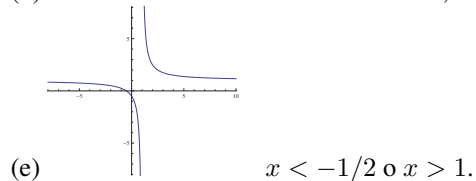
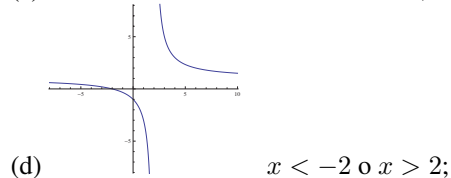
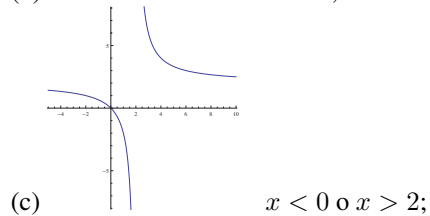
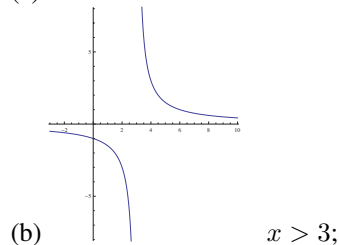
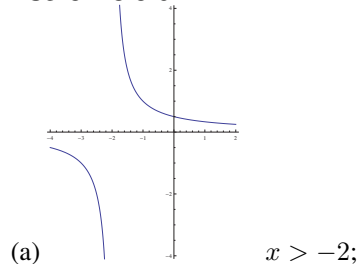
(e) $f(x) = \frac{3x+2}{3x}$;

(f) $f(x) = \frac{3x+6}{3x+4}$;

(g) $f(x) = \frac{2x-4}{x-4}$;

(h) $f(x) = \frac{2x-4}{x-4}$.

Esercizio 5.67



Esercizio 5.68 Tende rispettivamente a $+\infty$ e a b .

Limiti e continuità

Esercizio 5.69 Sono indicati nell'ordine il limite a $+\infty$ e $-\infty$:

- (a) $+\infty, -\infty$;
- (b) $-\infty, +\infty$;
- (c) $+\infty, +\infty$;
- (d) $-\infty, -\infty$;
- (e) $-\infty, +\infty$.

Esercizio 5.70 $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} a/x = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} -|a|/x = -|a| \lim_{x \rightarrow 0^\pm} 1/x = \mp\infty$. Significato a parole: la funzione a/x con $a < 0$ diventa arbitrariamente grande quando x è sufficientemente piccolo e negativo, e diventa arbitrariamente negativa quando x è sufficientemente piccolo e positivo. Significato in simboli: $\forall M > 0 \exists \delta > 0 : 0 < x < \delta \Rightarrow a/x < -M$ e $\forall M > 0 \exists \delta > 0 : -\delta < x < 0 \Rightarrow a/x > M$.

Esercizio 5.71 $1/2$ sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

Esercizio 5.72 $\lim_{x \rightarrow 3^\pm} f(x) = \mp\infty$.

Esercizio 5.73 $\lim_{x \rightarrow 3^\pm} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^\pm} f(x) = \mp\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

Esercizio 5.74

- (a) Singolarità: 2. Limiti: $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} f_1(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_1(x) = 1$;
- (b) Singolarità: $\pm\sqrt{3}$. Limiti: $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^\pm} f_2(x) = \mp\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^\pm} f_2(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_2(x) = 0$;
- (c) Singolarità: $\pm\sqrt{8}$. Limiti: $\lim_{x \rightarrow \sqrt{8}^\pm} f_3(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\sqrt{8}^\pm} f_3(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_3(x) = 0$;
- (d) Singolarità: 1. Limiti: $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f_4(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_4(x) = 1$;
- (e) Singolarità: 1, 3. Limiti: $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f_5(x) = \mp\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^\pm} f_5(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_5(x) = \pm\infty$.

Esercizio 5.75

- (a) Singolarità: -1. Limiti: $\lim_{x \rightarrow -1^\pm} g_1(x) = \mp\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_1(x) = 2$;
- (b) Singolarità: -3, 1. Limiti: $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} g_2(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -3^\pm} g_2(x) = \mp\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_2(x) = \mp\infty$;
- (c) Singolarità: nessuna. Limiti: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_3(x) = 0$;
- (d) Singolarità: -3. Limiti: $\lim_{x \rightarrow -3^\pm} g_4(x) = \mp\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g_4(x) = 1$.

Bestiario, II: funzioni trascendenti

Funzioni esponenziali

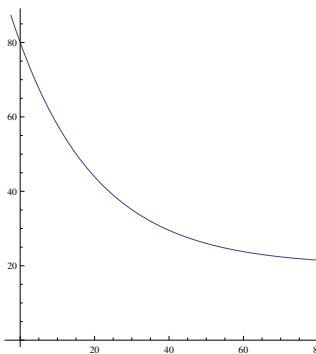
Esercizio 6.1 $m(t) = 0.6 \cdot 3^{t/2}$ g. $m(24) = 318\,864.6$ g.

Esercizio 6.2

- (a) $\frac{4\,611\,686\,018\,427\,387\,904}{25} \simeq 1.84467 \cdot 10^{17}$ g.
 (b) $368\,934\,881\,474\,191\,032.3 \simeq 3.68935 \cdot 10^{17}$ g.
 (c) La produzione annuale mondiale di riso è pari a circa $4.1 \cdot 10^{14}$ g, per cui servirebbero circa 1000 anni per accumulare riso sufficiente a pagare l'inventore... la massa della Terra è invece ben maggiore, essendo pari a circa $6 \cdot 10^{27}$ g.

Esercizio 6.3

- (a) Segue dal fatto che quando $a > 1$ si ha $a^{-0} = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^{-x} = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^{-x} = 0$.
 (b) Segue da (a) e dal fatto che, posto $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, si ha $g(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$.



Esercizio 6.4 Grafico: Occorrono 50 minuti.

Esercizio 6.5 16 000.

Esercizio 6.6 (a) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

(b) $x = 1$.

(c) $x < 1$ o $x > 2$.

Esercizio 6.7 $g(x) = bp^x$, con $b = a(p^h - 1)$.

Esercizio 6.8 Circa $7.48 \cdot 10^9$ persone nel 2018, e circa $8.40 \cdot 10^9$ persone nel 2028.

Esercizio 6.9 Nel 2124, dopo 116 anni.

Funzioni logistiche

Esercizio 6.10 Di seguito è indicata solo una fra le infinite funzioni che soddisfano le proprietà richieste:

- (a) $f(x) = x$.
- (b) $f(x) = x^2$.
- (c) $f(x) = -x^2$.
- (d) $f(x) = 3(e^{-x} - 1)$.
- (e) $f(x) = \frac{7}{1+e^{-x}} - 2$.
- (f) $f(x) = 4 - \frac{5}{1+e^{-x}}$.

Esercizio 6.11 Di seguito è indicata solo una fra le infinite funzioni che soddisfano le proprietà richieste:

- (a) $f(x) = 4(1 - e^{-x}) + 1$, restringendone il dominio a $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$.
- (b) $f(x) = 3 - 2(1 - e^{-x})$, restringendone il dominio a $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$.

Esercizio 6.12 Non esistono. Se f è monotona crescente, allora $f(x) \leq f(0) < +\infty$ per ogni $x < 0$, per cui non può avere limite $+\infty$ per $x \rightarrow -\infty$, in quanto quale che sia negativo $f(x)$ non può essere maggiore di $f(0)$ (e quindi non può diventare arbitrariamente grande).

Esercizio 6.13 Esistono: per esempio, $f(x) = 10^{100} + e^x$.

Esercizio 6.14 Di seguito è indicata (quando esiste) solo una fra le infinite funzioni che soddisfano le proprietà richieste:

- (a) $f(x) = -x^{-1}$ ristretta a $(-\infty, 0)$.
- (b) Non esiste: se f è monotona decrescente allora $f(x) \leq f(-1) < +\infty$ per ogni $x \in [-1, 0)$, e quindi non può tendere a $+\infty$ quando $x \rightarrow 0^-$.
- (c) $f(x) = -x^{-1}$ ristretta a $(-\infty, 0)$.
- (d) Non esiste. Le ipotesi sui limiti ci dicono che esistono $M_1 < M_2 < 0$ tali che $f(x) > -1/2$ se $x < M_1$ o se $M_2 < x < 0$. Inoltre, essendo continua, per il teorema di Weierstrass f ammette un minimo globale L nell'intervallo $[M_1, M_2]$, cioè $f(x) \geq L$ per ogni $x \in [M_1, M_2]$. Quindi $f(x) \geq \min\{-1/2, L\}$ per ogni $x \in (-\infty, 0)$, per cui f non può essere surgettiva (la semiretta $(-\infty, L)$ non è contenuta nell'immagine).
- (e) Non esiste, per lo stesso motivo del punto precedente.

Esercizio 6.15 Una possibile risposta è $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$, ristretta a $(-\infty, 0)$.

Esercizio 6.16 Una possibile risposta è $c(x) = 20(1 - e^{-x})$ g/l.

Esercizio 6.17 Una possibile risposta è $m(x) = \frac{100}{1+(14/11)^{10-x}}$ %.

Esercizio 6.18 La funzione e^t è sempre positiva, per cui $G(x) > 0$ sempre. La funzione e^t è strettamente crescente, per cui G è strettamente crescente dove $-x^2/2$ lo è, cioè in $(-\infty, 0]$. Per lo stesso motivo, G è strettamente decrescente in $[0, +\infty)$, e quindi (essendo crescente prima e decrescente poi) ha un punto di massimo in 0. Infine $-x^2/2$ tende a $-\infty$ quando $x \rightarrow \pm\infty$, ed e^t tende a 0 quando $t \rightarrow -\infty$, per cui $G(x) \rightarrow 0$ per $x \rightarrow \pm\infty$.

Funzioni logaritmiche

Esercizio 6.19 Se esistesse il logaritmo y in base $a > 0$ di un numero negativo $x < 0$, allora il numero positivo a^y dovrebbe essere uguale al numero negativo x , impossibile.

Esercizio 6.20

- (a) $\frac{\log 3}{\log 2}$.
- (b) $\frac{\log 2}{\log 3}$.

- (c) 6.
 (d) $1 + \frac{\log 3}{\log 5}$.
 (e) $\frac{\log 3}{\log 2} - 1$.
 (f) -3 .

Esercizio 6.21

- (a) $f_1(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$; è iniettiva; l'inversa è $f_1^{-1}(y) = \frac{1}{4} \log \frac{y}{5}$.
 (b) $f_2(\mathbb{R}) = (3, +\infty)$; è iniettiva; l'inversa è $f_2^{-1}(y) = \log(y - 3) - 2$.
 (c) $f_3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$; è iniettiva; l'inversa è $f_3^{-1}(y) = \log(y + \sqrt{1 + y^2})$.
 (d) $f_3(\mathbb{R}) = (-1, 1)$; è iniettiva; l'inversa è $f_4^{-1}(y) = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}$.

Esercizio 6.22

- (a) $x = \frac{1}{3}$.
 (b) $x = 18$.
 (c) $x = 35$.
 (d) $x = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{89})$.
 (e) $x = \frac{4}{3}$.
 (f) $x = 3 + \frac{5}{3124}$.

Esercizio 6.23 Il dominio è $(3^{1/3}, +\infty)$, e $f(x) \geq 0$ per $x \geq 3^{2/3}$.

Esercizio 6.24

[Attenzione: il riferimento all'Esercizio 6.6 non è rilevante.]

$f \circ g(x) = \frac{x-3}{\log_4 x - 2}$ ha come dominio $(0, 16) \cup (16, +\infty)$. Invece $g \circ f(x) = \log_4 \frac{4^x - 3}{x - 2}$ ha come dominio $(-\infty, \log_4 3) \cup (2, +\infty)$.

Esercizio 6.25

- (a) Rispettivamente circa 0.999999659 g; 0.999966 g; 0.997514 g; 0.779669 g.
 (b) Rispettivamente circa 0.999642 g; 0.964804 g; 0.0731203 g; $2.53 \cdot 10^{-114}$ g.
 (c) Rispettivamente circa 0.952684 g; 0.00785 g; $2.1 \cdot 10^{-154}$ g; $5.4 \cdot 10^{-15368}$ g.
 (d) Rispettivamente circa 0.312446 g; $3 \cdot 10^{-51}$ g; $7.18 \cdot 10^{-3689}$ g; $4.2 \cdot 10^{-368815}$ g.

Esercizio 6.26 Circa lo 0.116 % annuo.

Esercizio 6.27

- (a) Circa -0.99 .
 (b) Circa 4.5.
 (c) Circa 11.5.

Funzioni trigonometriche**Esercizio 6.28**

- (a) $\frac{3}{4}\pi$ rad.
 (b) $\frac{2}{9}\pi$ rad.
 (c) $\frac{4}{9}\pi$ rad.
 (d) $\frac{10}{9}\pi$ rad.
 (e) $-\frac{1}{2}\pi$ rad.
 (f) $-\frac{1}{18}\pi$ rad.

Esercizio 6.29

- (a) Circa 5.7° .
 (b) Circa 14.3° .

- (c) Circa 28.6° .
- (d) Circa 114.6° .
- (e) Circa 286.5° .
- (f) Circa -22.9° .
- (g) Circa -171.9° .

Esercizio 6.30

- (a) $\phi = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- (b) $\phi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ o $\phi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- (c) $\phi = \frac{\pi}{8} + k\pi$ o $\phi = \frac{3\pi}{8} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 6.31

- (a) $x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- (b) $x \in \left(\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{5\pi}{12} + k\pi\right) \cup \left(\frac{7\pi}{12} + k\pi, \frac{11\pi}{12} + k\pi\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- (c) $x \in \left(-\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{\pi}{8} + k\pi\right)$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 6.32

$$\cos\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) - \pi\right] = -\cos\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) = -[-\sin\phi] = \sin\phi;$$

$$\sin\left(\phi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) - \pi\right] = -\sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\phi.$$

Esercizio 6.33

$$\sin(\phi - \psi) = \sin(\phi + (-\psi)) = \sin\phi \cos(-\psi) + \sin(-\psi) \cos\phi = \sin\phi \cos\psi - \sin\psi \cos\phi.$$

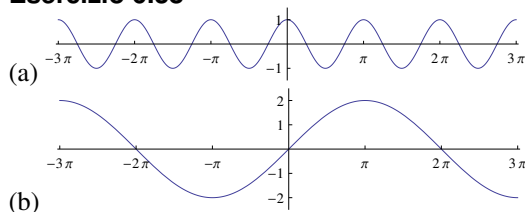
Esercizio 6.34

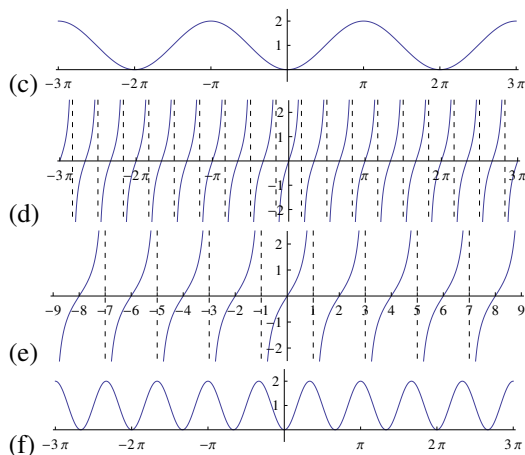
- (a) $\sin(3\phi) = \sin(2\phi + \phi) = \sin(2\phi) \cos\phi + \sin\phi \cos(2\phi) = 3\sin\phi \cos^2\phi - \sin^3\phi = 3\sin\phi - 4\sin^3\phi$.
- (b) $\cos(3\phi) = \cos(2\phi + \phi) = \cos(2\phi) \cos\phi - \sin\phi \sin(2\phi) = \cos^3\phi - 3\sin^2\phi \cos\phi = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$.
- (c) Segue da $\cos(2\phi) = \cos^2\phi - \sin^2\phi = \cos^2\phi - (1 - \cos^2\phi)$.
- (d) Segue da $\cos(2\phi) = \cos^2\phi - \sin^2\phi = (1 - \sin^2\phi) - \sin^2\phi$.

Esercizio 6.35 L'esercizio precedente dice che $\cos^2 \frac{\psi}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos\psi)$ e che $\sin^2 \frac{\psi}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\psi)$; estraendo la radice quadrata si ha la tesi.

Esercizio 6.36 $\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}; \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}};$
 $\sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

Esercizio 6.37 Basta porre $\alpha = \phi + \psi$ e $\beta = \phi - \psi$ nelle seguenti formule:
 $\cos(\phi + \psi) - \cos(\phi - \psi) = -2\sin\phi \sin\psi; \sin(\phi + \psi) + \sin(\phi - \psi) = 2\sin\phi \cos\psi;$
 $\sin(\phi + \psi) - \sin(\phi - \psi) = 2\cos\phi \sin\psi.$

Esercizio 6.38



Esercizio 6.39

- (a) $(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$.
- (b) $(1, \pi)$.
- (c) $(14, \frac{5\pi}{3})$.
- (d) $(3\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$.

Esercizio 6.40

- (a) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
- (b) $(0, -4)$.
- (c) $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2})$.
- (d) $(-3, 0)$.

Esercizio 6.41 $(-\infty, 1/2]$.

Esercizio 6.42 4.

Esercizio 6.43

- (a) $\frac{\pi}{4}$.
- (b) 0.
- (c) 0.
- (d) $\frac{\pi}{6}$.

Funzioni sinusoidali

Esercizio 6.44 Una possibilità è $f(x) = 4 \cos(\pi(x - 2)) - 2$.

Esercizio 6.45 La funzione cercata è $f(x) = 50 \cos(\frac{2\pi}{360}(x - 120)) + 125$.

Esercizio 6.46 L'oscillazione massima è $\pi/12$; avviene agli istanti $\sqrt{\frac{l}{g}}(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \simeq 0.71 + 2.84k$ s, con $k \in \mathbb{Z}$; il periodo è $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \simeq 2.84$ s.

Esercizio 6.47 $N_C(t) = 60\,000 + 50\,000 \cos(\frac{2\pi}{11}(t - \frac{3}{4}))$.

Successioni e serie

Esercizio 6.48

- (a) 10.
- (b) 1.

- (c) p/q .
- (d) $\sqrt{2}/3$.
- (e) $+\infty$.
- (f) 0.
- (g) $\frac{t}{2-t}$.
- (h) $e^{1/4}$.

Esercizio 6.49 Se $m > 0$ la successione $a_n = a_0 + mn$ tende a $+\infty$, in quanto $mn \rightarrow +\infty$ e a_0 è costante. Analogamente, se $m < 0$ la successione $a_n = a_0 + mn$ tende a $-\infty$, in quanto $mn \rightarrow -\infty$.

Esercizio 6.50 Supponiamo che $\ell \in \mathbb{R}$. L'esistenza del limite ci dice che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che $x > M$ implica $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Scegliamo un numero naturale $n_0 \geq M$; allora $n \geq n_0$ implica $|a_n - \ell| = |f(n) - \ell| < \varepsilon$, per cui $a_n \rightarrow \ell$ quando $n \rightarrow +\infty$. Un ragionamento analogo si applica per $\ell = \pm\infty$.

Esercizio 6.51

- (a) Aritmetica di ragione 3; 11, 14.
- (b) Aritmetica di ragione -1.5 ; -7 , -8.5 .
- (c) Geometrica di ragione 2; 24, 48.
- (d) Geometrica di ragione 1; 3, 3.
- (e) Né aritmetica né geometrica.

Esercizio 6.52 128.

Esercizio 6.53 255.102 kg di lana.

Esercizio 6.54

- (a) $127/64$.
- (b) $3 \frac{1 - \frac{1}{13^5}}{1 - \frac{1}{13}} = \frac{92\,823}{28\,561}$.
- (c) $\frac{1 + \frac{1}{3^5}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{61}{81}$.
- (d) $\frac{1 - s^{10}}{1 - s}$.
- (e) $\pi \frac{1 - \frac{1}{3^9}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{9841\pi}{13\,122}$.

Esercizio 6.55

- (a) $F_0 + F_1 = 2 = 3 - 1 = F_3 - 1$ per cui la tesi è vera per $n = 1$. Supponiamo sia vera per un numero n ; allora $F_0 + F_1 + \dots + F_n + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$, e quindi la tesi è vera anche per $n + 1$. Dunque essendo vera per $n = 1$ lo è anche per $n = 2$, e quindi per $n = 3$, e così via per tutti i numeri naturali n (è il principio di induzione; vedi la Curiosità 7.2).
- (b) $F_0 + F_2 = 3 = F_3$ per cui la tesi è vera per $n = 1$. Supponiamo sia vera per un numero n ; allora $F_0 + F_2 + \dots + F_{2n} + F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n+2} = F_{2n+3}$, e quindi la tesi è vera anche per $n + 1$. Dunque essendo vera per $n = 1$ lo è anche per $n = 2$, e quindi per $n = 3$, e così via per tutti i numeri naturali n (è il principio di induzione; vedi la Curiosità 7.2).
- (c) Basta scrivere la (a) per $2n$ e sottrarvi la (b).

Esercizio 6.56

- (a) $\frac{c}{1-t}$.
- (b) $\frac{ar}{r-1}$.

(c) $\frac{1}{1-x^3}$.

(d) $\frac{b}{1+s}$.

Esercizio 6.57 $(1-w)S = S - wS = \sum_{j=0}^{\infty} w^j = \frac{1}{1-w}$, e quindi $S = \frac{1}{(1-w)^2}$.

Esercizio 6.58 $(1+t)T = T + tT = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j t^j = \frac{t}{1+t}$, e quindi $T = \frac{t}{(1+t)^2}$.

Esercizio 6.59

(a) $M_n = M \sum_{j=0}^{n-1} 0.977^j = M \frac{1-0.977^n}{0.023}$.

(b) La massa totale tende a $\frac{M}{0.023} \simeq 43.48M$.

Esercizio 6.60 Il consumo l' n -esimo anno dopo il 2005 sarà $M_n = 1.013^n \cdot 3.6 \text{ km}^3$, per cui il consumo totale fino all' n -esimo anno compreso sarà $T_n = \sum_{j=0}^n M_n = \frac{1.013^{n+1}-1}{1.013-1}$.

$3.6 \simeq 276.92(1.013^{n+1}-1) \text{ km}^3$. Siccome $T_n = 440$ per $n \simeq 73.65$, esauriremo le riserve di petrolio nell'anno $2005 + 74 = 2079$.

Calcolo differenziale

Derivate

Esercizio 7.1 La nuova retta ha equazione $x = my + q$, cioè $y = \frac{1}{m}x - \frac{q}{m}$.

Esercizio 7.2

- (a) 58.872 m/s.
- (b) 49.06 m/s.
- (c) 39.248 m/s.
- (d) 29.436 m/s.
- (e) 24.53 m/s.
- (f) 14.718 m/s.
- (g) 19.624 m/s.

Esercizio 7.3

- (a) 1.
- (b) 2.
- (c) $2x$.
- (d) $2(x - 1)$.

Esercizio 7.4

- (a) $-3/(x - 1)^2$.
- (b) $-4/x^3$.
- (c) $\frac{1}{2}(x + 2)^{-1/2}$.
- (d) $x/\sqrt{x^2 + 1}$.
- (e) $x^{-3/2}$.

Esercizio 7.5

$$\begin{aligned} f'(-x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-x_0 + h) - f(-x_0)}{h} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(-x_0 - k) - f(-x_0)}{-k} \\ &= - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + k) - f(x_0)}{k} = -f'(x_0). \end{aligned}$$

Analogamente si vede che la derivata di una funzione dispari è pari.

Calcolo di derivate: funzioni algebriche

Esercizio 7.6

- (a) 6.
- (b) $4x - 12$.
- (c) $3\pi x^2 = 2\sqrt{2}x + \sqrt{2}$.
- (d) $5x^4 - 9x^2 + 12$.
- (e) $12x^{11} - 35x^4 + 9x^2$.

- (f) $26\sqrt{2}x^2 - 13\sqrt{3}x + 2$.
 (g) $5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.
 (h) $5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$.

Esercizio 7.7

- (a) $2x$.
 (b) $10x^4 - 21x^2 + 12x$.
 (c) $5x^4 + 20x^3 + 30x^2 + 20x + 5 = 5(x+1)^4$.
 (d) $5(x+1)^4$.

Esercizio 7.8

- (a) $(x^4 - 3x^2)/(x^2 - 1)^2$.
 (b) $1/(x+1)^2$.
 (c) $-4(x+1)/(x-1)^3$.
 (d) $-2/(x-1)^2$.
 (e) $-2/(x-1)^2$.
 (f) $(3x^6 + 16x^5 + 45x^4 + 30x^3 - 55x^2 - 18x - 21)/(x^2 + 3x + 6)^2$.

Esercizio 7.9

- (a) $30(x-1)(x^2 - 2x + 7)^{14}$.
 (b) $\frac{4}{3}(2x+1)^{-1/3}$.
 (c) $6x^3(3x^4 + 3)^{-1/2}$.
 (d) $2x^2(6 - 5x^2)/3(x^5 - 2x^3 + 1)^{5/3}$.

Esercizio 7.10 La funzione (a), che è l'unica delle quattro che si annulla in $x = 0$ e ha derivata positiva in $x = 0$.

Esercizio 7.11 $f(x) = 2x^2$.

Calcolo di derivate: funzioni trascendenti

Esercizio 7.12 La funzione (d), che è l'unica delle quattro ad avere derivata nulla in $x = 0$ e ad essere negativa per $x < 0$ e positiva per $x > 0$ piccolo.

Esercizio 7.13

- (a) $4e^{4x}$.
 (b) $4e^{4x+1}$.
 (c) $4(\log 2)2^{4x}$.
 (d) $2(\log 10)x10^{2x^2-3}$.

Esercizio 7.14

- (a) $(e^x - e^{-x})/2$.
 (b) $(e^x + e^{-x})/2$.
 (c) $4e^{2x}/(e^{2x} + 1)^2$.
 (d) $-60e^{-2x}$.
 (e) $400e^{2x}/(e^{2x} + 2)^2$.
 (f) $2e^{2x}(x^2 - x + 1)/(x^2 + 1)^2$.

Esercizio 7.15

- (a) $1/(x+1)$.
 (b) $\frac{1}{\log 10}(x+1)^{-1}$.
 (c) $2x/(x^2 + 1)$.
 (d) $\frac{1}{\log 2}(2x+3)/(x^2 + 3x - 2)$.

Esercizio 7.16

- (a) $\log x$.
 (b) $x^x(1 + \log x)$.
 (c) $(\log 2)(x + 1)^{-1} 2^{\log(2x+2)}$.
 (d) $(\log 10)e^x 10^{e^x}$.

Esercizio 7.17

- (a) $\cos x - \sin x$.
 (b) $2 \cos(2x)$.
 (c) $2 \cos(2x)$.
 (d) $-3x^2 \sin(x^3)$.
 (e) $\cos x - x \sin x$.
 (f) $(x \cos x - \sin x)/x^2$.

Esercizio 7.18

- (a) $\cos x + \frac{1}{\cos^2 x}$.
 (b) $\frac{2x}{\cos^2(x^2)}$.
 (c) $\frac{-3x^2}{\sin^2(x^3-3)}$.
 (d) $2 \sin x / \cos^3 x$.

Esercizio 7.19

- (a) $\frac{\sin(2x)}{2\sqrt{1+\sin^2 x}}$.
 (b) $\frac{-\cos x}{\sin x \sqrt{\sin^2 x}}$.
 (c) $-\tan x$.
 (d) $\frac{4}{\log 10 \sin(2x)}$.
 (e) $2e^{\sin(x^2+1)} x \cos(x^2 + 1)$.
 (f) $2e^x \cos(4e^x + 1) \sin^{-1/2}(4e^x + 1)$.

Esercizio 7.20

- (a) $2x(x^2 + 1)^{-2}(1 - (x^2 + 1)^{-2})^{-1/2}$.
 (b) $-2xe^{-x^2}(1 - e^{-2x^2})^{-1/2}$.
 (c) $\frac{2x}{1+(x^2+1)^2}$.
 (d) $\frac{2x}{(1+x^2)(1+(\log(x^2+1))^2)}$.

Esercizio 7.21 $m'(t) = -(\log 2)2^{-t/15}$; $m(24) = 15 \cdot 2^{-24/15} \simeq 4.95$ g;
 $m'(24) = -(\log 2)2^{-24/15} \simeq -0.23$ g/s.

Esercizio 7.22 $N(2) = 11\,000 + 2500\sqrt{2} \simeq 14\,535.5$; $N(4) = 11\,000$;
 $N(8) = 6000$; $N(10) = 11\,000 - 2500\sqrt{2} \simeq 7464.47$; $N'(2) = -625\pi/\sqrt{2} \simeq -1388.4$;
 $N'(4) = -625\pi \simeq -1963.5$; $N'(8) = 0$; $N'(10) = 625\pi/\sqrt{2} \simeq 1388.4$.

Esercizio 7.23 Basta scrivere $f^g = \exp(g \log f)$ e applicare la formula di derivazione di una funzione composta (e la regola di Leibniz).

Esercizio 7.24 $f(x) = \sqrt{x+c}$ e $f(x) = -\sqrt{x+c}$.

Esercizio 7.25 $\frac{10}{3}(12\pi)^{-1/3} \simeq 0.9941$ m/s.

Esercizio 7.26 $\frac{0.01}{0.56^2} \simeq 0.032$.

Massimi e minimi

Esercizio 7.27 No. Per esempio $f'(0) = -1 < 0$.

Esercizio 7.28 Sono entrambe crescenti perché le derivate $f'_1(x) = 3x^2 + 2$ e $f'_2(x) = 6x^2 + 1$ sono sempre positive.

Esercizio 7.29 No: se f' è sempre positiva allora f è strettamente crescente, per cui non può avere un punto di minimo interno.

Esercizio 7.30 No, perché avendo derivata sempre positiva è necessariamente crescente.

Esercizio 7.31 Se f è crescente (decrescente) il rapporto incrementale $(f(x+h) - f(x))/h$ è sempre positivo (negativo) o nullo, per cui il limite è sempre maggiore (minore) o uguale di zero.

Esercizio 7.32

- (a) Strettamente crescente.
- (b) Strettamente decrescente.
- (c) Strettamente crescente.
- (d) Né crescente né decrescente.

Esercizio 7.33

- (a) Strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$, strettamente crescente in $[0, +\infty)$, punto di minimo globale $x = 0$.
- (b) Strettamente crescente in $\mathbb{R}$, nessun punto di minimo o massimo locale.
- (c) Strettamente crescente in $(-\infty, 0]$ e in $[2, +\infty)$, strettamente decrescente in $[0, 2]$, punto di massimo locale $x = 0$, punto di minimo locale $x = 2$.
- (d) Strettamente decrescente in $(-\infty, 1]$, strettamente crescente in $[1, +\infty)$, punto di minimo globale $x = 1$.
- (e) Strettamente decrescente in $(-\infty, -1/\sqrt{2}]$ e in $[0, 1/\sqrt{2}]$, strettamente crescente in $[-1/\sqrt{2}, 0]$ e in $[1/\sqrt{2}, +\infty)$, punto di massimo locale $x = 0$, punti di minimo globale $x = \pm 1/\sqrt{2}$.

Esercizio 7.34

- (a) Strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(0, 5/2^{1/3}]$, strettamente crescente in $[5/2^{1/3}, +\infty)$, punto di minimo locale $x = 5/2^{1/3}$.
- (b) Strettamente crescente in $(-\infty, -2)$ e in $(-2, +\infty)$, nessun punto di minimo o massimo locale.
- (c) Strettamente crescente negli intervalli $[(-3\pi/4) + 2k\pi, (\pi/4) + 2k\pi]$, strettamente decrescente negli intervalli $[(\pi/4) + 2k\pi, (-3\pi/4) + 2k\pi]$, punti di minimo locale $x = (-3\pi/4) + 2k\pi$, punti di massimo locale $x = (\pi/4) + 2k\pi$, per $k \in \mathbb{Z}$.
- (d) Strettamente decrescente in $(-\infty, -1/\sqrt{e}]$ e in $[0, 1/\sqrt{e}]$, strettamente crescente in $[-1/\sqrt{e}, 0]$ e in $[1/\sqrt{e}, +\infty)$, punto di massimo locale $x = 0$, punti di minimo globale $x = \pm 1/\sqrt{e}$.
- (e) Strettamente decrescente in $(-\infty, 0]$, strettamente crescente in $[0, +\infty)$, punto di minimo globale $x = 0$.

Esercizio 7.35

Per le funzioni dell'Esercizio 7.33:

- (a) Punto di minimo assoluto $x = 0$, punti di massimo assoluto $x = \pm 10$.

- (b) Punto di minimo assoluto $x = -10$, punto di massimo assoluto $x = 10$.
- (c) Punto di minimo assoluto $x = -10$, punto di massimo assoluto $x = 10$.
- (d) Punto di minimo assoluto $x = 1$, punto di massimo assoluto $x = -10$.
- (e) Punti di minimo assoluto $x = \pm 1/\sqrt{2}$, punti di massimo assoluto $x = \pm 10$.

Per le funzioni dell'Esercizio 7.34:

- (a) Nessun punto di minimo o massimo assoluto.
- (b) Nessun punto di minimo o massimo assoluto.
- (c) Punti di minimo assoluto $x = -11\pi/4$, $x = -3\pi/4$, e $x = 5\pi/4$, punti di massimo assoluto $x = -7\pi/4$, $\pi/4$ e $9\pi/4$.
- (d) Punti di minimo assoluto $x = \pm 1/\sqrt{e}$, punti di massimo assoluto $x = \pm 10$.
- (e) Punto di minimo assoluto $x = 0$, punti di massimo assoluto $x = \pm 10$.

Esercizio 7.36 La Figura 6.36.(b): è l'unica che è positiva/negativa dove la funzione della Figura 6.36.(a) è crescente/decrescente.

Esercizio 7.37 Nel primo caso dev'essere un quadrato di 225 m di lato. Nel secondo caso, il lato parallelo alla siepe è lungo 450 m e quello ortogonale 225 m.

Esercizio 7.38

- (a) $\mu = 3$.
- (b) $\mu = b/2$.

Esercizio 7.39 Indicando con c_j la distanza fra P_j e la superficie, con Q_j la proiezione di P_j sulla superficie, con d la distanza fra Q_1 e Q_2 , e con P il punto in cui il raggio di luce incide sulla superficie, il tempo impiegato dalla luce per andare da P_1 a P_2 è dato da $t(\theta_1) = \frac{c_1}{v_1 \cos \theta_1} + \frac{c_2}{v_2 \cos \theta_2}$; inoltre θ_1 e θ_2 sono collegati dalla relazione $c_2 \tan \theta_2 = d - c_1 \tan \theta_1$. Derivando quest'ultima rispetto a θ_1 troviamo $\frac{c_2}{\cos^2 \theta_2} \frac{d\theta_2}{d\theta_1} = -\frac{c_1}{\cos^2 \theta_1}$. Quindi $t'(\theta_1) = \frac{c_1}{v_1 \cos^2 \theta_1} \sin \theta_1 + \frac{c_2}{v_2 \cos^2 \theta_2} \sin \theta_2 \frac{d\theta_2}{d\theta_1} = \frac{c_1}{\cos^2 \theta_1} \left(\frac{\sin \theta_1}{v_1} - \frac{\sin \theta_2}{v_2} \right)$ si annulla se e solo se $v_1/v_2 = \sin \theta_1/\sin \theta_2$.

Esercizio 7.40 $c = \frac{1}{0.2} \log 20.1 \simeq 15.0036$.

Esercizio 7.41

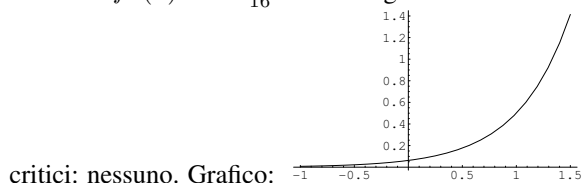
- (a) $t_0 = 2v_0(\sin \theta)/g$.
- (b) $\theta = \pi/4$, con $d(t_0) = v_0^2/g$.

Esercizio 7.42 È il cilindro di raggio $r = \sqrt{2/3}R$, altezza $\sqrt{2}r$ e volume $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}R^3$.

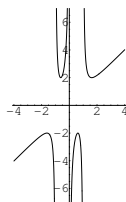
Studio qualitativo di funzioni

Esercizio 7.43

- (a) Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: $f(-1) = \frac{1}{128} \neq \pm \frac{1}{2} = \pm f(1)$, per cui non è né pari né dispari. Segno: sempre positiva. Limiti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Derivata prima: $f'(x) = \frac{3(\log 2)}{16} 2^{3x}$. Segno della derivata prima: sempre positiva. Derivata seconda: $f''(x) = \frac{9(\log 2)^2}{16} 2^{3x}$. Segno della derivata seconda: sempre positiva. Punti

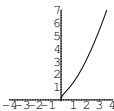


- (b) Dominio: $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Parità: dispari. Segno: positiva in $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$, negativa in $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Limiti: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1^\pm} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \mp\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \pm\infty$. Derivata prima: $f'(x) = \frac{(x^2+1)(x^4-3x^2+1)}{(x^3-x)^2}$. Segno della derivata prima: posto $x_1 = (\sqrt{5}+1)/2$ e $x_2 = (\sqrt{5}-1)/2$, è positiva in $(-\infty, -x_1) \cup (-x_2, 0) \cup (0, x_2) \cup (x_1, +\infty)$, e negativa in $(-x_1, -1) \cup (-1, -x_2) \cup (x_2, 1) \cup (1, x_1)$. Derivata seconda: $f''(x) = \frac{2(6x^4-3x^2+1)}{(x^3-x)^3}$. Segno della derivata seconda: positiva in $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$, negativa in $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$. Punti critici: $-x_1$ e x_2 sono punti di massimo locale, mentre $-x_2$



e x_1 sono punti di minimo locale. Grafico:

- (c) Dominio: $[0, +\infty)$. Parità: non ha senso. Segno: sempre positiva. Limiti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Derivata prima: $f'(x) = \frac{1+3x^2}{2\sqrt{x^3+x}}$. Segno della derivata prima: sempre positiva. Derivata seconda: $f''(x) = \frac{3x^4+6x^2-1}{4(x^3+x)^{3/2}}$. Segno della derivata seconda: positiva in $\left(\sqrt{(2/\sqrt{3})-1}, +\infty\right)$, negativa in $\left(0, \sqrt{(2/\sqrt{3})-1}\right)$. Punti critici: nessun punto di massimo o minimo locale, 0 è un punto di minimo globale; inoltre, $\sqrt{(2/\sqrt{3})-1}$ è



un punto di flesso obliquo. Grafico:

- (d) [Errata; lo studio della derivata seconda non è richiesto.] Dominio: $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$. Parità: non ha senso. Segno: sempre positiva. Limiti: $\lim_{x \rightarrow \pm 1^\pm} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Derivata prima:

$$f'(x) = \left(\frac{x^4-x^2+1}{x^3-x}\right)^{-1/2} \frac{(x^2+1)(x^4-3x^2+1)}{2(x^3-x)^2}.$$

Segno della derivata prima: posto $x_1 = (1+\sqrt{5})/2$ e $x_2 = (1-\sqrt{5})/2$, è positiva in $(x_2, 0) \cup (x_1, +\infty)$, e negativa in $(-1, -x_2) \cup (1, x_1)$. Derivata seconda:

$$f''(x) = \left(\frac{x^4-x^2+1}{x^3-x}\right)^{-3/2} \frac{3-12x^2+40x^4-46x^6+24x^8+4x^{10}-x^{12}}{4(x^3-x)^4}.$$

Segno della derivata seconda: non calcolabile in modo elementare, ma si può prevedere l'esistenza di un punto di flesso obliquo in un punto $x_3 > x_1$ in quanto $f(x)$ dev'essere convessa vicino a x_1 e si comporta come $\sqrt{x}$ (e quindi è concava) per $x \rightarrow +\infty$. Punti

critici: x_1 e x_2 sono punti di minimo globale, e $x_3 \simeq 6.69$ è un punto di flesso obliquo.

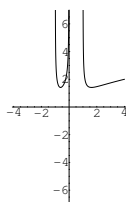


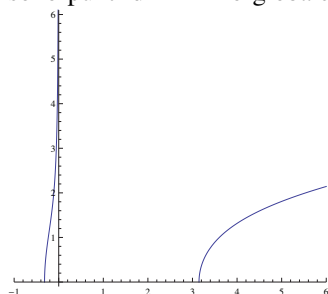
Grafico:

- (e) Dominio: $[-\sqrt{5-2\sqrt{6}}, 0) \cup [\sqrt{5+2\sqrt{6}}, +\infty)$. Parità: non ha senso. Segno: sempre maggiore o uguale di zero. Limiti: $f(-\sqrt{5-2\sqrt{6}}) = f(\sqrt{5+2\sqrt{6}}) = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Derivata prima: $f'(x) = \frac{x^6 + 4x^4 + 17x^2 + 2}{2(x^3 - 2x)^{3/2} \sqrt{x^4 - 10x^2 + 1}}$.

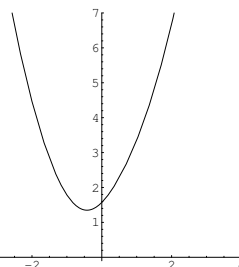
Segno della derivata prima: sempre positiva.

Derivata seconda: $f''(x) = \frac{-x^{12} - 40x^{10} + 102x^8 + 1484x^6 - 217x^4 - 252x^2 + 12}{4(x^3 - x)^{5/2}(x^4 - 10x^2 + 1)^{3/2}}$. Segno della

derivata seconda: non calcolabile in modo elementare, ma da $f''(-\sqrt{5-2\sqrt{6}}) < 0$ si può prevedere l'esistenza di (almeno) un punto di flesso obliquo $x_1 \in (-\sqrt{5-2\sqrt{6}}, 0)$; inoltre $f''(\sqrt{5+2\sqrt{6}}) < 0$ e $f(x)$ si comporta come $\sqrt{x}$, che è concava, per x grande, per cui non ci aspettiamo altri flessi. Punti critici: $-\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ e $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ sono punti di minimo globale; $x_1 \simeq -0.215$ è un punto di flesso obliquo. Grafico:



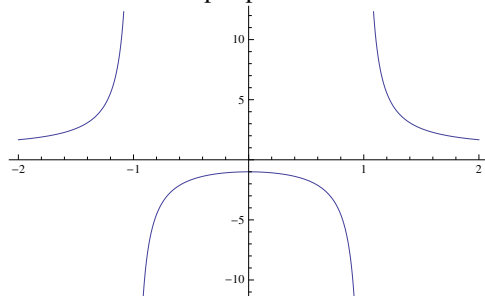
- (f) [Errata: lo studio del segno della derivata seconda è richiesto.] Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: $f(-1) = 1 + \pi/4 \neq \pm(1 + 3\pi/4) = \pm f(1)$, per cui non è né pari né dispari. Segno: sempre positiva. Limiti: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$. Derivata prima: $f'(x) = 2x + \frac{1}{1+x^2}$. Segno della derivata prima: negativa in $(-\infty, x_1)$ e positiva in $(x_1, +\infty)$, dove $x_1 \simeq -0.42$ è l'unica radice reale dell'equazione $2x^3 + 2x + 1 = 0$. Derivata seconda: $f''(x) = 2 - \frac{2x}{(x^2+1)^2}$. Segno della derivata seconda: sempre positiva. Punti critici: x_1



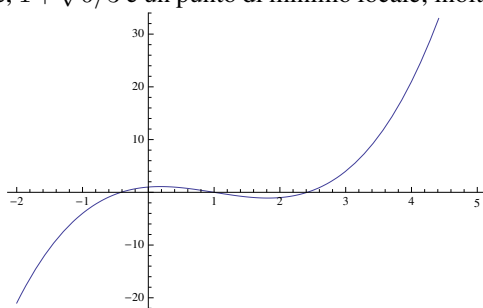
è un punto di minimo globale. Grafico:

- (g) Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Parità: è pari. Segno: negativa in $(-1, 1)$, positiva altrove. Limiti: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow -1^\pm} f(x) = \mp\infty$. Derivata prima: $f'(x) = -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$. Segno della derivata prima: positiva in $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$ e

negativa in $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. Derivata seconda: $f''(x) = \frac{4(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$. Segno della derivata seconda: sempre positiva. Punti critici: 0 è un punto di massimo locale. Grafico:

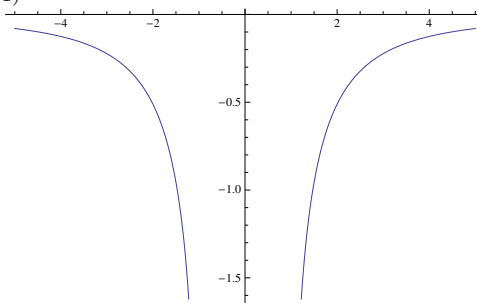


- (h) Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: $f(-1) = -4 \neq \pm 0 = \pm f(1)$, per cui non è né pari né dispari. Segno: negativa in $(-\infty, 1 - \sqrt{2}) \cup (1, 1 + \sqrt{2})$, positiva in $(1 - \sqrt{2}, 1) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty)$. Limiti: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Derivata prima: $f'(x) = -3x^2 - 6x + 1$. Segno della derivata prima: positiva in $(-\infty, 1 - \sqrt{6}/3) \cup (1 + \sqrt{6}/3, +\infty)$ e negativa in $(1 - \sqrt{6}/3, 1 + \sqrt{6}/3)$. Derivata seconda: $f''(x) = 6x - 6$. Segno della derivata seconda: negativa in $(-\infty, 1)$, positiva in $(1, +\infty)$. Punti critici: $1 - \sqrt{6}/3$ è un punto di massimo locale, $1 + \sqrt{6}/3$ è un punto di minimo locale; inoltre 1 è un punto di flesso



obliquo. Grafico:

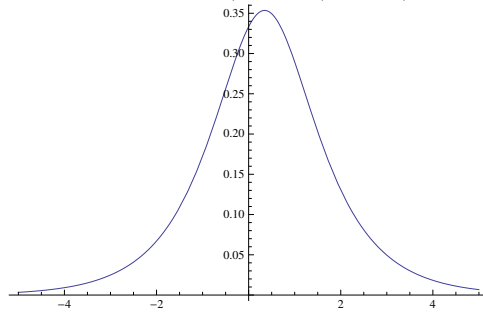
- (i) Dominio: $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Parità: è pari. Segno: sempre negativa. Limiti: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$. Derivata prima: $f'(x) = \frac{4x}{x^4-1}$. Segno della derivata prima: negativa in $(-\infty, 1)$ e positiva in $(1, +\infty)$. Derivata seconda: $f''(x) = -\frac{4(3x^4+1)}{(x^4-1)^2}$. Segno della derivata seconda: sempre negativa. Punti



critici: nessuno. Grafico:

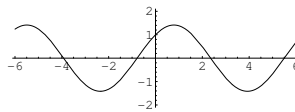
- (j) Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: $f(\log 2) = \frac{1}{3} \neq \pm \frac{2}{9} = \pm f(-\log 2)$, per cui non è né pari né dispari. Segno: positiva. Limiti: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$. Derivata prima:

$f'(x) = -\frac{e^x(e^{2x}-2)}{(e^{2x}+2)^2}$. Segno della derivata prima: positiva in $(-\infty, \frac{1}{2} \log 2)$ e negativa in $(\frac{1}{2} \log 2, +\infty)$. Derivata seconda: $f''(x) = \frac{e^x(e^{4x}-12e^{2x}+4)}{(e^{2x}+2)^3}$. Segno della derivata seconda: positivo in $(-\infty, \log(2-\sqrt{2})) \cup (\log(2+\sqrt{2}), +\infty)$, negativo in $(\log(2-\sqrt{2}), \log(2+\sqrt{2}))$. Punti critici: $\frac{1}{2} \log 2$ è un punto di massimo globale; inoltre, $\log(2-\sqrt{2})$ e $\log(2+\sqrt{2})$ sono punti di flesso obliquo. Grafico:



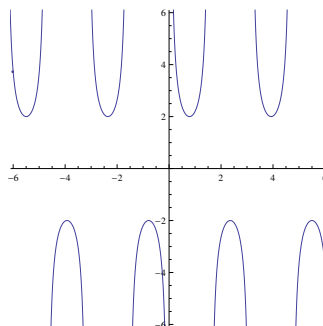
Esercizio 7.44

- (a) $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$. Periodo: 2π . Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: $f(-\pi/4) = 0 \neq \pm\sqrt{2} = \pm f(\pi/4)$, per cui non è né pari né dispari. Segno: positiva negli intervalli $(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Limiti: non ammette limite per $x \rightarrow \pm\infty$. Derivata prima: $f'(x) = -\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$. Segno della derivata prima: positiva negli intervalli $(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Derivata seconda: $f''(x) = -\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4})$. Segno della derivata seconda: negativa negli intervalli $(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Punti critici: $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di massimo globale; $-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di minimo globale. Inoltre $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di



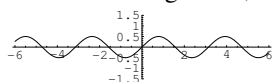
flesso obliquo. Grafico:

- (b) $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin(2x)}$. Periodo: π . Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Parità: dispari. Segno: positiva negli intervalli $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Limiti: non ammette limite per $x \rightarrow \pm\infty$; $\lim_{x \rightarrow k\pi^+} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^-} f(x) = \mp\infty$. Derivata prima: $f'(x) = -\frac{2 \cos(2x)}{\sin^2(2x)}$. Segno della derivata prima: negativa negli intervalli $(-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi) \cup (k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Derivata seconda: $f''(x) = 4 \frac{2 \cos^2(2x) + \sin^2(2x)}{\sin^3(2x)}$. Segno della derivata seconda: positiva negli intervalli $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Punti critici: $\frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di minimo locale; $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti

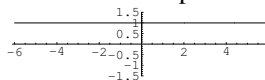


di massimo locale. Grafico:

- (c) $\sin(x) \cos(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$. Periodo: π . Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: dispari. Segno: positiva negli intervalli $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Limiti: non ammette limite per $x \rightarrow \pm\infty$. Derivata prima: $f'(x) = \cos(2x)$. Segno della derivata prima: positiva negli intervalli $(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Derivata seconda: $f''(x) = -2\sin(2x)$. Segno della derivata seconda: negativa negli intervalli $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Punti critici: $\frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di massimo globale; $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di minimo globale; inoltre, $k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di flesso obliquo. Grafico:

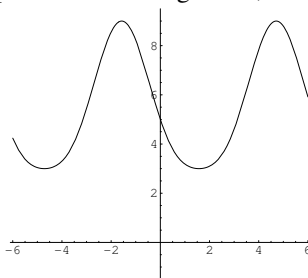


- (d) $\tan(x) \cot(x) \equiv 1$ dove definita. Periodo: π . Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Parità: pari. Segno: positiva ove definita. Limiti: $\lim_{x \rightarrow (k\frac{\pi}{2})^+} f(x) = 1 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$. Derivata prima: $f'(x) \equiv 0$. Segno della derivata prima: sempre nulla. Derivata seconda: $f''(x) \equiv 0$. Segno della derivata seconda: sempre nulla. Punti critici: tutti i punti del dominio



sono punti di massimo, minimo e flesso. Grafico:

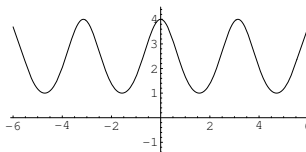
- (e) Periodo: 2π . Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: $f(-\pi/2) = 9 \neq \pm 3 = \pm f(\pi/2)$, per cui non è né pari né dispari. Segno: sempre positiva. Limiti: non ammette limite per $x \rightarrow \pm\infty$. Derivata prima: $f'(x) = (2 \sin x - 3) \cos x$. Segno della derivata prima: negativa negli intervalli $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Derivata seconda: $f''(x) = 2 - 3 \sin x - 4 \sin^2 x$. Segno della derivata seconda: positiva negli intervalli $(2k\pi, \pi + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Punti critici: $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di massimo globale; $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di minimo globale; inoltre, $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di flesso



obliquo. Grafico:

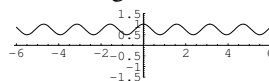
- (f) $\cos^4 x + 2 \cos^2 x + 1 = (\cos^2 x + 1)^2 = \frac{1}{4} (\cos(2x) + 3)^2$. Periodo: π . Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: pari. Segno: sempre positiva. Limiti: non ammette limite per $x \rightarrow \pm\infty$. Derivata prima: $f'(x) = -(\cos(2x) + 3) \sin(2x)$. Segno della derivata prima: negativa negli intervalli $(k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Derivata seconda: $f''(x) = 2 + 6 \cos(2x) -$

$4 \cos^2(2x)$. Segno della derivata seconda: posto $x_1 = \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{3-\sqrt{17}}{4}\right) \simeq 0.928$, positiva negli intervalli $(-x_1 + k\pi, x_1 + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Punti critici: $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di massimo globale; $\frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di minimo globale; inoltre,



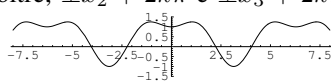
$\pm x_1 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono flessi obliqui. Grafico:

- (g) $\cos^4 x + \sin^4 x = \frac{1}{4}(\cos(4x) + 3)$. Periodo: $\pi/2$. Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: pari. Segno: sempre positiva. Limiti: non ammette limite per $x \rightarrow \pm\infty$. Derivata prima: $f'(x) = -\sin(4x)$. Segno della derivata prima: negativa negli intervalli $(k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2})$, con $k \in \mathbb{Z}$. Derivata seconda: $f''(x) = -4 \cos(4x)$. Segno della derivata seconda: negativa negli intervalli $(-\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2})$, con $k \in \mathbb{Z}$. Punti critici: $k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di massimo globale; $\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di minimo globale; inoltre, $\pm\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$

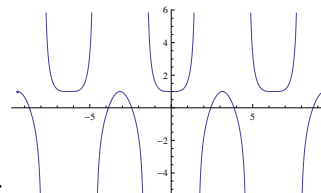


con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di flesso obliquo. Grafico:

- (h) Periodo: 2π . Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: pari. Segno: posto $x_1 = \arccos \frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq 2.237$, è positiva negli intervalli $(-x_1 + 2k\pi, x_1 + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Limiti: non ammette limite per $x \rightarrow \pm\infty$. Derivata prima: $f'(x) = (2 \cos x - 1) \sin x$. Segno della derivata prima: positiva negli intervalli $(2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi) \cup (\pi + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Derivata seconda: $f''(x) = 2 \cos(2x) - \cos x$. Segno della derivata seconda: posto $x_2 = \arccos \frac{1+\sqrt{33}}{8} \simeq 0.568$ e $x_3 = \arccos \frac{1-\sqrt{33}}{8} \simeq 2.206$, è positiva negli intervalli $(-x_2 + 2k\pi, x_2 + 2k\pi) \cup (x_3 + 2k\pi, 2\pi - x_3 + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Punti critici: $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ e $\frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di massimo globale; $2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di minimo locale; $\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di minimo globale; inoltre, $\pm x_2 + 2k\pi$ e $\pm x_3 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di flesso obliquo. Grafico:



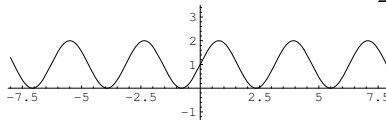
- (i) Periodo: 2π . Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Parità: pari. Segno: se $x_0 \simeq -0.755$ è l'unica radice reale dell'equazione $y^3 - y^2 + 1 = 0$, posto $x_1 = \arccos x_0 \simeq 2.426$, è positiva negli intervalli $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (x_1 + 2k\pi, 2\pi - x_1 + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Limiti: non ammette limite per $x \rightarrow \pm\infty$; $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^\pm} f(x) = \mp\infty$; $\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi)^\pm} f(x) = \pm\infty$. Derivata prima: $f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} (1 - \cos x) (2 \cos^2 x + \cos x + 1)$. Segno della derivata prima: positiva negli intervalli $(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Derivata seconda: $f''(x) = \frac{1}{\cos^3 x} (2(1 - \cos^3 x) + \sin^2(2x)(\cos x - \frac{1}{4}))$. Segno della derivata seconda: è positiva negli intervalli $(-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Punti critici: $2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di minimo locale;



$\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di massimo locale. Grafico:

- (j) $1 + 2 \sin(x) \cos(x) = 1 + \sin(2x)$. Periodo: π . Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: $f(-\pi/4) =$

$0 \neq \pm 2 = \pm f(\pi/4)$, per cui non è né pari né dispari. Segno: sempre positiva. Limiti: non ammette limite per $x \rightarrow \pm\infty$. Derivata prima: $f'(x) = 2 \cos(2x)$. Segno della derivata prima: positiva negli intervalli $(-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Derivata seconda: $f''(x) = -4 \sin(2x)$. Segno della derivata seconda: è negativa negli intervalli $(k\pi, \pi/2 + k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Punti critici: $\frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di massimo globale; $-\frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono punti di minimo globale; inoltre, $k\frac{\pi}{2}$ con $k \in \mathbb{Z}$



sono punti di flesso obliquo. Grafico:

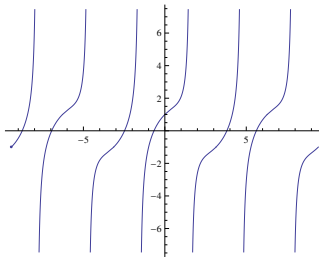
(k) $\tan(x) + \cos(x) = \frac{\sin x + \cos^2 x}{\cos x}$. Periodo: 2π . Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Parità: $f(-\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \neq \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) = \pm f(\pi/4)$, per cui non è né pari né dispari.

Segno: posto $x_1 = -\arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} \simeq 0.666$, è positiva negli intervalli $(-x_1 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\pi + x_1 + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$. Limiti: non ammette limite per $x \rightarrow \pm\infty$;

$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2} + k\pi)^\pm} f(x) = \mp\infty$. Derivata prima: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - \sin x$. Segno della derivata

prima: sempre positiva. Derivata seconda: $f''(x) = \frac{2 \sin x - \cos^4 x}{\cos^3 x}$. Segno della derivata

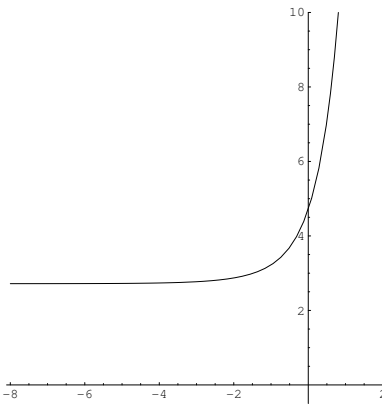
seconda: se $y_0 \simeq 0.37$ è l'unica radice reale dell'equazione $y^4 - 2y^2 - 2y + 1 = 0$ contenuta nell'intervallo $[-1, 1]$, posto $x_0 = \arcsin y_0 \simeq 0.381$ è negativa negli intervalli $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, x_0 + 2k\pi) \cup (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi - x_0 + 2k\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Punti critici: non ci sono punti di massimo o minimo locale; inoltre, $\pm x_0 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ sono



punti di flesso obliqui. Grafico:

Esercizio 7.45

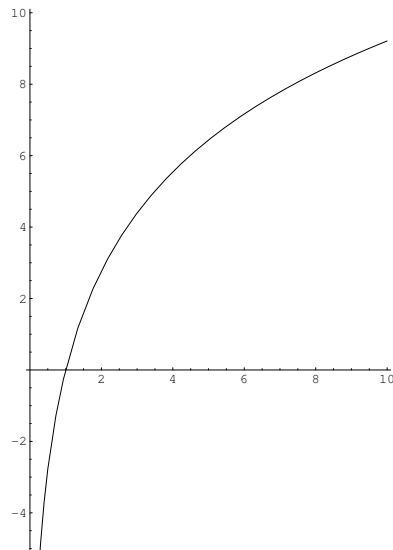
- (a) Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: $f(-1) = e + e^{-1} + e^{-2} \neq \pm(2e + e^2) = \pm f(1)$, per cui non è né pari né dispari. Segno: sempre positiva. Limiti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e$. Derivata prima: $f'(x) = e^x + 2e^{2x}$. Segno della derivata prima: sempre positiva. Derivata seconda: $f''(x) = e^x + 4e^{2x}$. Segno della derivata seconda: sempre positiva. Punti critici: non ci sono né punti di massimo o minimo locale né



punti di flesso. Grafico:

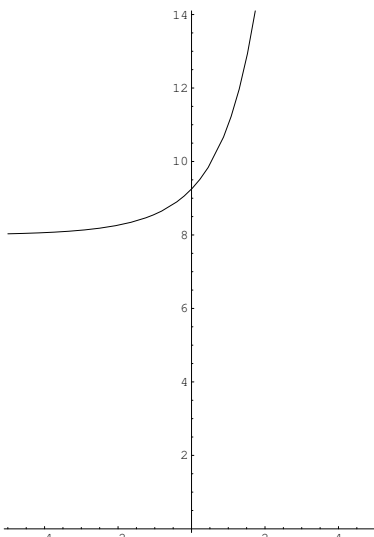
- (b) $\log(x) + \log(x^2) + \frac{1}{3} \log(x^3) = 4 \log x$. Dominio: $\mathbb{R}^+$. Parità: non ha senso. Segno: positiva nella semiretta $(1, +\infty)$. Limiti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

Derivata prima: $f'(x) = \frac{4}{x}$. Segno della derivata prima: sempre positiva. Derivata seconda: $f''(x) = -\frac{4}{x^2}$. Segno della derivata seconda: sempre negativa. Punti critici: non ci sono né punti di massimo o minimo locale né punti di flesso. Grafico:



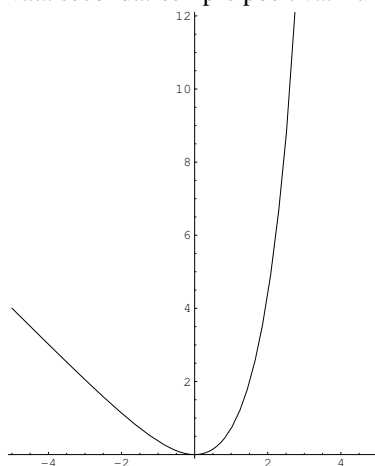
- (c) Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: $f(-1) = \frac{137}{16} \neq \pm 11 = \pm f(1)$, per cui non è né pari né dispari. Segno: sempre positiva. Limiti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 8$.

Derivata prima: $f'(x) = (\log 2)(2^x + 2 \cdot 4^{x-1})$. Segno della derivata prima: sempre positiva. Derivata seconda: $f''(x) = (\log 2)^2(2^x + 4^x)$. Segno della derivata seconda: sempre positiva. Punti critici: non ci sono né punti di massimo o minimo locale né



punti di flesso. Grafico:

- (d) Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: $f(-1) = e^{-1} \neq \pm(e - 2) = \pm f(1)$, per cui non è né pari né dispari. Segno: sempre positiva. Limiti: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$. Derivata prima: $f'(x) = e^x - 1$. Segno della derivata prima: positiva nella semiretta $(0, +\infty)$. Derivata seconda: $f''(x) = e^x$. Segno della derivata seconda: sempre positiva. Punti critici: 0 è



un punto di minimo globale. Grafico:

- (e) Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: $f(-1) = e^{-1} - 3 \neq \pm(e + 1) = \pm f(1)$, per cui non è né pari né dispari. Segno: positiva nella semiretta $(0, +\infty)$. Limiti: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$. Derivata prima: $f'(x) = e^x + 2$. Segno della derivata prima: sempre positiva. Derivata seconda: $f''(x) = e^x$. Segno della derivata seconda: sempre positiva. Punti critici: non ci sono né punti di massimo o minimo locale né punti di flesso.

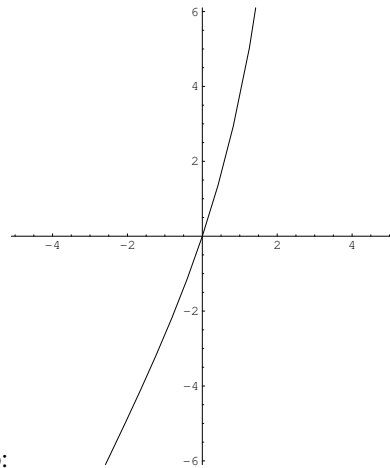
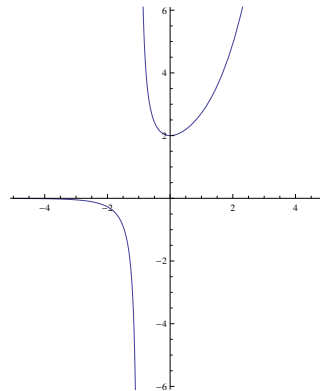


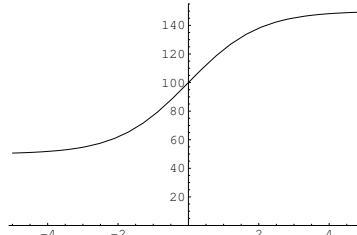
Grafico:

Esercizio 7.46 Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Parità: il dominio non è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate, per cui N non è né pari né dispari. Segno: positiva nella semiretta $(-1, +\infty)$. Limiti: $\lim_{x \rightarrow +\infty} N(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} N(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -1^\pm} N(x) = \pm\infty$. Derivata prima: $N'(x) = \frac{2xe^x}{(1+x)^2}$. Segno della derivata prima: positiva nella semiretta $(0, +\infty)$. Derivata seconda: $f''(x) = \frac{2e^x(x^2+1)}{(x+1)^3}$. Segno della derivata seconda: sempre positiva.



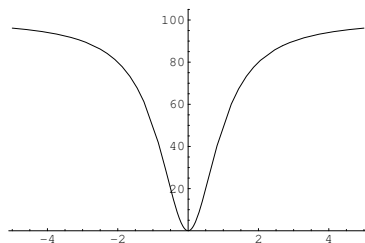
Punti critici: 0 è un punto di minimo locale. Grafico:

Esercizio 7.47 Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: $N(-1) = \frac{50(e+3)}{1+e} \neq \pm \frac{50(1+3e)}{1+e} = \pm N(1)$, per cui non è né pari né dispari. Segno: sempre positiva. Limiti: $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 150$; $\lim_{t \rightarrow -\infty} N(t) = 50$. Derivata prima: $N'(t) = \frac{100e^t}{(1+e^t)^2}$. Segno della derivata prima: sempre positiva. Derivata seconda: $N''(t) = \frac{100e^t(e^t-1)}{(1+e^t)^3}$. Segno della derivata seconda: positiva nella semiretta $(-\infty, 0)$. Punti critici: non ci sono punti di massimo o minimo locale;



inoltre, 0 è un punto di flesso obliquo. Grafico:

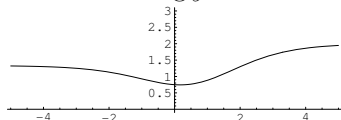
Esercizio 7.48 $50 + 50\frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{100x^2}{x^2+1}$. Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: pari. Segno: sempre positiva. Limiti: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U(x) = 100$. Derivata prima: $U'(x) = \frac{200x}{(x^2+1)^2}$. Segno della derivata prima: positiva nella semiretta $(0, +\infty)$. Derivata seconda: $U''(x) = \frac{200(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$. Segno della derivata seconda: positiva nell'intervallo $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Punti critici: 0 è un punto di minimo globale; inoltre, $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ sono punti di flesso obliquo. Grafico:



Esercizio 7.49 Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: $V(-\log 2) = \frac{6}{7} \neq \pm\frac{4}{5} = \pm V(\log 2)$, per cui non è né pari né dispari. Segno: sempre positiva. Limiti: $\lim_{u \rightarrow +\infty} V(u) = 2$;

$\lim_{u \rightarrow -\infty} V(u) = \frac{4}{3}$. Derivata prima: $V'(u) = \frac{4e^u(2e^{2u} + e^u - 4)}{(e^u + 1)^2(e^u + 3)^2}$. Segno della derivata prima:

posto $x_0 = \log \frac{\sqrt{33}-1}{4} \simeq 1.186$, è positiva nella semiretta $(x_0, +\infty)$. Derivata seconda: $V''(u) = -\frac{8e^u(e^{4u} - 3e^{3u} - 15e^{2u} - 11e^u + 6)}{(e^u + 1)^3(e^u + 3)^3}$. Segno della derivata seconda: avendo un minimo globale e due asintoti orizzontali raggiunti da sotto, devono esserci almeno due flessi, uno minore di x_0 e l'altro maggiore di x_0 . In effetti, se $y_1 \simeq 0.359$ e $y_2 = 5.854$ sono le due radici reali dell'equazione $y^4 - 3y^3 - 15y^2 - 11y + 6 = 0$, allora la derivata seconda è positiva nell'intervallo $(\log y_1, \log y_2)$. Punti critici: x_0 è un punto di minimo globale; inoltre $\log y_1 \simeq -1.025$ e $\log y_2 \simeq 1.767$ sono punti di flesso obliquo. Grafico:

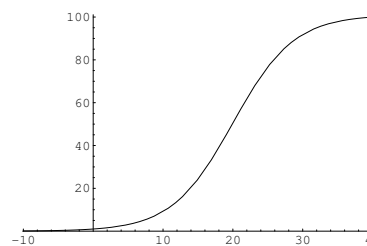


Questo modello suggerisce che se il dromedario beve meno di x_0 unità d'acqua il volume della gobba diminuisce (cioè il dromedario per sopravvivere deve consumare l'acqua contenuta nella gobba), mentre se ne beve di più il volume della gobba aumenta (quindi il dromedario riesce a incamerare acqua nella gobba), anche se non può superare un volume massimo di 2 unità.

Esercizio 7.50 Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: $i(-10) = \frac{101}{1001} \neq \pm\frac{101}{11} = \pm i(10)$, per cui non è né pari né dispari. Segno: sempre positiva. Limiti: $\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = 101$; $\lim_{t \rightarrow -\infty} i(t) =$

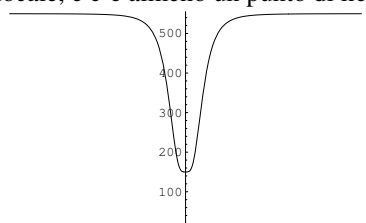
0. Derivata prima: $i'(t) = \frac{1010 \log(10) 10^{-0.1t}}{(1+100 \cdot 10^{-0.1t})^2}$. Segno della derivata prima: sempre positiva.

Derivata seconda: $i''(t) = \frac{101 \log(10)^2 10^{-0.1t} (100 \cdot 10^{-0.1t} - 1)}{(1+100 \cdot 10^{-0.1t})^3}$. Segno della derivata seconda: positiva nella semiretta $(-\infty, 20)$. Punti critici: non ha punti di minimo o massimo locale;



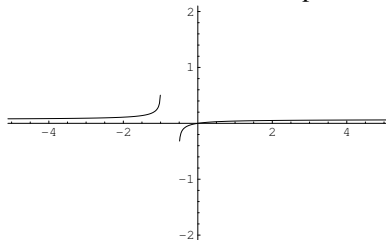
20 è un punto di flesso obliquo. Grafico: La popolazione si estingue completamente 15 minuti dopo il tempo t_0 per cui $i(t_0) = 100$, cioè dopo 55 minuti.

Esercizio 7.51 Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: pari. Segno: sempre positiva. Limiti: $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} P(t) = 550$. Derivata prima: $P'(t) = \frac{400\pi t}{(t^2+1)^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{t^2-1}{t^2+1}\right)$. Segno della derivata prima: positiva in $(0, +\infty)$. Derivata seconda: $P''(t) = -\frac{400\pi}{(t^2+1)^4} \left[2\pi t^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{t^2-1}{t^2+1}\right) + (3t^4 + 2t^2 - 1) \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{t^2-1}{t^2+1}\right) \right]$. Segno della derivata seconda: non è calcolabile in modo elementare. Però si vede facilmente che è negativa nelle semirette $(-\infty, 1] \cup [1, +\infty)$, che si annulla in $t = 0$, e che è positiva per $t \neq 0$ piccolo; quindi ci dev'essere almeno un flesso obliquo in $(0, 1)$ e uno in $(-1, 0)$. Punti critici: 0 è un punto minimo globale, non ci sono punti di massimo locale, e c'è almeno un punto di flesso obliquo in $(-1, 0)$ e almeno



uno in $(0, 1)$. Grafico:

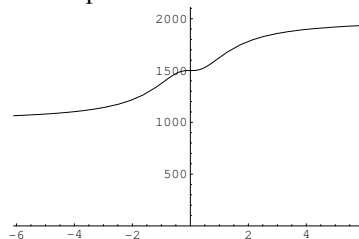
Esercizio 7.52 Dominio: $(-\infty, -1) \cup (-1/2, +\infty)$. Parità: non ha senso, in quanto il dominio non è simmetrico rispetto all'origine. Segno: positiva in $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$. Limiti: $\lim_{I \rightarrow \pm\infty} A(I) = 0.1 \log 2 \simeq 0.069$; $\lim_{I \rightarrow -1^-} A(I) = +\infty$; $\lim_{I \rightarrow (-1/2)^+} A(I) = -\infty$. Derivata prima: $A'(I) = \frac{1}{10(2I^2+3I+1)}$. Segno della derivata prima: positiva nel dominio di A . Derivata seconda: $A''(I) = -\frac{4I+3}{10(2I^2+3I+1)^2}$. Segno della derivata seconda: positiva in $(-\infty, -1)$. Punti critici: non ci sono né punti di massimo o minimo locale né punti di



flesso. Grafico:

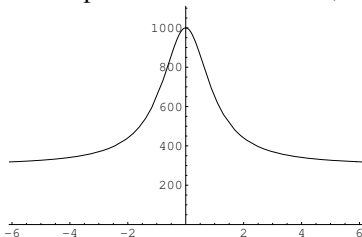
Esercizio 7.53 Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: $N(-1) = 1375 \neq \pm 1625 = \pm N(1)$, per cui non è né pari né dispari. Segno: sempre positiva. Limiti: $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = 2000$; $\lim_{t \rightarrow -\infty} N(t) = 1000$. Derivata prima: $N'(t) = \frac{1000t(t+2\arctan t)}{\pi(t^2+1)^2}$. Segno della derivata prima: sempre positiva tranne in $t = 0$ dove si annulla. Derivata seconda: $N''(t) =$

$-\frac{2000[t(t^2-2)+(3t^2-1)\arctan t]}{\pi(t^2+1)^3}$. Segno della derivata seconda: non è studiabile in modo elementare, ma possiamo dire che si annulla in $t = 0$, è positiva in $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup (0, 3^{-1/2}]$, e negativa in $[-3^{-1/2}, 0) \cup [\sqrt{2}, +\infty)$; quindi ci dev'essere un flesso obliquo in $(-\sqrt{2}, -3^{-1/2})$ e uno in $(3^{-1/2}, \sqrt{2})$. Punti critici: non ci sono punti di massimo o minimo locale, 0 è un punto di flesso orizzontale; inoltre ci sono almeno un punto di flesso obli-



quo in $(-\sqrt{2}, -3^{-1/2})$ e almeno uno in $(3^{-1/2}, \sqrt{2})$. Grafico: In un lontano futuro la popolazione dei camaleonti tenderà a raggiungere crescendo le 2000 unità, e nel lontano passato era di poco superiore alle 1000 unità.

Esercizio 7.54 Dominio: tutto $\mathbb{R}$. Parità: pari. Segno: sempre positiva. Limiti: $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} P(t) = 300$. Derivata prima: $P'(t) = -\frac{1400t}{(t^2+1)^2}$. Segno della derivata prima: negativa in $(0, +\infty)$. Derivata seconda: $P''(t) = \frac{1400(3t^2-1)}{(t^2+1)^3}$. Segno della derivata seconda: positiva in $(-\infty, -3^{-1/2}) \cup (3^{-1/2}, +\infty)$. Punti critici: 0 è un punto di massimo globale, non ci sono punti di minimo locale; inoltre $\pm 3^{-1/2}$ sono punti di flesso obliquo. Grafi-



co: La popolazione delle caprette nel lontano futuro decrescerà fino a 300 unità, e nel lontano passato era di poco superiore alle 300 unità.

La regola di de l'Hôpital

Esercizio 7.55 Rispettivamente 15 e $6/\pi$.

Esercizio 7.56

- (a) 4.
- (b) 0.
- (c) $+\infty$.
- (d) $-1/2$.
- (e) $1/3$.

Esercizio 7.57

- (a) α/β .
- (b) $1/6$.
- (c) $3^{-1/3}b^{-2/3}$.
- (d) -2 .
- (e) 1.

Esercizio 7.58

- (a) 1.

- (b) $1/5$.
 (c) $s^{-1/3}$.
 (d) 0.
 (e) 0.

Esercizio 7.59 $a = -3$ e $b = 9/2$.

Esercizio 7.60 $\frac{Rt}{\mu}$.

Esercizio 7.61 $-\frac{Mt}{2\omega} \cos(\omega t)$.

Sviluppo di Taylor

Esercizio 7.62 $P_1(x) = P_2(x) = x$.

Esercizio 7.63 $P_1(x) = e + 2e(x-1)$; $P_2(x) = e + 2e(x-1) + \frac{3}{2}e(x-1)^2$.

Esercizio 7.64 $P_1(x) = 4 \log 2 + 2(1 + 2 \log 2)(x-2)$;
 $P_2(x) = 4 \log 2 + 2(1 + 2 \log 2)(x-2) + (\frac{3}{2} + \log 2)(x-2)^2$.

Esercizio 7.65

- (a) $1 - 2x^2 + o(x^3)$.
 (b) $1 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{4}{81}x^3 + o(x^3)$.
 (c) $x^2 + o(x^3)$.
 (d) $x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$.
 (e) $-1 + x^2$.
 (f) $\log 2 + \frac{\log 2}{2}x + \frac{(\log 2)^2}{8}x^2 + o(x^3)$.
 (g) $1 + cx + \frac{c(c-1)}{2}x^2 + \frac{c(c-1)(c_2)}{6}x^3 + o(x^3)$.

Esercizio 7.66 $1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n})$.

Esercizio 7.67 $P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+1})$.
 Il più piccolo n_0 per cui $4P_n(1) \simeq 3.1$ alle prime due cifre decimali per ogni $n \geq n_0$ è $n_0 = 49$. [Il più piccolo n_0 per cui $4P_n(1) \simeq 3.14$ alle prime due cifre decimali per ogni $n \geq n_0$ è $n_0 = 1249$.]

Esercizio 7.68 $\sqrt{17} \simeq 4.12$.

Esercizio 7.69

- (a) $\log 9 \simeq 0.95$.
 (b) $\log 9.5 \simeq 0.97$.
 (c) $\log 10.7 \simeq 1.02$.
 (d) $\log 11 \simeq 1.04$.

Esercizio 7.70 $1 + x + \frac{1}{n^2} \binom{n}{2} x^2 + \frac{1}{n^3} \binom{n}{3} x^3 + \frac{1}{n^4} \binom{n}{4} x^4 + \frac{1}{n^5} \binom{n}{5} x^5 + o(x^5)$.

Esercizio 7.71 $N_0 e^{-1/4} \left(5 - \frac{1}{4}(t-5) + \frac{1-320\pi^2}{160}(t-5)^2 \right) + o((t-5)^2)$.

Esercizio 7.72

- (a) $GMm \left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{2}{r_0^3}(r-r_0) + \frac{3}{r_0^4}(r-r_0)^2 \right) + o((r-r_0)^2)$.
 (b) $M \simeq gr_0^2/G \simeq 5.962 \cdot 10^{24}$ kg.

Esercizio 7.73

- (a) L'Esempio 7.29 dice che $f(x) = o(x^{2k})$ per ogni $k > 0$. Siccome $x^{2k+1} = o(x^{2k})$ per $x \rightarrow 0$, otteniamo $f(x) = o(x^m)$ per ogni $m > 0$.

- (b) $f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-1/x^2} = f(x)P_1(1/x)$ dove $P_1(t) = 2t^3$. Se $f^{(n)}(x) = f(x)P_n(1/x)$ allora $f^{(n+1)}(x) = f'(x)P_n(1/x) - f(x)\frac{1}{x^2}P'_n(1/x) = f(x)P_{n+1}(1/x)$ dove $P_{n+1}(t) = P_1(t)P_n(t) - t^2P'_n(t)$ è ancora un polinomio. Quindi partendo da $n = 1$ e procedendo un intero per volta (cioè usando il principio di induzione; vedi la Curiosità 7.2) otteniamo la tesi per ogni $n > 0$.
- (c) Il rapporto incrementale di f in 0 è $f(x)/x$, che tende a 0 perché $f(x) = o(x)$; quindi $f'(0) = 0$. Il rapporto incrementale di f' in 0 è $f'(x)/x = f(x)\frac{P_1(x)}{x} = f(x)Q_1(1/x)$, dove $Q_1(t) = tP_1(t)$ è un polinomio; quindi $f'(x)/x$ si può scrivere come somma di termini della forma $a_m f(x)/x^m$ per opportune costanti $a_m \in \mathbb{R}$, e quindi tende a 0 per $x \rightarrow 0$ grazie alla parte (a). Lo stesso ragionamento si applica anche alle derivate di ordine superiore.

Propagazione degli errori

Esercizio 7.74

- (a) $E_r \approx \frac{1}{2}e_r = 2.5\%$.
 (b) $E_r \approx -\frac{1}{2}e_r = -2.5\%$.

Esercizio 7.75 $E_r \approx \frac{2(\phi^2/16)}{1+(\phi^2/16)}e_r = \frac{10(\phi^2/16)}{1+(\phi^2/16)}\%$.

Esercizio 7.76

- (a) $E_r \approx e_r = 2.5\%$.
 (b) $E_r \approx -a_0 x e_r = -2.5a_0 x\%$.
 (c) $E_r \approx -a_0 x e_r = -2.5a_0 x\%$.

Il metodo di Newton-Raphson-Wallis

Esercizio 7.77 Vogliamo risolvere l'equazione $f(t) = \frac{1}{16} \sin\left(\frac{2\pi}{16}t\right) + \frac{1}{5} \sin(2\pi t) = 0$. Appliciamo il metodo di Newton-Raphson-Wallis con $t_0 = 1$ (l'istante in cui le variazioni periodiche più frequenti raggiungono il massimo); otteniamo $t_1 = t_0 - f(t_0)/f'(t_0) \simeq 0.98130$ e $t_2 = t_1 - f(t_1)/f'(t_1) \simeq 0.98126$; quindi il tempo cercato è $\bar{t} \simeq 0.981$ (per essere sicuri che si tratta di un massimo locale e non di un minimo o un punto di flesso basta notare che $N''(\bar{t}) < 0$).

Esercizio 7.78

- (a) Partendo da $x_0 = \pi/2$ si trova $\bar{x} \simeq 0.824$.
 (b) Partendo da $x_0 = 1$ si trova $\bar{x} \simeq 0.7805$.
 (c) Partendo da $x_0 = 1$ si trova $\bar{x} \simeq 0.6529$.

Esercizio 7.79 Partendo da $t_0 = 20$ si trova $\bar{t} \simeq 23.42$ in due passaggi; partendo da $t_0 = 0$ si arriva allo stesso risultato ma in 22 passaggi.

Derivate parziali

Esercizio 7.80

- (a) $\frac{\partial F}{\partial x} \equiv \alpha$; $\frac{\partial F}{\partial y} \equiv \beta$.
 (b) $\frac{\partial F}{\partial s}(s, t) = 2e^{2s+3t}$; $\frac{\partial F}{\partial t}(s, t) = 3e^{2s+3t}$.
 (c) $\frac{\partial G}{\partial u}(u, v) = 12 \sin(6u - 5v)$; $\frac{\partial G}{\partial v}(u, v) = 10 \sin(6u - 5v)$.
 (d) $\frac{\partial \Psi}{\partial a}(a, b) = -2(2a - b)^{-2}$; $\frac{\partial \Psi}{\partial b}(a, b) = (2a - b)^{-2}$.
 (e) $\frac{\partial R}{\partial v}(v, w) = w/v$; $\frac{\partial R}{\partial w}(v, w) = \log v$.

Esercizio 7.81

- (a) $2x^3z - 4z^3$.
- (b) $-3t^2/s^4$.
- (c) $-t \sin(\omega t + t_0)$.
- (d) $(p - qx^{-2})x/(q + px^2)$.

Esercizio 7.82

- (a) $(1/10, 2/5)$.
- (b) $(0, 0)$.
- (c) $(1, 2)$.
- (d) $(4, 3)$.

Esercizio 7.83 $\frac{\partial F}{\partial x} = y$ e $\frac{\partial F}{\partial y} = x$, per cui $(0, 0)$ è un punto critico. Ora, $F(0, 0) = 0$; ma $F(x, y) > 0$ se x e y hanno lo stesso segno e $F(x, y) < 0$ se hanno segno opposto, per cui vicino a $(0, 0)$ ci sono sia punti in cui F è positiva sia punti in cui F è negativa, per cui $(0, 0)$ non è né un massimo né un minimo locale.

Calcolo integrale

Definizione di integrale

Esercizio 8.1

- (a) -2 .
- (b) 2 .
- (c) 3 .
- (d) -3 .
- (e) $2\pi(e - \sqrt{2})$.
- (f) $-2/9$.

Esercizio 8.2

- (a) $\text{Area}(R_5(0, 5)) = 30$; $\text{Area}(R^5(0, 5)) = 55$.
- (b) $\text{Area}(R_5(-1, 4)) = 70$; $\text{Area}(R^5(-1, 4)) = 200$.
- (c) $\text{Area}(R_5(-2, 3)) = 129/2$; $\text{Area}(R^5(-2, 3)) = 427$.

Esercizio 8.3

- (a) $\text{Area}(R_5(1, 11)) = 6086/1155 \simeq 5.27$; $\text{Area}(R^5(1, 11)) = 1126/105 \simeq 10.72$.
- (b) $\text{Area}(R_5(0, 5)) = 31$; $\text{Area}(R^5(0, 5)) = 62$.
- (c) $\text{Area}(R_5(2, 4)) \simeq 0.235$; $\text{Area}(R^5(2, 4)) \simeq 0.31$.

Esercizio 8.4

Per l'Esercizio 8.2:

- (a) $\text{Area}(R_8(0, 5)) = 4375/128 \simeq 34.18$; $\text{Area}(R^8(0, 5)) = 6375/128 \simeq 49.80$.
- (b) $\text{Area}(R_8(-1, 4)) = 11495/128 \simeq 89.80$; $\text{Area}(R^8(-1, 4)) = 21895/128 \simeq 171.06$.
- (c) $\text{Area}(R_8(-2, 3)) = \frac{866095}{8192} \simeq 105.724$; $\text{Area}(R^8(-2, 3)) = \frac{2723375}{8192} \simeq 332.443$.

Per l'Esercizio 8.3:

- (a) $\text{Area}(R_8(1, 11)) \simeq 5.84$; $\text{Area}(R^8(1, 11)) \simeq 9.25$.
- (b) $\text{Area}(R_8(0, 5)) \simeq 35.73$; $\text{Area}(R^8(0, 5)) \simeq 55.11$.
- (c) $\text{Area}(R_8(2, 4)) \simeq 0.25$; $\text{Area}(R^8(2, 4)) \simeq 0.29$.

Proprietà dell'integrale

Esercizio 8.5

- (a) $F(x) = \frac{4}{3}x^3 + C$.
- (b) $F(x) = x^2 + 3x + C$.
- (c) $F(t) = \frac{\rho}{3}t^3 + \sigma t + C$.
- (d) $G(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + C$.
- (e) $U(t) = t^2 + 2t + C$.
- (f) $V(x) = V_0x - \cos x + C$.
- (g) $w(x) = 2e^x + C$.
- (h) $z(u) = -\frac{1}{2}u^{-2} + C$.

Esercizio 8.6

- (a) $F(x) = \frac{1}{3}x^6 - \frac{4}{5}x^5 + c_0x + C$.
 (b) $y(t) = 2t - \frac{2}{5}t^{5/2} + C$.
 (c) $f(t) = \frac{a}{7}x^7 - \frac{b}{5}x^5 + C$.
 (d) $s(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2} + C$.
 (e) $U(t) = -\frac{k}{3}t^{-3} + C$.
 (f) $V(\phi) = V_0\phi - \alpha \cos \phi + \beta \sin \phi + C$.
 (g) $w(x) = \frac{2}{\log a}a^x + C$.
 (h) $z(u) = \frac{au}{3}u^3 - b_0u^{-1} + C$.

Esercizio 8.7

- (a) $f'_1(x) = 2x^2 + 2$.
 (b) $f'_2(x) = e^{2x^2+3}$.
 (c) $f'_3(x) = -\sin(x^2 + 4)$.
 (d) $f'_4(x) = \cos(\log(1 + x^2))$.

Esercizio 8.8

- (a) $f'_1(x) = 48x^3 + 2$.
 (b) $f'_2(x) = 2xe^{-1-x^4}$.
 (c) $f'_3(x) = \cos(e^{-x} + 4) + \cos(e^x + 4)$.
 (d) $4\log(1 + 4x^2)$.

Integrale indefinito**Esercizio 8.9**

- (a) $3x^2 - 3x + C$.
 (b) $\frac{a}{4}x^4 - ax^2 + 2x + C$.
 (c) $-\frac{1}{2}\cos(2t) + C$.
 (d) $-\frac{1}{2}\cos^2(t) + C$.
 (e) $-\frac{1}{\log 4}2^{-2s} - \frac{1}{\mu}e^{-\mu s} + C$.

Esercizio 8.10 $\int_0^5 t^2 dt = \frac{125}{3} \simeq 41.67$; $\int_{-1}^4 2t^3 dt = \frac{255}{2} = 127.5$;
 $\int_{-2}^3 (4t^4 - 2t^2 + 1) dt = \frac{605}{3} \simeq 201.67$; $\int_1^{11} 3t^{-1} dt = 3 \log 11 \simeq 7.19$;
 $\int_0^5 2^t dt = \frac{31}{\log 2} \simeq 44.72$; $\int_2^4 2^{-s} ds = \frac{3}{16 \log 2} \simeq 0.27$.

Esercizio 8.11

- (a) 1.
 (b) 2.
 (c) 0.
 (d) -16.
 (e) $-676/5$.

Esercizio 8.12

- (a) $e - \frac{2}{3}$.
 (b) $1/2$.
 (c) $1 + e^2$.
 (d) $e - \frac{1}{e}$.
 (e) 0.
 (f) $\log 9 - \frac{8}{9}$.

Esercizio 8.13

- (a) 1.
- (b) $\sqrt{2}$.
- (c) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$.
- (d) $2 - \frac{2}{\sqrt{3}}$.
- (e) $\pi/12$.
- (f) $\pi/24$.

Esercizio 8.14

- (a) $3/2$.
- (b) e .
- (c) $-43/96$.
- (d) $\pi/4$.

Esercizio 8.15 Questa la devi preparare tu...

Esercizio 8.16

- (a) $N(T) = N_0 e^{aT}$.
- (b) $N(T) = N_0 e^{-aT}$.
- (c) Basta derivare ricordando il primo teorema fondamentale del calcolo.

Esercizio 8.17

- (a) $J = rN_0 e^{aT}$ nel primo caso, e $J = rN_0 e^{-aT} + T$ nel secondo caso.
- (b) $J \simeq 1.65$ nel primo caso, e $J \simeq 1.61$ nel secondo, per cui la seconda cura è migliore.
- (c) Basta notare che $\log \frac{N(T)}{N_0} = 2a \int_0^T u(s) ds - aT$.
- (d) Derivando rispetto a $N(T)$ l'espressione di J si trova $J' = r - \frac{1}{2aN(T)}$, da cui segue quanto affermato.
- (e) Basta inserire il valore di $N(T)$ trovato in (d) nella prima formula dimostrata in (c).
- (f) Ponendo $u(t) \equiv 1/2$ nella formula dell'Esercizio 7.16.(c) si trova $N(t) \equiv N_0 = 1/r$.
In particolare, $N(T) = 1/r$ che fornisce il valore minimo di J grazie al punto (d).

Integrazione per parti
Esercizio 8.18

- (a) $2 \cos x + (2x - 1) \sin x + C$.
- (b) $x^2 \cos x + C$.
- (c) $(3x^2 - 7x + 7)e^x + C$.
- (d) $\frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{9}x^3$.

Esercizio 8.19

- (a) 4π .
- (b) $\frac{4}{15}(6\sqrt{3} - \sqrt{2})$.
- (c) $\frac{1}{4}(30(\log 2)^2 - 4 \log 2 - 3)$.

Esercizio 8.20 $Q = \int_0^\ell q(x) dx = -\ell^2/4\pi$.

Esercizio 8.21

- (a) $T = 0$.
- (b) La tensione è $T = \frac{k\sigma}{2\pi}$.

Integrazione per sostituzione**Esercizio 8.22**

- (a) $\frac{1}{9}(6x-7)^{3/2} + C$.
 (b) $\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + C$.
 (c) $\frac{1}{3(1-3e^x)} + C$.
 (d) $-\log(\cos x) + C$.
 (e) $\log(\log x) + C$.

Esercizio 8.23

- (a) $1684/5$.
 (b) $2\sqrt{5} - 4$.
 (c) 268156 .
 (d) $\frac{1}{4}\log 2$.
 (e) $\pi/12$.

Esercizio 8.24

- (a) $x = 10$.
 (b) $M = 37008790/3 \simeq 1.23 \cdot 10^7$.

Esercizio 8.25

- (a) $v_0 = \left(\frac{M^2}{3\rho^2 SA}\right)^{1/4}$.
 (b) $\frac{2}{3}A\rho(e^{60} - 1) + \frac{M^2}{8S\rho}(1 - e^{-20})$.

Esercizio 8.26 Basta effettuare la sostituzione $y = at + b$.

Esercizio 8.27

- (a) $\int_{-r}^r f(x) dx = \int_{-r}^0 f(x) dx + \int_0^r f(x) dx = \int_0^r f(-y) dy + \int_0^r f(x) dx = 2 \int_0^r f(x) dx$,
 dove abbiamo usato la sostituzione $y = -x$ e il fatto che $f(-y) = f(y)$.
 (b) $\int_{-r}^r f(x) dx = \int_{-r}^0 f(x) dx + \int_0^r f(x) dx = \int_0^r f(-y) dy + \int_0^r f(x) dx = 0$, dove
 abbiamo usato la sostituzione $y = -x$ e il fatto che $f(-y) = -f(y)$.

Integrali impropri**Esercizio 8.28**

- (a) $1/150$.
 (b) 1 .
 (c) $\pi/2$.

Esercizio 8.29

- (a) $2^{-1/3}$.
 (b) $2\sqrt{2}$.
 (c) $4/3^{1/4}$.

Esercizio 8.30 $P_0 = \sqrt{c_0/I}$, dove $I = \frac{1}{2} \left(\frac{8\xi^7 + 14\xi^5 + 7\xi^3 + 2\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}} - 8\xi^4 - 2\xi^2 - 1 \right)$ è il
 valore dell'integrale improprio.

Esercizio 8.31

- (a) Scelto $c \in (a, b)$ si pone $\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^c f(t) dt + \lim_{x \rightarrow b^-} \int_c^x f(t) dt$.
 (b) Scelto $c \in (a, +\infty)$ si pone $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^c f(t) dt + \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_c^x f(t) dt$.

(c) Scelto $c \in (-\infty, b)$ si pone $\int_{-\infty}^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^c f(t) dt + \lim_{x \rightarrow b^-} \int_c^x f(t) dt$.

In tutti e tre i casi si verifica l'indipendenza dal punto c procedendo esattamente come visto nel testo.

Media integrale

Esercizio 8.32

- (a) -1 .
- (b) -1 .
- (c) $a + \frac{a^3}{3}$.

Esercizio 8.33

- (a) $\frac{15}{2 \log 2}$ e $\frac{255}{16 \log 2}$.
- (b) $\frac{4}{\pi}$ in entrambi i casi.
- (c) $\frac{2}{\pi}$ in entrambi i casi.

Esercizio 8.34 $\frac{I_0}{\ell} (1 - e^{-\mu \ell})$.

Equazioni differenziali

Introduzione

Esercizio 9.1

- (a) Ordine 1, autonoma, esplicita, lineare, non omogenea, a coefficienti costanti.
- (b) Ordine 2, non autonoma, esplicita, lineare, non omogenea, non a coefficienti costanti.
- (c) Ordine 2, non autonoma, esplicita, non lineare, non omogenea, non a coefficienti costanti.
- (d) Ordine 3, autonoma, esplicita, lineare, omogenea, a coefficienti costanti.
- (e) Ordine 2, non autonoma, non esplicita, non lineare, non omogenea, non a coefficienti costanti.
- (f) Ordine 2, non autonoma, esplicita, lineare, non omogenea, non a coefficienti costanti.

Esercizio 9.2

- (a) Vero.
- (b) Vero.
- (c) Falso.
- (d) Vero.

Esercizio 9.3

- (a) $y(t) = 2t + c$.
- (b) $p(t) = at + b$.
- (c) $y(t) = \frac{3}{2}t^2 + t + c$.
- (d) $c(t) = -\cos t + a$.
- (e) $z(t) = -\sin t + at + b$.

Esercizio 9.4

- (a) $y(t) = 2t - 1$.
- (b) $p(t) = t$.
- (c) $y(t) = \frac{3}{2}t^2 + t + 1$.
- (d) $c(t) = -\cos t - 1$.
- (e) $z(t) = -\sin t + t$.

Esercizio 9.5

- (a) Non ammette soluzione.
- (b) $y(t) = 2e^{3t}$.
- (c) Non ammette soluzione.

Esercizio 9.6 Derivando $y' = ky$ (dove k è una costante) otteniamo $y'' = ky' = k^2y$.

Esercizio 9.7

- (a) $N(t+2) = N_0 3^{1+t/2} = 3N(t)$ e $N(0) = N_0$, per cui la risposta è affermativa.
- (b) $k = \frac{1}{2} \log 3$.

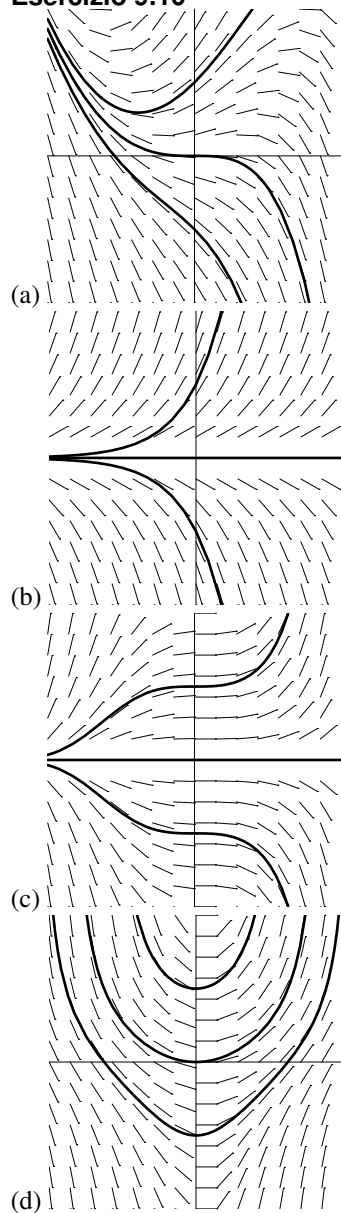
(c) $N(t) = N_0 A^{t/t_0}$.

(d) $N' = kN$, dove $k = \frac{1}{t_0} \log A$.

Esercizio 9.8 $C(x) = \frac{C_2 - C_1}{\ell} x + C_1$.

Esercizio 9.9 $C(r) = \frac{C_2 - C_1}{\log(r_2/r_1)} \log r + \frac{C_1 \log r_2 - C_2 \log r_1}{\log(r_2/r_1)}$.

Esercizio 9.10



L'equazione $y' = ay + b$ **Esercizio 9.11**

- (a) $y(t) = ce^{2t} - 1$.
 (b) $y(t) = ce^{-3t} + \frac{\pi}{3}$.
 (c) $y(t) = ce^{\sqrt{2}t} - \frac{1}{\sqrt{2}}$.
 (d) $y(t) = ce^{6t} + \frac{1}{2}$.

Esercizio 9.12

- (a) $y(t) = 4e^{3t} - 1$.
 (b) $y(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{2(1-t)})$.
 (c) $y(t) = \frac{\pi^2+1}{\pi}e^{\pi t} - \frac{1}{\pi}$.
 (d) $y(t) = 3(1 - e^{t-3})$.

Esercizio 9.13

- (a) $y(t) = 3e^t - t - 1$.
 (b) $y(t) = -\frac{1}{4}(e^{2t} + 6t + 3)$.
 (c) $y(t) = \pi((1 + \alpha)e^{-t} + t - 1)$.

Esercizio 9.14

- (a) $T' = k(T_c - T)$ con $k > 0$.
 (b) $t = 20 \left(1 + \frac{\log 2}{\log 3}\right) \simeq 32.6$ minuti.
 (c) $T = \frac{1060}{27} \simeq 39.26$ °C.
 (d) $T_0 = -230$ °C.

Esercizio 9.15 Se $\nu = 0$ e $\lambda > \mu$ allora $N(t)$ tende a $-\infty$ per $t \rightarrow +\infty$. Se $\nu = 0$ e $\lambda < \mu$ allora $N(t)$ tende a 0^- per $t \rightarrow +\infty$. Se $\nu < 0$ e $\lambda > \mu$ allora $N(t) \rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow +\infty$. Se $\nu < 0$ e $\lambda < \mu$ allora $N(t) \rightarrow \nu/(\mu - \lambda) < 0$ per $t \rightarrow +\infty$. Se $\nu > 0$ e $\lambda > \mu$ allora ci sono tre sottocasi: se $|N_0| < \nu/(\lambda - \mu)$ allora $N(t) \rightarrow +\infty$ per $t \rightarrow +\infty$; se $|N_0| = \nu/(\lambda - \mu)$ allora N è costantemente uguale a N_0 ; e se $|N_0| > \nu/(\lambda - \mu)$ allora $N(t) \rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow +\infty$. Infine, se $\nu > 0$ e $\lambda < \mu$ allora $N(t) \rightarrow \nu/(\mu - \lambda) > 0$ per $t \rightarrow +\infty$.

Esercizio 9.16 $N(t) = N_0 + \nu t$.

Esercizio 9.17 $N(t) = \left(\frac{k}{N_0^{-1/k}k - \lambda t}\right)^k$. Secondo questo modello, la popolazione esplode (cioè tende a $+\infty$) per $t \rightarrow N_0^{-1/k}k/\lambda > 0$, cioè in un tempo finito.

Esercizio 9.18 Se indichiamo con $y(t)$ la concentrazione al tempo t , l'equazione differenziale è $y' = \nu - ky$, la cui soluzione è $y(t) = \frac{1}{k}((ky_0 - \nu)e^{-kt} + \nu)$, dove $y_0 = y(0)$. In particolare, la concentrazione di glucosio nel sangue tende a ν/k per $t \rightarrow +\infty$.

Separazione delle variabili**Esercizio 9.19**

- (a) $y(t) = \arcsin(t^3 + c)$.
 (b) $y(t) = -\log(c - e^t)$.
 (c) $y(t) = \frac{1}{c-t}$.
 (d) $y(t) = ce^{t^2/2}$.

Esercizio 9.20

- (a) $y(t) = \arcsin(t^3)$.
 (b) $y(t) = \left(\frac{3}{5}t^5 + 27\right)^{1/3} - 2$.
 (c) $y(t) = 1 + \sqrt{\frac{2t^2+4t+2}{t}}$.
 (d) $y(t) = \frac{2}{2-t^2}$.

Esercizio 9.21

- (a) $y(t) = ce^{t^2}$.
 (b) $y(t) = ct^{-3}$.
 (c) $y(t) = ce^{t+(t^3/3)}$.
 (d) $y(t) = ce^{e^t}$.

Esercizio 9.22

- (a) $y(t) = e^{2t^2}$.
 (b) $y(t) = t^2$.
 (c) $y(t) = -2e^{3t+t^2}$.
 (d) $y(t) = e^{1-e^t}$.
 (e) $y(t) \equiv 0$.

Esercizio 9.23 Da $z = at + by + c$ ricaviamo $z' = a + by'$, cioè $y' = (z' - a)/b$. Sostituendo in $y' = g(at + by + c)$ otteniamo $z' = bg(z) + a$ che è della forma voluta con $\alpha \equiv 1$ e $f(z) = bg(z) + a$.

Esercizio 9.24 Da $y = tz$ ricaviamo $y' = z + tz'$. Sostituendo in $y' = g(y/t)$ otteniamo $z' = \frac{1}{t}(g(z) - z)$ che è della forma voluta con $\alpha(t) = 1/t$ e $f(z) = g(z) - z$.

Esercizio 9.25

- (a) $y(t) = ct + t \log t$.
 (b) $y(t) = \pm \sqrt{ct^2 + 2t^2 \log t}$.
 (c) $y(t) = \pm \sqrt{ct^2 - 2t^2 \log t}$.

Esercizio 9.26

- (a) $y(t) = \tan(t + c) - t$.
 (b) $y(t) = \frac{2}{1+ce^{2t}} + t - 1$.
 (c) $y(t) = \pm \sqrt{ce^{2t} - t^2}$.
 (d) $y(t) = c \pm \sqrt{c^2 - t^2}$.

Esercizio 9.27

- (a) $y(t) = \frac{ce^t - 2}{ce^t - 1}$.
 (b) $y(t) = \frac{c}{e^{2t} - c}$.
 (c) $y(t) = \frac{2ce^t - 1}{1 - ce^t}$.
 (d) $y(t) = \frac{1 + ce^{2t}}{1 - ce^{2t}}$.

Esercizio 9.28

- (a) $y(t) = \frac{3 - e^{4t}}{1 + e^{4t}}$.
 (b) $y(t) \equiv 1$.
 (c) $y(t) \equiv -1$.
 (d) $y(t) = \frac{2(1 - e^{4t})}{1 + e^{4t}}$.

Esercizio 9.29

- (a) $z' = \lambda(x_0 - z)(y_0 - z)$, con $\lambda > 0$.

$$(b) z(t) = \frac{y_0 c^{y_0} e^{\lambda x_0 t} - x_0 c^{x_0} e^{\lambda y_0 t}}{c^{y_0} e^{\lambda x_0 t} - c^{x_0} e^{\lambda y_0 t}}, \text{ dove } c = (y_0/x_0)^{1/(x_0-y_0)}.$$

$$(c) t = \log(5/2)/\log(3/2) \simeq 2.26 \text{ minuti.}$$

Esercizio 9.30 $c(t) = c_0/(1 + c_0 \lambda t)$ che tende a 0 per $t \rightarrow +\infty$.

Esercizio 9.31 $V(t) = \frac{1}{27}(\lambda t + V_0)^3$, dove V_0 è il volume iniziale della cellula. Quindi secondo questo modello il volume della cellula cresce come un polinomio di terzo grado; in particolare, tende a esplodere per $t \rightarrow +\infty$.

Esercizio 9.32 $z(t) = \frac{y_0 c^{y_0} e^{\lambda x_0 t} - x_0 c^{x_0} e^{\lambda y_0 t}}{c^{y_0} e^{\lambda x_0 t} - c^{x_0} e^{\lambda y_0 t}}$, dove $c = (y_0/x_0)^{1/(x_0-y_0)}$. Se $x_0 > y_0$ per $t \rightarrow +\infty$ la concentrazione di $n\text{-C}_5\text{H}_{11}\text{F}$ tende a $x_0 - y_0$, mentre la concentrazione di NaOC_2H_5 tende a 0. Viceversa, se $x_0 < y_0$ allora per $t \rightarrow +\infty$ la concentrazione di $n\text{-C}_5\text{H}_{11}\text{F}$ tende a 0, mentre la concentrazione di NaOC_2H_5 tende a $y_0 - x_0$.

Esercizio 9.33 Scriviamo l'equazione nella forma $N' = -kN^2 + k\beta N + \nu$. Il discriminante del polinomio $-kN^2 + k\beta N + \nu$ è $k^2\beta^2 + 4k\nu$; quindi se $\Delta = k^2\beta^2 + 4k\nu > 0$ la soluzione $N(t)$ è quella descritta nel riquadro a pag. 406 con $a = -k$, $t_0 = 0$ e $y_0 = N_0$. In particolare, $N(t)$ tende per $t \rightarrow +\infty$ a $y_2 + \sqrt{\Delta}/k = y_1 = \frac{1}{2}(\beta + \sqrt{\beta^2 + 4(\nu/k)}) > 0$. Inoltre, essendo $y_2 < 0$, si ha $C_1 = (y_1 - N_0)/(|y_2| + N_0)$, per cui $C_1 < 0$ se $N_0 > y_1$ o $N_0 < y_2$, e in tal caso $N(t)$ esplode per $t \rightarrow t_1 = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \log |C_1|$; nota che $t_1 < 0$ se $N_0 > y_1$ mentre $t_1 > 0$ se $N_0 < y_2$. Se $N_0 = y_1$ o $N_0 = y_2$, allora $N(t) \equiv y_1$ o y_2 . Se infine $y_2 < N_0 < y_1$ allora $C_1 > 0$ per cui $N(t)$ è ben definita per tutti i $t \in \mathbb{R}$.

Se invece $k^2\beta^2 + 4k\nu = 0$ (che può accadere solo se $\nu < 0$) allora $N(t)$ è data da (9.20) con $y_1 = \beta/2$, $a = -k$, $t_0 = 0$ e $y_0 = N_0$. In questo caso la soluzione non è definita in $t_1 = k^{-1}(\beta/2 - N_0)^{-1}$, che ha il segno di $\beta/2 - N_0$. Quindi se $N_0 < \beta/2$ allora $N(t) \rightarrow -\infty$ per $t \rightarrow t_1^-$; mentre se $N_0 > \beta/2$ allora $N(t)$ è definita per tutti i $t \geq 0$ e tende a $\beta/2$ per $t \rightarrow +\infty$.

Se infine $k^2\beta^2 + 4k\nu < 0$ (che può accadere solo se $\nu < 0$) allora $N(t)$ è data da (9.22) con $a = -k$, $t_0 = 0$, $y_0 = N_0$ e $C = \arctan((\beta - 2N_0)/\sqrt{-\beta^2 - 4\nu/k})$. In questo caso quindi $N(t)$ esplode per $t \rightarrow t_1^-$, dove $t_1 = (\pi - 2C)/\sqrt{-\Delta} > 0$.

Esercizio 9.34 Prima di tutto il numeratore della frazione è diverso da zero, per cui $y(t) \neq y_2$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Infine, per avere $y(t) = y_1$ occorre che il denominatore della frazione sia uguale a 1, cosa che non può accadere in quanto l'esponenziale non si annulla mai.

Sistemi lineari di equazioni

Esercizio 9.35

- $x(t) = c_1(1 + e^{-2t}) + c_2(1 - e^{-2t})$, $y(t) = c_1(1 - e^{-2t}) + c_2(1 + e^{-2t})$.
- $x(t) = c_1 t e^{-t} + c_2 e^{-t}$, $y(t) = c_1 e^{-t}$.
- $x(t) = 2c_1 e^{-3t/2} \cos(\sqrt{3}t/2) + 2c_2 e^{-3t/2} \sin(\sqrt{3}t/2)$, $y(t) = (\sqrt{3}c_2 - c_1)e^{-3t/2} \cos(\sqrt{3}t/2) - (\sqrt{3}c_1 + c_2)e^{-3t/2} \sin(\sqrt{3}t/2)$.
- $x(t) = -(c_1 + c_2)e^{2t} \cos t + (c_1 - c_2)e^{2t} \sin t$, $y(t) = c_1 e^{2t} \cos t + c_2 e^{2t} \sin t$.
- $x(t) = c_1(2e^t - 1) + 2c_2(e^t - 1)$, $y(t) = c_1(1 - e^t) + c_2(2 - e^t)$.

Esercizio 9.36

- $x(t) = \frac{1}{2}(3 + e^{-2t})$, $y(t) = \frac{1}{2}(3 - e^{-2t})$.
- $x(t) = 2(1 + t)e^{-t}$, $y(t) = 2e^{-t}$.

- (c) $x(t) = -e^{-3t/2} \cos(\sqrt{3}t/2) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-3t/2} \sin(\sqrt{3}t/2)$, $y(t) = e^{-3t/2} \cos(\sqrt{3}t/2) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-3t/2} \sin(\sqrt{3}t/2)$.
- (d) $x(t) = 2e^{2t} \sin t$, $y(t) = e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t$.
- (e) $x(t) = 4e^t - 3$, $y(t) = 3 - 2e^t$.

Esercizio 9.37 $C_1(t) = 2(1 + e^{-t/50})$, $C_2(t) = 2(1 - e^{-t/50})$.

Esercizio 9.38 $C_1(t) = \frac{2}{3}(4 - e^{-3t/100})$, $C_2(t) = \frac{4}{3}(2 + e^{-3t/100})$.

Esercizio 9.39

- (a) $m_1(t) = \frac{200}{\sqrt{17}} \left(e^{-\frac{1}{2}(5-\sqrt{17})t} - e^{-\frac{1}{2}(5+\sqrt{17})t} \right)$,
 $m_2(t) = \frac{50}{17} \left((17 + \sqrt{17})e^{-\frac{1}{2}(5+\sqrt{17})t} + (17 - \sqrt{17})e^{-\frac{1}{2}(5-\sqrt{17})t} \right)$.
- (b) L'equazione caratteristica è $k^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)k + \lambda_1\lambda_3$, che ha discriminante $\Delta = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 4\lambda_1\lambda_3 > (\lambda_1 - \lambda_3)^2 \geq 0$. Le due radici dell'equazione caratteristica sono $k_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \pm \sqrt{\Delta} \right)$. Siccome $\sqrt{\Delta} < \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, entrambe le radici dell'equazione caratteristica sono negative; quindi le soluzioni del sistema di equazioni differenziali sono date da somme di multipli di esponenziali della forma e^{kt} con $k < 0$, per cui tendono a zero quando $t \rightarrow +\infty$.

L'equazione $y'' = ay' + by + c$

Esercizio 9.40 Infatti $y'(t) = -\omega A \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t)$ e $y''(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t) - \omega^2 B \sin(\omega t) = -\omega^2 y(t)$.

Esercizio 9.41 Per risolvere l'esercizio basta usare l'esercizio precedente e notare che $(y_0 \cos(\omega t_0) - \frac{y_1}{\omega} \sin(\omega t_0)) \cos(\omega t_0) + (y_0 \sin(\omega t_0) + \frac{y_1}{\omega} \cos(\omega t_0)) \sin(\omega t_0) = y_0$ e che $-\omega(y_0 \cos(\omega t_0) - \frac{y_1}{\omega} \sin(\omega t_0)) \sin(\omega t_0) + \omega(y_0 \sin(\omega t_0) + \frac{y_1}{\omega} \cos(\omega t_0)) \cos(\omega t_0) = y_1$.

Esercizio 9.42

- (a) $y(t) = c_1 e^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{13})t} + c_2 e^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{13})t}$.
- (b) $y(t) = c_1 \cos(\sqrt{2}t) + c_2 \sin(\sqrt{2}t)$.
- (c) $y(t) = c_1 e^t \cos(\sqrt{2}t) = c_2 e^t \sin(\sqrt{2}t)$.
- (d) $y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t$.

Esercizio 9.43

- (a) $y(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(e^{(1+\sqrt{2})t} - e^{(1-\sqrt{2})t} \right)$.
- (b) $y(t) = \cos(\sqrt{3}t) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3}t)$.
- (c) $y(t) = e^t \cos t - e^t \sin t$.
- (d) $y(t) = \frac{1}{10} \left((5 - 2\sqrt{10})e^{-\frac{1}{2}(2+\sqrt{10})t} + (5 + 2\sqrt{10})e^{-\frac{1}{2}(2-\sqrt{10})t} \right)$.
- (e) $y(t) = t e^{2t}$.

Esercizio 9.44

- (a) $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - \frac{3}{2}$.
- (b) $y(t) = c_1 \cos(\sqrt{3}t) + c_2 \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{3}$.
- (c) $y(t) = c_1 e^{2t} + \frac{t}{2} + c_2$.
- (d) $y(t) = \frac{7}{2}t^2 + c_1 t + c_2$.
- (e) $y(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + 2$.

Esercizio 9.45

(a) $y(t) = \frac{1}{68} \left((51 + 5\sqrt{17})e^{\frac{1}{2}(3-\sqrt{17})t} + (51 - 5\sqrt{17})e^{\frac{1}{2}(3+\sqrt{17})t} - 102 \right).$

(b) $y(t) = 2 \cos(t) - \sin t - 1.$

(c) $y(t) = \frac{1}{9}(3t - e^{3t} + 10).$

(d) $y(t) = \frac{3}{2}t^2 + 1.$

(e) $y(t) = 3(t-1)e^{2t} + 1.$

Esercizio 9.46

(a) $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$

(b) $y(t) = c_1 e^{t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right) + c_2 e^{t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}t\right).$

(c) $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}.$

(d) $y(t) = c_1 e^{t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 e^{t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right).$

Esercizio 9.47

(a) $y(t) = -\frac{1}{4}(e^{-2t} + 2t - 5).$

(b) $y(t) = \cos(1-t).$

(c) $y(t) = t e^{2(1+t)}.$

(d) $y(t) = 2\sqrt{3}e^{t/2} \sin\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}t\right).$

Esercizio 9.48 Segue subito da $(y - \tilde{y})^{(k)} = y^{(k)} - \tilde{y}^{(k)}$ per ogni $k \geq 0$.**Esercizio 9.49**

(a) $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 2, y(t) = 5c_2 \cos t - 5c_1 \sin t + 10.$

(b) $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t}, y(t) = 1 + c_1 e^{-2t} + \frac{1}{2}c_2 e^{-t}.$

CAPITOLO 10

Probabilità discreta

Eventi

Esercizio 10.1 Un opportuno spazio degli eventi è dato da:

$$\Omega = \{(M, M), (M, F), (F, M), (F, F)\}.$$

L'evento unione di “primo figlio femmina” e “secondo figlio maschio” è dato da

$$\{(F, M), (F, F), (M, M)\},$$

mentre l'evento intersezione è dato da

$$\{(F, M)\}.$$

Esercizio 10.2 Un opportuno spazio degli eventi è dato da:

$$\Omega = \{R, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 30L\}.$$

L'evento “promosso” è dato da

$$\{18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 30L\}.$$

L'evento complementare all'evento “voto maggiore di 27” è dato da

$$\{R, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27\}.$$

L'evento “voto minore di 21” è incompatibile con l'evento “voto maggiore di 21” e con l'evento “voto maggiore di 27”. Inoltre l'evento “voto minore di 27” è incompatibile con l'evento “voto maggiore di 27”.

Esercizio 10.3 Lo spazio degli eventi è

$$\Omega = \{(X, Y, z) \mid X, Y \in \{\text{testa, croce}\}, z \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}.$$

Se le monete o il dado sono truccati lo spazio degli eventi è ancora Ω .

Esercizio 10.4 Gli eventi composti sono i seguenti:

$\{A, B\}$ = peso alla nascita inferiore a 2500 g;

$\{B, C\}$ = peso alla nascita superiore a 1500 g;

$\{A, C\}$ = peso alla nascita inferiore a 1500 g o superiore a 2500 g;

$\{A, B, C\}$ = peso alla nascita qualsiasi.

Esercizio 10.5 $\Omega = \{(i, j) \mid i \in \{A, B, C\}, j \in \{P, N, R\}\}.$

Distribuzioni di probabilità

Esercizio 10.6 No. Il fatto che due eventi siano diversi non consente di affermare che le loro probabilità siano diverse. Per esempio, se $A \subseteq \Omega$ ha probabilità $1/2$, allora l'evento complementare $B = \Omega \setminus A$ (che senza dubbio è diverso da A) ha anch'esso probabilità $1/2$.

Esercizio 10.7 Che sia multiplo di 3, dato che ogni multiplo di 9 è anche multiplo di 3.

Esercizio 10.8 Lo spazio degli eventi è quello dell'Esercizio 10.3. Esso contiene 24 eventi elementari, ognuno dei quali ha probabilità $1/24$. L'evento "due teste e un 2" è un evento elementare, pertanto avrà probabilità $1/24$.

Esercizio 10.9 $1/6 \cdot (1 - (1/2)^6)$.

Esercizio 10.10 Rispettivamente $1/128$ e $185/2048$.

Esercizio 10.11 I due eventi sono equiprobabili, con probabilità $10 \cdot (1/2)^5$.

Esercizio 10.12 La probabilità che sia 8 è $8/90$, mentre che sia 12 è $7/90$. Lo spazio degli eventi è l'insieme dei naturali compresi tra 1 e 18, estremi inclusi. Le somme più probabili sono 9 e 10, entrambe con probabilità $1/10$.

Esercizio 10.13 La probabilità di ottenere 1 è $1/6$, così come la probabilità di ottenere 6. La probabilità di ottenere 7 è 0.

Esercizio 10.14 La probabilità di ottenere 1 è $1/9$. La probabilità di ottenere 6 è $2/9$. La probabilità di ottenere 7 è 0.

Esercizio 10.15 La somma più probabile, lanciando due dadi a n facce, è $n + 1$, con probabilità $1/n$.

Esercizio 10.16 Le somme meno probabili, lanciando due dadi a n facce, sono 2 e $2n$, entrambe con probabilità $1/n^2$.

Esercizio 10.17 $1/2$.

Esercizio 10.18 $1/8$.

Esercizio 10.19 $1/4$.

Esercizio 10.20

(a) $18/37$;

(b) $22/37$;

(c) $25/37$.

Frequenze relative

Esercizio 10.21 Rispettivamente 0.28, 0.14, 0.03, 0.56.

Esercizio 10.22 La probabilità che sia sana è $2/5$, mentre quella che sia malata è $3/5$.

Esercizio 10.23 La probabilità di guarigione è $5/12$, mentre quella di non guarigione è $7/12$.

Esercizio 10.24 La probabilità che pesi meno di 32 g è $11/15$, che pesi esattamente 32 g è $3/15 = 1/5$, e la probabilità che pesi più di 32 g è $1/15$.

Esercizio 10.25 0.687.

Esercizio 10.26 $30/116$.

Assiomi della probabilità

Esercizio 10.27 La probabilità di essere sordi e muti è 0.05%, mentre quella di essere sordi o muti è 1.05%.

Esercizio 10.28 No, perché $\frac{6}{25} < \frac{2}{25} + \frac{1}{5}$.

Esercizio 10.29 No, perché $\frac{8}{25} > \frac{2}{25} + \frac{1}{5}$.

Esercizio 10.30 0.68.

Esercizio 10.31 44.5%

Esercizio 10.32 12/300.

Eventi indipendenti

Esercizio 10.33 A e A^c sono indipendenti se e solo se uno dei due ha probabilità zero.

Esercizio 10.34 Due eventi incompatibili sono indipendenti se e solo se almeno uno dei due ha probabilità zero.

Esercizio 10.35 Rispettivamente 1/2, 1/3, 1/6.

Esercizio 10.36 Sì in tutti e tre i casi.

Esercizio 10.37 Sono eventi indipendenti.

La legge di Hardy-Weinberg

Esercizio 10.38 La probabilità che contenga l'allele A è 0.53, mentre quella che contenga l'allele B è 0.58.

Esercizio 10.39 Rispettivamente $(0.556)^2 \cdot 2 \cdot 0.355 \cdot 0.266$ e $2 \cdot 0.556 \cdot 0.125 \cdot (0.266)^2$.

Esercizio 10.40 $p_{GG} = 0.49$, $p_{Gb} = 0.42$, $p_{bb} = 0.09$.

Esercizio 10.41 $p_c = \sqrt{0.35}$, $p_L = 1 - \sqrt{0.35}$, $p_{cc} = 0.35$, $p_{LL} = (1 - \sqrt{0.35})^2$, $p_{Lc} = 2(1 - \sqrt{0.35})\sqrt{0.35}$.

Esercizio 10.42 $p_B = 0.35$, $p_V = 0.25$, $p_R = 0.4$, $p_{BB} = 0.1225$, $p_{VV} = 0.0625$, $p_{BV} = 0.175$, $p_{RR} = 0.16$, $p_{RB} = 0.28$, $p_{RV} = 0.20$.

Probabilità condizionata

Esercizio 10.43 0.2808.

Esercizio 10.44 La probabilità richiesta è 1/4, e non dipende dalla distribuzione di probabilità dei vari genotipi.

Esercizio 10.45 La prima si calcola come

$$\frac{p(\text{entrambi maschi})}{p(\text{almeno un maschio})} = \frac{p^2}{p^2 + 2p(1-p)} = \frac{p}{2-p}.$$

La seconda è la probabilità che il secondo figlio sia maschio, per cui è p .

Esercizio 10.46 0.0072.

Esercizio 10.47

- (a) 0.0625;
- (b) 0.2;
- (c) 0.05;
- (d) 0.25;
- (e) 1.

Esercizio 10.48

- (a) 0.60;
- (b) $\simeq 0.613$;
- (c) $\simeq 0.751$;
- (d) $\simeq 0.365$;
- (e) 0.

Esercizio 10.49 Rispettivamente 95.66% e 8.41%.

Esercizio 10.50

$$\begin{aligned} p(A \cap B|C) &= \frac{p(A \cap B \cap C)}{p(C)} = \frac{p(A|B \cap C) p(B \cap C)}{p(C)} \\ &= \frac{p(A|B \cap C) p(B|C) p(C)}{p(C)} = p(A|B \cap C) p(B|C) . \end{aligned}$$

Esercizio 10.51

$$\begin{aligned} \frac{p(A \cap B|C)}{p(B|C)} &= \frac{p(A \cap B \cap C)}{p(C)} \cdot \frac{p(C)}{p(B \cap C)} = \frac{p(A \cap C|B) p(B)}{p(C|B) p(B)} \\ &= \frac{p(A \cap C|B)}{p(C|B)} . \end{aligned}$$

Esercizio 10.52

$$p(B|A^c) = \frac{p(B \cap A^c)}{p(A^c)} = \frac{p(B) - p(B \cap A)}{1 - p(A)} = \frac{p(B) - p(A) p(B|A)}{1 - p(A)} .$$

Esercizio 10.53

$$\begin{aligned} p(A \cap B|C) + p(A \cap B^c|C) &= \frac{p(A \cap B \cap C) + p(A \cap B^c \cap C)}{p(C)} \\ &= \frac{p(A \cap C)}{p(C)} = p(A|C) . \end{aligned}$$

Esercizio 10.54 0.497536.

Esercizio 10.55 0.028248.

Esercizio 10.56 $\simeq 0.65397$.

Esercizio 10.57

- (a) 0.486402;
- (b) 0.054839;
- (c) 0.541241.

Test diagnostici**Esercizio 10.58**

- (a) $\simeq 8.29\%$;
 (b) $\simeq 17.6\%$.

Esercizio 10.59 Per errori di approssimazione.

Calcolo combinatorio

Esercizio 10.60 Fare 4.

Esercizio 10.61 12.

Esercizio 10.62 Non è un caso: l'evento "in un gruppo di 2 persone ce ne sono due che hanno lo stesso compleanno" può essere riparafrasato come l'evento "in un gruppo di 2 persone tutti hanno lo stesso compleanno", e ai fini del calcolo delle probabilità è irrilevante che tu faccia parte o meno del gruppo.

Esercizio 10.63

- (a) 720, 5040, 40320.
 (b) 5040, 20160, 60480.
 (c) $1/6$, $1/42$, $1/336$.
 (d) $63 \cdot 10^{-9}$, 0.104, $1/84$.
 (e) 4, 10, 20, 462.
 (f) 3764376, 9702, 67910864.

Esercizio 10.64

- (a) $\frac{k+1}{k+1-m}$;
 (b) $\frac{P_{n,h}}{h}$;
 (c) $\binom{n+1}{6}$.

Esercizio 10.65

- (a) $x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$;
 (b) $\sum_{n=0}^k \binom{n}{k} y^k$;
 (c) $x^6 - x^4 y^2 - x^2 y^4 + y^6$;
 (d) $32a^5 + 80a^4 b + 80a^3 b^2 + 40a^2 b^3 + 10ab^4 + b^5$.

Esercizio 10.66 In caso di estrazioni con reimbussolamento abbiamo:

- (a) $(3/4)^5$;
 (b) $\frac{5 \cdot 4 \cdot \binom{4}{3} \cdot 3^3 \cdot 5}{12^5}$.

In caso di estrazioni senza reimbussolamento abbiamo:

- (a) $\frac{9}{12} \cdot \frac{8}{11} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{5}{8}$;
 (b) $4 \cdot 5 / \binom{12}{5}$.

Esercizio 10.67 Rispettivamente 0.857375, 0.1083, 0.031635, 0.00269.

Esercizio 10.68 4845.

Esercizio 10.69 Se ogni compito può apparire al più una volta posso effettuare l'assegnazione in 35 modi diversi. Se sono ammesse ripetizioni posso effettuare l'assegnazione in 210 modi diversi.

Esercizio 10.70 7392.

Esercizio 10.71

- (a) $1/10^5$;
- (b) $1/5!$;
- (c) $2/5!$;
- (d) $1/10^3$.

Esercizio 10.72

- (a) $1/10^4$;
- (b) $1/10^3$;
- (c) $1/(4 \cdot 9^3)$;
- (d) $1/4!$;
- (e) $2/4!$.

Esercizio 10.73

- (a) 210;
- (b) 120;
- (c) $\binom{n}{k}$ se $k \leq n$, 0 altrimenti;
- (d) $\binom{n}{k-1}$ se $k \leq n+1$, 0 altrimenti.

Esercizio 10.74

- (a) $(4/5)^{30}$;
- (b) $30!/5^{30}$.

Esercizio 10.75 Rispettivamente $52/\binom{52}{5}$, $\binom{13}{5} \cdot 4/\binom{52}{5}$, $1 - \frac{52 \cdot 48 \cdot 44 \cdot 40 \cdot 36}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}$.

Esercizio 10.76 4^{12} se sono ammesse ripetizioni, nessuna altrimenti.

Esercizio 10.77 Rispettivamente $9/24$, $8/24$ e 0.

Esercizio 10.78

- (a) $4/52$;
- (b) $1 - \frac{48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}$;
- (c) $48/(52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48)$.

Esercizio 10.79

- (a) $4/40$;
- (b) $1 - \frac{36 \cdot 35 \cdot 34}{40 \cdot 39 \cdot 38}$;
- (c) $3 \cdot \frac{4}{40} \cdot \frac{4}{39} \cdot \frac{3}{38}$;
- (d) $\frac{4}{40} \cdot \frac{3}{39} \cdot \frac{2}{38}$;
- (e) $\frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} \cdot \frac{34}{38}$.

Esercizio 10.80

- (a) $(1/6)^6$;
- (b) $6!/6^6$;
- (c) $\binom{6}{3} \cdot \frac{3^6}{6^6}$;
- (d) $\binom{5}{2} \cdot \frac{3^5}{6^5}$.

Esercizio 10.81 “biologia” ha 10080 anagrammi, “chimica” ne ha 1260 e “matematica” ne ha 302400.

Esercizio 10.82

- (a) $6!$;
- (b) $1/3$;
- (c) rispettivamente $7!$, $2/7$.

Distribuzione binomiale

Esercizio 10.83 Circa 0.135, 0.116, 0.384, 0.519 rispettivamente.

Esercizio 10.84 Sapendo che il primo figlio è maschio otteniamo circa 0.263, 0, 0.5, 0.767 rispettivamente. Sapendo che il primo figlio è femmina otteniamo circa 0, 0.237, 0.263, 0.263 rispettivamente.

Esercizio 10.85 $\simeq 0.386$.

Esercizio 10.86 $\simeq 0.26$.

Esercizio 10.87 Circa 0.42 e 0.68 rispettivamente.

Esercizio 10.88 $\simeq 6 \cdot 10^{-2}$.

Esercizio 10.89 Almeno 4.

CAPITOLO 11

Statistica

Media, mediana e moda

Esercizio 11.1 No; infatti la somma di tre numeri reali può al massimo essere uguale a 3 volte il più grande dei tre numeri, e quindi la media dev'essere minore o uguale del più grande dei tre numeri.

Esercizio 11.2 No, perché la mediana per definizione è compresa fra il minimo e il massimo dei quattro numeri.

Esercizio 11.3 Sì, per esempio: $-4, -3, -2, -1, 1, 1, 8$.

Esercizio 11.4

(a) $-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5$.

(b) $1, 2, 3, 4, 5, 50, 60, 70, 80, 90$.

(c) $-50, -40, -30, -20, -1, 1, 2, 3, 4, 5$.

Esercizio 11.5 19.714°C .

Esercizio 11.6 Rispettivamente 40.95 anni, 44.07 anni, 42.55 anni.

Esercizio 11.7 16.175 anni.

Esercizio 11.8 No: serve la popolazione femminile nelle 4 aree dell'Italia.

Varianza

Esercizio 11.9 No. Infatti, la deviazione standard è la radice quadrata della varianza, che è la media degli scarti quadratici. Se i dati sono tutti compresi fra 12 e 13, ciascuno scarto quadratico sarà al massimo 1, per cui la varianza sarà al massimo 1 e la deviazione standard sarà al massimo 1.

Esercizio 11.10

(a) $4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 16$; deviazione standard $= 3\sqrt{2}$.

(b) $10 - 3\sqrt{34}, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 10 + 3\sqrt{34}$; deviazione standard $= 6\sqrt{2}$.

Esercizio 11.11 Intervallo di variazione $= 2680$; media $\simeq 1709.29$; deviazione standard $\simeq 794.81$; varianza $\simeq 631720.92$; coefficiente di variazione $\simeq 0.46$.

Esercizio 11.12 Intervallo di variazione $= 495369$; media $= 61667.95$; mediana $= 13956.5$; deviazione standard $\simeq 114563.13$; varianza $\simeq 1.3 \cdot 10^{10}$; coefficiente di variazione $= 1.86$; primo quartile $= 8914$; terzo quartile $= 63554.5$.

Esercizio 11.13 Media $\simeq 3.36$; mediana $= 3$; deviazione standard $\simeq 1.399$; varianza $\simeq 1.959$; coefficiente di variazione $\simeq 0.416$.

Esercizio 11.14 N° individui intervistati $= 74$; media $= 3.94$; mediana $= 4$; deviazione standard $= 1.4035$; varianza $= 1.97$; coefficiente di variazione $\simeq 0.356$.

Esercizio 11.15 Media $\simeq 11.48$; mediana = 11.6; deviazione standard $\simeq 0.683$; varianza $\simeq 0.4666$; coefficiente di variazione $\simeq 0.0595$; intervallo di confidenza $[10.114, 12.846]$.

Il metodo dei minimi quadrati

Esercizio 11.16

- (a) $y = 1.3x + 0.8$, CP $\simeq 0.98$, buona interpolazione;
- (b) $y = 0.74x - 0.54$, CP $\simeq 0.98$, buona interpolazione;
- (c) $y = 1.02x - 0.3$, CP $\simeq 0.99$, buona interpolazione;
- (d) $y = 1.3x + 1.1$, CP $\simeq 0.98$, buona interpolazione;
- (e) $y = 1.11x$, CP $\simeq 0.99993$, buona interpolazione.

Esercizio 11.17 $y = 0.1026x + 23.32$, CP $\simeq 0.275$.

Esercizio 11.18 $y = 7.5x - 47.5$, CP $\simeq 0.993$. Le formule che abbiamo visto negli Esempi 4.1, 4.10 e 4.12 forniscono modelli che passano esattamente per i punti forniti dai dati sperimentali, ma cambiano in modo drastico aggiungendo anche un solo dato. La retta di regressione non passa esattamente per i punti forniti dai dati sperimentali (che del resto non sono mai esatti ma sono sempre soggetti a errore), ma non cambia eccessivamente aggiungendo un dato solo.

Esercizio 11.19 $y = 0.86x + 1.8$, CP $\simeq 0.986$, i dati sono coerenti con l'ipotesi di dipendenza lineare.

Esercizio 11.20 La miglior interpolazione lineare è $T(t) = -8.11t + 60.03$, con CP $\simeq -0.87$, per cui l'interpolazione è discreta.

Esercizio 11.21 $y = 0.47x + 0.74$, CP $\simeq 0.994$, l'interpolazione è buona.

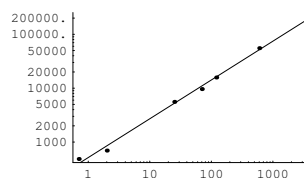
Esercizio 11.22 La retta di regressione di y in funzione di x è data da $y = 2.1x - 0.31$, il coefficiente di Pearson è dato da CP $\simeq 0.99$, pertanto l'interpolazione è buona. La retta di regressione di x in funzione di y è data da $x = 0.47y + 0.21$, il coefficiente di Pearson è dato da CP $\simeq 0.99$, pertanto l'interpolazione è buona.

Esercizio 11.23 È abbastanza ragionevole supporre una relazione lineare, dato che la retta di regressione di y in funzione di x ha coefficiente di Pearson pari a circa 0.882 (ma vedi l'Esercizio 11.28).

Tecniche di interpolazione

Esercizio 11.24

(a) La migliore interpolazione potenza è $R(M) \simeq 515.87M^{0.72}$. Il coefficiente di Pearson



è CP $\simeq 0.998$, per cui l'interpolazione è molto buona. Grafico:

- (b) La migliore interpolazione esponenziale è $R(M) \simeq 3467.6 \cdot 1.001^M$. Il coefficiente di Pearson è $CP \simeq 0.8$, per cui l'interpolazione non è molto buona.

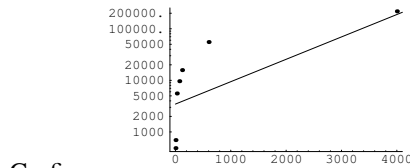
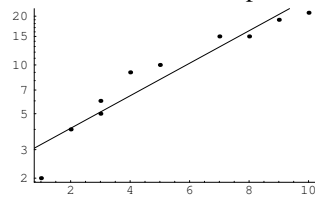


Grafico:

Esercizio 11.25

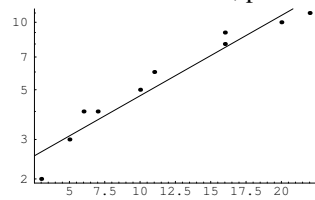
- (a) La migliore interpolazione esponenziale è $y(x) \simeq 2.56 \cdot 1.26^x$. Il coefficiente di Pearson è $CP \simeq 0.95$, per cui l'interpolazione è buona.



- (b)
- (c) Quella dell'Esercizio 11.22, in cui il coefficiente di Pearson era circa 0.99.
- (d) Scegliendo $x_0 = 1$ e $b = 2$ per avere q/k vicino a x_0 e un buon coefficiente di Pearson bisogna scegliere a molto alto; per esempio, con $a = 10\,000$ si trova $q/k \simeq 1.1$ e $CP \simeq -0.994$. Ma mettere una saturazione molto maggiore dei valori trovati sperimentalmente equivale a interpolare con una funzione lineare (conta solo la parte quasi lineare del grafico, la saturazione non si vede), per cui tanto vale interpolare direttamente con una funzione lineare.

Esercizio 11.26

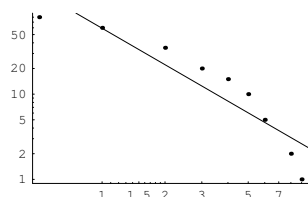
- (a) La migliore interpolazione esponenziale è $y(x) \simeq 2.06 \cdot 1.086^x$. Il coefficiente di Pearson è $CP \simeq 0.96$, per cui l'interpolazione è buona.



- (b)
- (c) Quella dell'Esercizio 11.21, in cui il coefficiente di Pearson era circa 0.994.
- (d) Anche in questo caso accade un fenomeno analogo a quello dell'esercizio precedente. Per avere un coefficiente di Pearson buono, bisogna scegliere α grande e si ottiene un β piccolo, per cui si usa la parte quasi lineare del grafico della funzione lineare fratta. Per esempio, scegliendo $\alpha = 60$ si ottiene $\beta \simeq -1.7 \cdot 10^{-4}$ e $\gamma = -0.017$, per cui la funzione $f(x) = (0.99x + 0.3)/(0.017x + 1.7)$ interpola i dati con $CP \simeq -0.9936$.

Esercizio 11.27

- (a) La migliore interpolazione potenza è $T(t) \simeq 59.3 \cdot t^{-1.42}$. Il coefficiente di Pearson è $CP \simeq -0.92$, per cui l'interpolazione è buona.



(b)

- (c) Questa, in quanto il coefficiente di Pearson dell'interpolazione lineare dell'Esercizio 11.20 era circa -0.87 .
- (d) Per applicare un'interpolazione logistica, supponiamo che il corpo provenga da un forno spento che era originariamente a 180°C , e che l'esperimento sia in una stanza a 0°C . Prendendo quindi $b = 180$ e $a = -180$ otteniamo come interpolazione logistica $T(t) \simeq 180 \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-0.55(x+0.3)}} \right)$ che ha un coefficiente di Pearson pari a circa -0.996 , quindi migliore di tutti i precedenti.

Esercizio 11.28 La migliore interpolazione potenza è $x(y) \simeq 0.42x^{2.13}$, che ha un coefficiente di Pearson pari a circa 0.955 , per cui è una buona interpolazione, migliore di quella lineare dell'Esercizio 11.23, che aveva un coefficiente di Pearson pari a circa 0.882 .

Esercizio 11.29

- (a) La retta di regressione è $y = -7.6x + 67.4$, con $\text{CP} \simeq -0.96$, per cui l'interpolazione è buona.
- (b) La migliore interpolazione potenza è $y(x) = 167.28x^{-1.66}$, con $\text{CP} \simeq -0.87$.
- (c) La migliore interpolazione esponenziale è $y(x) = 161.22 \cdot 0.64^x$, con $\text{CP} \simeq -0.975$.
- (d) Prendendo $b = 70$ e $a = -70$, in modo da avere la saturazione a 0 , otteniamo $y(x) = 70e^{-0.243(x+0.07)}$, con $\text{CP} \simeq -0.66$.
- (e) Imponendo la saturazione inversa a $b = 71$ e quella diretta a 0 , cioè con $a = -71$, otteniamo $y(x) = 71 \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-0.6(x-4.47)}} \right)$, con $\text{CP} \simeq -0.81$.
- (f) Andando a tentativi, il miglior valore per il coefficiente di Pearson è $\text{CP} \simeq 0.63$, ottenuto prendendo $\alpha = -1.3$ e quindi $y(x) = -1.3 + \frac{1}{0.016x - 0.01}$.
- (g) La migliore è quella esponenziale.

Probabilità continua

Variabili aleatorie

Esercizio 12.1

- (a) $\{(3, 6), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$.
- (b) $\{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\}$.
- (c) Ω .
- (d) $\{(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)\}$.
- (e) $\emptyset$.
- (f) $\Omega \setminus \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$.

Esercizio 12.2

- (a) $\{15, 16, 25, 26, 34, 35, 36, 44, 45, 46, 55, 56, 66\}$.
- (b) Ω_1 .
- (c) $\{34\}$.
- (d) $\{14, 15, 16, 24, 25, 26, 33, 34, 35, 36, 44, 45, 55\}$.
- (e) $\{46\}$.
- (f) $\{46, 55, 56, 66\}$.

Esercizio 12.3

- $\{(A_0A_0, B_1B_4, C_2C_2), (A_0A_0, B_2B_2, C_2C_2), (A_0A_0, B_2B_4, C_0C_2), (A_0A_0, B_2B_4, C_2C_2),$
 $(A_0A_0, B_4B_4, C_0C_0), (A_0A_0, B_4, B_4, C_0C_2), (A_0A_0, B_4B_4, C_2C_2), (A_0A_1, B_1B_2, C_2C_2),$
 $(A_0A_1, B_1B_4, C_2C_2), (A_0A_1, B_1B_4, C_2C_2), (A_0A_1, B_2B_2, C_2C_2), (A_0A_1, B_2B_4, C_0C_2),$
 $(A_0A_1, B_2B_4, C_2C_2), (A_0A_1, B_4B_4, C_0C_0), (A_0A_1, B_4, B_4, C_0C_2), (A_0A_1, B_4B_4, C_2C_2),$
 $(A_1A_1B_1B_1C_2C_2), (A_1A_1, B_1B_2, C_2C_2), (A_1A_1, B_1B_4, C_2C_2), (A_1A_1, B_1B_4, C_2C_2),$
 $(A_1A_1, B_2B_2, C_0C_2), (A_1A_1, B_2B_2, C_2C_2), (A_1, A_1, B_2B_4, C_0C_0), (A_1A_1, B_2B_4, C_0C_2),$
 $(A_1A_1, B_2B_4, C_2C_2), (A_1A_1, B_4B_4, C_0C_0), (A_1A_1, B_4, B_4, C_0C_2), (A_1A_1, B_4B_4, C_2C_2)\}$.

Esercizio 12.4

- (a) $E = (1/\sqrt{2}, 1)$.
- (b) $E = (1/2, 1]$.
- (c) $E = [0, \frac{1}{12}] \cup [\frac{5}{12}, \frac{7}{12}] \cup [\frac{11}{12}, 1]$.
- (d) $E = \{1/3\}$.
- (e) $E = [\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1), 1]$.
- (f) $E = [0, 1/2)$.

Esercizio 12.5

- (a) $1/4$.
- (b) $1/9$.
- (c) 1 .
- (d) $1/9$.
- (e) 0 .
- (f) $11/12$.

Esercizio 12.6

- (a) $p = 1/8$.
 (b) Nell'ordine: $5/16$; $1/8$; 1 ; $1/8$; 0 ; $15/16$.

Esercizio 12.7 Nell'ordine: $23/36$; 1 ; $1/18$; $23/36$; $1/18$; $1/6$.

Esercizio 12.8

- (a) $p = 1/8$.
 (b) Nell'ordine: $51/64$; 1 ; $1/32$; $23/32$; $1/16$; $5/16$.

Esercizio 12.9 Sono dipendenti: per esempio, $p(\{X = 2\} \cap \{Y = 2\}) = 0 \neq 1/648 = (1/36) \cdot (1/18) = p(X = 2) \cdot p(Y = 2)$, in quanto $\{X = 2\} = \{(1, 1)\}$ e $\{Y = 2\} = \{(1, 2), (2, 1)\}$.

Esercizio 12.10

- (a) Discreto: due elementi diversi distano almeno $1/2$.
 (b) No, ci sono elementi diversi arbitrariamente vicini.
 (c) No, $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{n+1}$ distano $\frac{1}{n(n+1)}$ che tende a zero per $n \rightarrow +\infty$.
 (d) Discreto: due elementi diversi distano più di 1 .
 (e) Discreto: due elementi diversi distano almeno 1 .
 (f) No, in quanto la distanza fra 2^{-p} e 2^{-p-1} tende a zero per $p \rightarrow +\infty$.

Esercizio 12.11 Non sono indipendenti in nessuno dei due casi, in quanto la probabilità di estrarre 3 palline bianche e 3 palline rosse in tre estrazioni (cioè $p(\{B = 3\} \cap \{R = 3\})$) è 0, mentre sia la probabilità $p(B = 3)$ di estrarre tre palline bianche sia la probabilità $p(R = 3)$ di estrarre tre palline rosse sono diverse da zero, e quindi anche il loro prodotto lo è (anche se l'esatto valore dipende dal tipo di estrazione).

Esercizio 12.12

- (a) Non sono indipendenti. Per esempio, la probabilità di estrarre due cubi in due estrazioni è $p(C = 2) = 3/14$, la probabilità di estrarre due solidi bianchi in due estrazioni è $p(B = 2) = 3/14$, la probabilità di estrarre due cubi bianchi è $p(\{C = 2\} \cap \{B = 2\}) = 1/28$ ma $1/28 \neq (3/14) \cdot (3/14)$.
 (b) Sono indipendenti. La probabilità di estrarre j cubi (o j solidi bianchi) in 2 estrazioni è $p(C = j) = p(B = j) = \binom{2}{j} \frac{1}{4}$, mentre la probabilità di estrarre i cubi e j solidi bianchi in 2 estrazioni è $p(\{C = i\} \cap \{B = j\}) = \binom{2}{i} \binom{2}{j} \frac{1}{16} = p(C = i)p(B = j)$, e questo basta (sai dire perché? Usa gli assiomi della probabilità) per dimostrare l'indipendenza di C e B .

Valore atteso e varianza di variabili aleatorie discrete**Esercizio 12.13**

- (a) Valore atteso: 12.25; varianza: $\frac{11515}{144} \simeq 79.965$.
 (b) Valore atteso: 14.4375; varianza: $\frac{77245}{768} \simeq 100.579$.

Esercizio 12.14

- (a) Valore atteso: $\frac{91}{3} \simeq 30.33$; varianza: $\frac{5369}{18} \simeq 298.278$.
 (b) Valore atteso: 38; varianza: 327.

Esercizio 12.15 Valore atteso: $\frac{23}{3} \simeq 7.67$. Varianza: $\frac{101}{18} \simeq 5.61$.

Esercizio 12.16

- (a) Valore atteso: 2.3. Varianza: 0.81.
 (b) Valore atteso: 6.1. Varianza: 19.29.
 (c) Valore atteso: 3.9. Varianza: 5.29.
 (d) Valore atteso: -1.8. Varianza: 12.36.
 (e) Valore atteso: 1. Varianza: 0.
 (f) Valore atteso: -0.1. Varianza: 0.49.

Esercizio 12.17 9 euro.

Esercizio 12.18 Valore atteso: $\frac{10}{3} \simeq 3.33$. Varianza: $\frac{25}{9} \simeq 2.78$. Deviazione standard: $\frac{5}{3} \simeq 1.67$. Né particolarmente fortunato né particolarmente sfortunato: è in media.

Esercizio 12.19 $E(X) = 24$. $DS(X) \simeq 3.098$.

Esercizio 12.20 $E(N_{AA}) = E(N_{aa}) = 75$, $E(N_{Aa}) = 150$. $\text{Var}(N_{AA}) = \text{Var}(N_{aa}) = 56.25$, $\text{Var}(N_{Aa}) = 75$. $DS(N_{AA}) = DS(N_{aa}) = 7.5$, $DS(N_{Aa}) \simeq 8.66$.

Esercizio 12.21 Circa 11.55 famiglie senza figli maschi, 36.5 famiglie con 1 figlio maschio, 38.45 famiglie con due figli maschi, e 13.5 famiglie con 3 figli maschi. In media, una famiglia italiana con 3 figli ha circa 1.54 figli maschi.

Esercizio 12.22 $E(X - \mu) = \sum p_j(x_j - \mu) = \sum p_j x_j - \mu \sum p_j = E(X) - \mu$ perché $\sum p_j = 1$. Quindi $\text{Var}(X - \mu) = \sum p_j((x_j - \mu) - (E(X) - \mu))^2 = \sum p_j(x_j - E(X))^2 = \text{Var}(X)$.

Esercizio 12.23 $E(\sigma X) = \sum p_j(\sigma x_j) = \sigma \sum p_j x_j = \sigma E(X)$. Quindi $\text{Var}(\sigma X) = \sum p_j(\sigma x_j - \sigma E(X))^2 = \sigma^2 \sum p_j(x_j - E(X))^2 = \sigma^2 \text{Var}(X)$.

Esercizio 12.24 Il valore atteso di X è uguale alla media dei dati, e la varianza di X è uguale alla varianza dei dati.

Esercizio 12.25 $\frac{1-p}{p^2}$.

Esercizio 12.26 $(1-p)^h$.

Esercizio 12.27 $\sqrt{p(1-p)}$.

Distribuzione di Poisson

Esercizio 12.28 $p(X \geq 3) = 1 - 5e^{-2} \simeq 0.32$; $p(X < 2) = 3e^{-2} \simeq 0.4$; e $p(X > 0) = 1 - e^{-2} \simeq 0.86$.

Esercizio 12.29 $\sqrt{512} \simeq 22.63$.

Esercizio 12.30 $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - e^{-8.4} \simeq 0.9998$; $DS(X) = \sqrt{8.4} \simeq 2.898$.

Esercizio 12.31

- (a) $\frac{4^4}{4!} e^{-4} \simeq 0.195$.
 (b) 3 oppure 4 furti (hanno la stessa probabilità).

Esercizio 12.32

- (a) $\frac{9}{50} e^{-3/5} \simeq 0.099$.
 (b) $15e^{-3/5} \simeq 8.2$.
 (c) $25e^{-3/5} \simeq 13.7$.

Esercizio 12.33 Ci sono in media 1.8 cellule per quadrato, con una varianza pari a 1.96. La varianza differisce dalla media per meno del 9%; quindi la distribuzione delle cellule può essere considerata casuale.

Esercizio 12.34 Ci sono in media 0.464 larve per fagiolo, con una varianza pari a 0.267. La varianza differisce dalla media per più del 40%; quindi la distribuzione delle larve nei fagioli molto probabilmente non è casuale (le larve tendono a non stare in più di una nello stesso fagiolo).

Esercizio 12.35
$$p(X = k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = \frac{\mu}{k} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu} = \frac{\mu}{k} p(X = k-1).$$

Variabili aleatorie continue

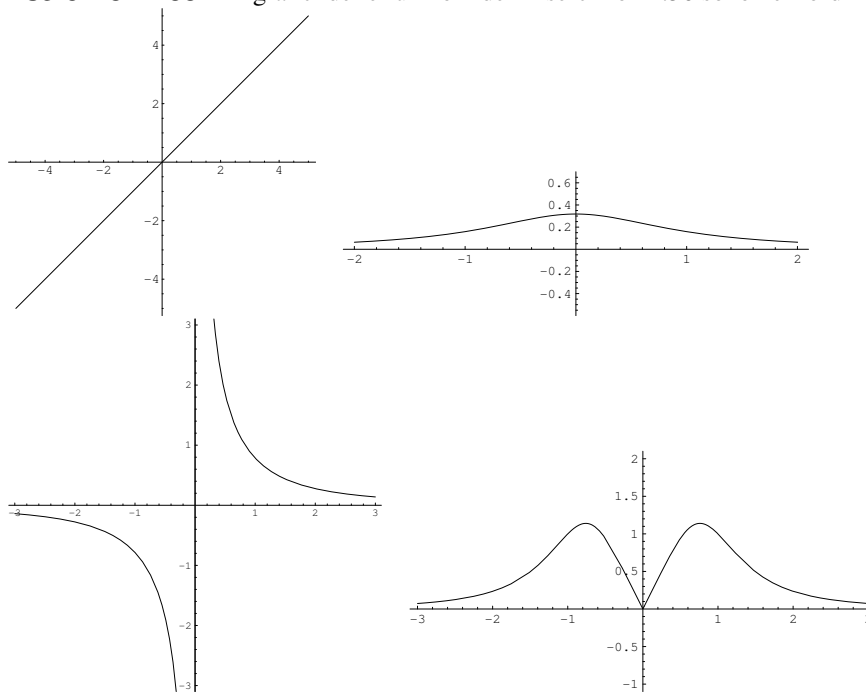
Esercizio 12.36

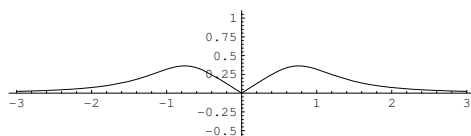
- (a) No (assume valori negativi).
- (b) Sì (è sempre non-negativa e ha integrale su $\mathbb{R}$ pari a 1).
- (c) No (assume valori negativi).
- (d) No (ha integrale su $\mathbb{R}$ diverso da 1).
- (e) Sì (è sempre non-negativa e ha integrale su $\mathbb{R}$ pari a 1).

Esercizio 12.37

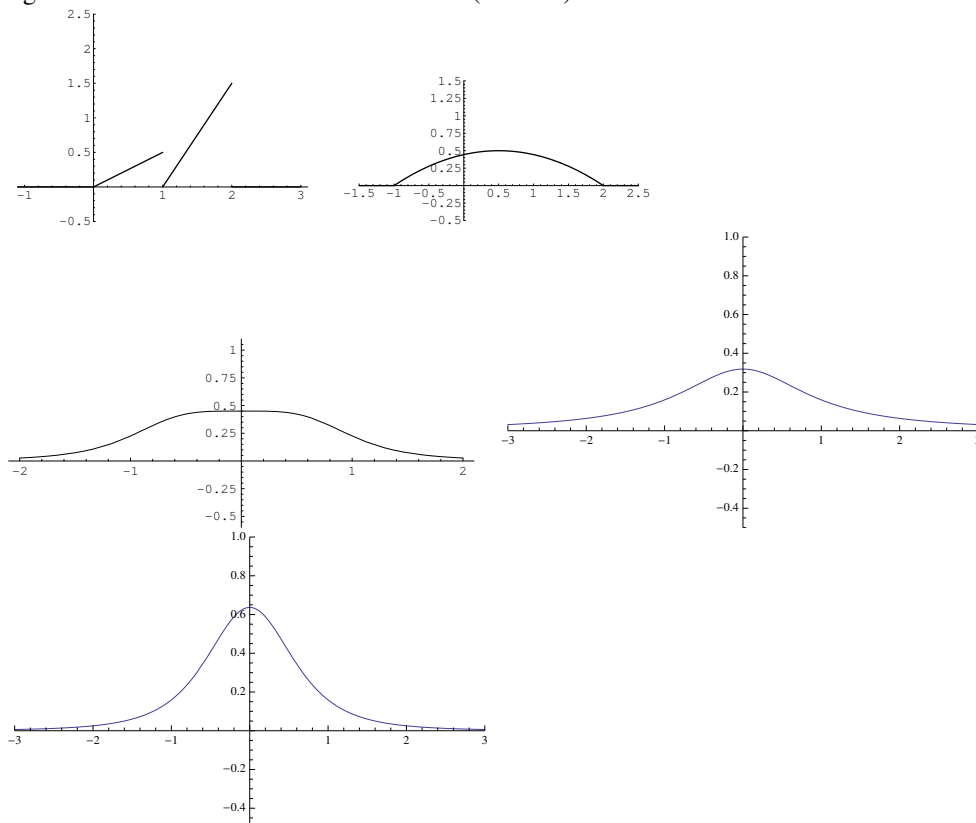
- (a) $E(X) = \frac{17}{12}$; $\text{Var}(X) = \frac{35}{144}$.
- (b) $E(X) = \frac{1}{2}$; $\text{Var}(X) = \frac{9}{20}$.
- (c) $E(X) = 0$; $\text{Var}(X) = 1$.
- (d) [Errata: la densità corretta è data da $f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$.] $E(X) = 0$; $\text{Var}(X) = +\infty$.
- (e) $E(X) = 0$; $\text{Var}(X) = 1$.

Esercizio 12.38 I grafici delle funzioni dell'Esercizio 12.36 sono nell'ordine:





I grafici delle funzioni dell'Esercizio 12.37 (corretto) sono nell'ordine:



Esercizio 12.39 Che è nulla sulle semirette $(-\infty, a)$ e $(b, +\infty)$.

Esercizio 12.40

- (a) Nell'ordine (usando la densità di probabilità corretta per il punto (d)): $3/4$; $7/27$;
 $\frac{1}{4\pi}(\pi - 2 \arctan(2\sqrt{2}/3) + \log((19 - 6\sqrt{2})/17))$; $\frac{1}{\pi} \arctan 2 - \frac{1}{4}$; $\frac{1}{\pi} \arctan(2) - \frac{2+5\pi}{20\pi}$.
- (b) Nell'ordine (usando la densità di probabilità corretta per il punto (d)): $1/4$; $20/27$;
 $\frac{1}{2\pi} \log(3 + 2\sqrt{2}) + \frac{1}{2}$; $1/2$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$.
- (c) Nell'ordine (usando la densità di probabilità corretta per il punto (d)): $1/4$; $20/27$;
 $\frac{1}{4\pi} \log(3 + 2\sqrt{2}) + \frac{3}{4}$; $3/4$; $\frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi}$.
- (d) 0 in tutti i casi.
- (e) Nell'ordine (usando la densità di probabilità corretta per il punto (d)): 0; $7/27$;
 $\frac{1}{4\pi}(2 \arctan(1 + 2\sqrt{2}) - 2 \arctan(1 - 2\sqrt{2}) + \log((33 + 20\sqrt{2})/17))$; $\frac{1}{\pi} \arctan 2$;
 $\frac{2}{5\pi} + \frac{1}{\pi} \arctan 2$.

Esercizio 12.41 L'Osservazione 12.12 dice che $p(X = a) = 0$ sempre. quindi, essendo $\{a \leq X \leq b\}$ unione disgiunta di $\{X = a\}$, $\{a < X < b\}$ e $\{X = b\}$, otteniamo

$p(a \leq X \leq b) = p(a < X < b) + p(X = a) + p(X = b) = p(a < X < b)$. Le altre si ottengono nello stesso modo.

Funzione di distribuzione

Esercizio 12.42

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1; \\ \frac{1}{36} & \text{se } 1 \leq t < 2; \\ \frac{1}{12} & \text{se } 2 \leq t < 3; \\ \frac{5}{36} & \text{se } 3 \leq t < 4; \\ \frac{2}{9} & \text{se } 4 \leq t < 5; \\ \frac{5}{18} & \text{se } 5 \leq t < 6; \end{cases} \quad F_X(t) = \begin{cases} \frac{7}{18} & \text{se } 6 \leq t < 8; \\ \frac{4}{9} & \text{se } 8 \leq t < 9; \\ \frac{17}{36} & \text{se } 9 \leq t < 10; \\ \frac{19}{36} & \text{se } 10 \leq t < 12; \\ \frac{2}{3} & \text{se } 12 \leq t < 15; \\ \frac{25}{36} & \text{se } 15 \leq t < 16; \end{cases} \quad F_X(t) = \begin{cases} \frac{13}{18} & \text{se } 16 \leq t < 18; \\ \frac{7}{9} & \text{se } 18 \leq t < 20; \\ \frac{15}{18} & \text{se } 20 \leq t < 24; \\ \frac{8}{9} & \text{se } 24 \leq t < 25; \\ \frac{11}{12} & \text{se } 25 \leq t < 30; \\ \frac{35}{36} & \text{se } 30 \leq t < 36; \\ 1 & \text{se } t \geq 36. \end{cases}$$

Esercizio 12.43

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1; \\ \frac{1}{48} & \text{se } 1 \leq t < 2; \\ \frac{1}{16} & \text{se } 2 \leq t < 3; \\ \frac{5}{48} & \text{se } 3 \leq t < 4; \\ \frac{1}{6} & \text{se } 4 \leq t < 5; \\ \frac{5}{24} & \text{se } 5 \leq t < 6; \end{cases} \quad F_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{se } 6 \leq t < 8; \\ \frac{3}{8} & \text{se } 8 \leq t < 9; \\ \frac{19}{48} & \text{se } 9 \leq t < 10; \\ \frac{7}{16} & \text{se } 10 \leq t < 12; \\ \frac{9}{16} & \text{se } 12 \leq t < 15; \\ \frac{29}{48} & \text{se } 15 \leq t < 16; \end{cases} \quad F_X(t) = \begin{cases} \frac{5}{8} & \text{se } 16 \leq t < 18; \\ \frac{17}{24} & \text{se } 18 \leq t < 20; \\ \frac{3}{4} & \text{se } 20 \leq t < 24; \\ \frac{5}{6} & \text{se } 24 \leq t < 25; \\ \frac{41}{48} & \text{se } 25 \leq t < 30; \\ \frac{15}{16} & \text{se } 30 \leq t < 36; \\ 1 & \text{se } t \geq 36. \end{cases}$$

Esercizio 12.44

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2; \\ \frac{1}{36} & \text{se } 2 \leq t < 5; \\ \frac{1}{12} & \text{se } 5 \leq t < 8; \\ \frac{1}{9} & \text{se } 8 \leq t < 10; \\ \frac{1}{6} & \text{se } 10 \leq t < 13; \\ \frac{2}{9} & \text{se } 13 \leq t < 17; \\ \frac{5}{18} & \text{se } 17 \leq t < 18; \end{cases} \quad F_X(t) = \begin{cases} \frac{11}{36} & \text{se } 18 \leq t < 20; \\ \frac{13}{36} & \text{se } 20 \leq t < 25; \\ \frac{5}{12} & \text{se } 25 \leq t < 26; \\ \frac{17}{36} & \text{se } 26 \leq t < 29; \\ \frac{19}{36} & \text{se } 29 \leq t < 32; \\ \frac{5}{9} & \text{se } 32 \leq t < 34; \\ \frac{11}{18} & \text{se } 34 \leq t < 37; \end{cases} \quad F_X(t) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{se } 37 \leq t < 40; \\ \frac{13}{18} & \text{se } 40 \leq t < 41; \\ \frac{7}{9} & \text{se } 41 \leq t < 45; \\ \frac{5}{6} & \text{se } 45 \leq t < 50; \\ \frac{31}{36} & \text{se } 50 \leq t < 52; \\ \frac{11}{12} & \text{se } 52 \leq t < 61; \\ \frac{35}{36} & \text{se } 61 \leq t < 72; \\ 1 & \text{se } t \geq 72. \end{cases}$$

Esercizio 12.45

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 2; \\ \frac{1}{64} & \text{se } 2 \leq t < 5; \\ \frac{3}{64} & \text{se } 5 \leq t < 8; \\ \frac{1}{16} & \text{se } 8 \leq t < 10; \\ \frac{3}{32} & \text{se } 10 \leq t < 13; \\ \frac{1}{8} & \text{se } 13 \leq t < 17; \\ \frac{5}{32} & \text{se } 17 \leq t < 18; \end{cases} \quad F_X(t) = \begin{cases} \frac{11}{64} & \text{se } 18 \leq t < 20; \\ \frac{13}{64} & \text{se } 20 \leq t < 25; \\ \frac{15}{64} & \text{se } 25 \leq t < 26; \\ \frac{19}{64} & \text{se } 26 \leq t < 29; \\ \frac{23}{64} & \text{se } 29 \leq t < 32; \\ \frac{3}{8} & \text{se } 32 \leq t < 34; \\ \frac{7}{16} & \text{se } 34 \leq t < 37; \end{cases} \quad F_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } 37 \leq t < 40; \\ \frac{9}{16} & \text{se } 40 \leq t < 41; \\ \frac{5}{16} & \text{se } 41 \leq t < 45; \\ \frac{8}{16} & \text{se } 45 \leq t < 50; \\ \frac{11}{16} & \text{se } 50 \leq t < 52; \\ \frac{3}{4} & \text{se } 52 \leq t < 61; \\ \frac{13}{16} & \text{se } 61 \leq t < 72; \\ \frac{15}{16} & \text{se } 72 \leq t < 73; \\ 1 & \text{se } t \geq 73. \end{cases}$$

Esercizio 12.46

Nell'ordine:

- (a) $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ \frac{t^2}{4} & \text{se } 0 \leq t < 1; \\ \frac{3t^2 - 6t + 4}{4} & \text{se } 1 \leq t < 2; \\ 1 & \text{se } t \geq 2. \end{cases}$
- (b) $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -1; \\ \frac{(1+t)^2(7-2t)}{27} & \text{se } -1 \leq t < 2; \\ 1 & \text{se } t \geq 2. \end{cases}$
- (c) $F_X(t) = \frac{1}{4\pi} \left[2 \arctan(1 + \sqrt{2}t) - 2 \arctan(1 - \sqrt{2}t) + \log \left(\frac{t^2 + \sqrt{2}t + 1}{t^2 - \sqrt{2}t + 1} \right) \right] + \frac{1}{2}.$
- (d) Usando la versione corretta della densità di probabilità: $F_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan t.$
- (e) $F_X(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left(\frac{t}{1+t^2} + \arctan t \right).$

Esercizio 12.47

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq -1; \\ \frac{1}{4}(2 + 3t - t^3) & \text{se } -1 \leq t \leq 1; \\ 1 & \text{se } t \geq 1; \end{cases} \quad E(X) = 0; \text{Var}(X) = \frac{1}{5}.$$

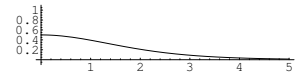
Esercizio 12.48 $f_X(t) = \begin{cases} e^{2t} & \text{se } t \leq 0; \\ 1 & \text{se } 0 \leq t \leq 1/2; \\ 0 & \text{se } t \geq 1/2; \end{cases} \quad E(X) = -\frac{1}{8}; \text{Var}(X) = \frac{53}{192}.$

Esercizio 12.49

(a) $f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0; \\ \frac{2e^x}{(1+e^x)^2} & \text{se } 0 \leq x. \end{cases}$

(b) Dominio: tutto $\mathbb{R}^+$. Segno: sempre positivo. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_X(x) = 0$. Derivata prima:

$f'_X(x) = \frac{2e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$. Derivata seconda: $f''_X(x) = \frac{2e^x(e^{2x}-4e^x+1)}{(1+e^x)^4}$. Grafico:



(c) $E(X) = 2 \log 2.$

Esercizio 12.50 $F_{\sigma X}(t) = F_X(t/\sigma); F_{X-\mu}(t) = F_X(t+\mu); f_{\sigma X}(x) = \frac{1}{\sigma} f_X(x/\sigma); f_{X-\mu}(x) = f_X(x+\mu).$

Esercizio 12.51 Ponendo $y = x + \mu$ troviamo

$$\begin{aligned} E(X - \mu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X-\mu}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x + \mu) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - \mu) f_X(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_X(y) dy - \mu \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y) dy = E(X) - \mu. \end{aligned}$$

Analogamente si ha

$$\text{Var}(X - \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X) + \mu)^2 f_{X-\mu}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (y - E(X))^2 f_X(y) dy = \text{Var}(X).$$

Esercizio 12.52 Ponendo $y = x/\sigma$ troviamo

$$E(\sigma X - \mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\sigma X}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x/\sigma) f_X(x/\sigma) dx = \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} y f_X(y) dy = \sigma E(X).$$

Procedendo analogamente si ha

$$\begin{aligned}\text{Var}(\sigma X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \sigma E(X))^2 f_{\sigma X}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 ((x/\sigma) - E(X))^2 \sigma^{-1} f_X(x/\sigma) dx \\ &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (y - E(X))^2 f_X(y) dy = \sigma^2 \text{Var}(X).\end{aligned}$$

Distribuzione uniforme

Esercizio 12.53

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad f_X(x) &= \begin{cases} 0 & \text{se } x < 4; \\ \frac{1}{4} & \text{se } 4 \leq x \leq 8; \\ 0 & \text{se } x > 8; \end{cases} \quad F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 4; \\ \frac{1}{4}(t - 4) & \text{se } 4 \leq t \leq 8; \\ 1 & \text{se } t > 8. \end{cases} \\ \text{(b)} \quad f_X(x) &= \begin{cases} 0 & \text{se } x < -2; \\ \frac{1}{5} & \text{se } -2 \leq x \leq 3; \\ 0 & \text{se } x > 3; \end{cases} \quad F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < -2; \\ \frac{1}{5}(t + 2) & \text{se } -2 \leq t \leq 3; \\ 1 & \text{se } t > 3. \end{cases}\end{aligned}$$

Esercizio 12.54

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad f_X(x) &= \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1.5; \\ \frac{1}{2} & \text{se } 1.5 \leq x \leq 3.5; \\ 0 & \text{se } x > 3.5; \end{cases} \quad F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1.5; \\ \frac{1}{2}(t - 1.5) & \text{se } 1.5 \leq t \leq 3.5; \\ 1 & \text{se } t > 3.5. \end{cases} \\ \text{(b)} \quad f_X(x) &= \begin{cases} 0 & \text{se } x < 1.5; \\ \frac{3}{16}(-4x^2 + 20x - 21) & \text{se } 1.5 \leq x \leq 3.5; \\ 0 & \text{se } x > 3.5; \end{cases} \\ F_X(t) &= \begin{cases} 0 & \text{se } t < 1.5; \\ \frac{1}{4}(t - 1.5)^2(4.5 - t) & \text{se } 1.5 \leq t \leq 3.5; \\ 1 & \text{se } t > 3.5. \end{cases}\end{aligned}$$

Distribuzione esponenziale

Esercizio 12.55 Infatti $p(\{X > t + s\} | \{X > t\}) = \frac{e^{-(t+s)/\mu}}{e^{-t/\mu}} = e^{-s/\mu} = p(X > s)$.

Esercizio 12.56

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad h_X(t) &= \begin{cases} 0 & \text{se } t < a; \\ \frac{1}{b-t} & \text{se } a \leq t < b; \\ 0 & \text{se } t \geq b. \end{cases} \\ \text{(b)} \quad h_X(t) &= \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0; \\ 1/\mu & \text{se } 0 \leq t. \end{cases}\end{aligned}$$

Esercizio 12.57

- (a) $1/3$.
 (b) $p(X = k) = \binom{4}{k} \frac{1}{3^k} \left(\frac{2}{3}\right)^{4-k}$.
 (c) $(2/3)^4 \simeq 0.198$.
 (d) $8/9 \simeq 0.889$.
 (e) Rispettivamente, $(2/3)^6 \simeq 0.088$ e $1 - 13/3^6 \simeq 0.982$.

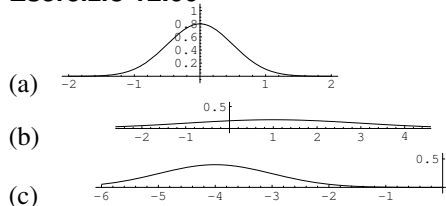
Esercizio 12.58

- (a) $1 - e^{-1} \simeq 0.632$.
 (b) $e^{-1/2} \simeq 0.6$.

Distribuzione normale

Esercizio 12.59 Sono $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$.

Esercizio 12.60



Esercizio 12.61 Applicando la regola di de l'Hôpital si ha

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{-x^2/2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2/2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x e^{x^2/2}} = 0.$$

Esercizio 12.62 Segue subito dall'Esercizio 12.52.

Campioni e popolazione

Esercizio 12.63

- (a) $s \simeq 824.812$, $CVC \simeq 0.129$, e l'intervallo di confidenza al 95% è $[1268.41, 2150.17]$.
- (b) Abbastanza; CVC è intorno a $1/10$, che è un ordine di precisione ragionevole (ma se fosse stato intorno a $1/100$ sarebbe stato meglio).

Esercizio 12.64

- (a) $s \simeq 117539$, $CVC \simeq 0.4262$, e l'intervallo di confidenza al 95% è $[9102.78, 54274.5]$.
- (b) No; CVC è quasi $1/2$, che è molto alto.

Esercizio 12.65

- (a) $s \simeq 0.6733$, $CVC \simeq 0.035$, e l'intervallo di confidenza al 95% è $[4.001, 4.603]$.
- (b) Sì; CVC è poco più di $3/100$, che è basso.

Test d'ipotesi

Esercizio 12.66 Nella somma di tutte le possibili differenze $x_i - y_j$ ciascun x_i viene sommato n volte (una per ogni y_j) e ciascun y_j viene sottratto m volte (una per ogni x_i). Quindi questa somma è pari a $n(x_1 + \dots + x_m) - m(y_1 + \dots + y_n)$. Dividendo per mn (il numero di possibili differenze) otteniamo esattamente $M_X - M_Y$.

Test Z

Esercizio 12.67 È un fenomeno di Bernoulli di media $\mu = p = 0.12$ e varianza $\sigma^2 = 0.1056$, e la media sul campione è $M_n = 0.18$. Abbiamo $np = 30$, $n(1 - p) = 220 > 5$; possiamo applicare il test Z. Abbiamo $|Z| \simeq 2.92 > 2.576$, per cui possiamo smentire l'affermazione dei chirurghi con un livello di affidabilità 0.01.

Esercizio 12.68 L'ipotesi nulla è $\mu = 400 = \sigma^2$; inoltre $n = 100$ e $M_n = 404$. Quindi $|Z| = 2 > 1.960$, per cui possiamo smentire l'affermazione con un livello di affidabilità 0.05 ma non con un livello di affidabilità 0.01.

Test T di Student

Esercizio 12.69 Applichiamo il test T con $n = 51$, $M_n = 248$, $\mu = 250$ e $s_n = 6$. Otteniamo $|T_{50}| \simeq 2.38 > 2.009$, per cui possiamo smentire l'affermazione con un livello di affidabilità 0.05 ma non con un livello di affidabilità 0.01.

Esercizio 12.70 Applichiamo il test T per il confronto di campioni, con $m = n = 11$, $M_X \simeq 2.29$, $M_Y \simeq 2.08$, $s_X^2 \simeq 0.10$ e $s_Y^2 \simeq 0.17$. Quindi $|T_{20}| \simeq 1.328 < 1.725$, per cui i dati raccolti non smentiscono l'ipotesi nulla che la nifepidina non influisca sul diametro delle coronarie.

Esercizio 12.71 Applichiamo il test T come nel Problema 8.6, con $n = 10$, $M_n = 2.3$, $\mu = 0$ e $s_n \simeq 3.466$. Allora $|T_9| \simeq 2.099 > 1.833$, per cui possiamo asserire che il caffè americano influisce sul battito cardiaco con un livello di affidabilità 0.1 ma non con un livello di affidabilità 0.05.

Test F di analisi della varianza (ANOVA)

Esercizio 12.72 Applichiamo il test F con $m = 5$, $n = 26$, $s_{\text{entro}}^2 \simeq 0.52$ e $s_{\text{tra}}^2 \simeq 3.495$. Abbiamo $F_{4,100} \simeq 6.74 > 3.51$, per cui possiamo smentire l'ipotesi nulla che il flusso mesoespiratorio forzato sia simile nei vari campioni con un livello di affidabilità 0.01.

Test χ^2

Esercizio 12.73 Applichiamo il test χ^2 con $n = 100$, $k = 6$ e $p_1 = \dots = p_6 = 1/6$. Abbiamo $\chi_5^2 = 20 > 15.086$, per cui possiamo smentire l'ipotesi che il dado non sia truccato con un livello di affidabilità 0.01.

Esercizio 12.74 Usando le frequenze relative per stimare le probabilità, applichiamo il test χ^2 con $n = 100$, $k = 6$ e $p_1 = p_5 = p_6 = 1/10$, $p_2 = p_4 = 1/5$ e $p_3 = 3/10$. Otteniamo $\chi_5^2 = 0$, per cui (ovviamente...) i dati sono coerenti con la stima fatta.

Esercizio 12.75 Applichiamo il test χ^2 come nell'Esempio 8.32, con $n = 580$, $k = 2$, $p_1 = 3/4$ e $p_2 = 1/4$. Otteniamo $\chi_1^2 \simeq 0.45$, per cui i dati non ci permettono di smentire con livello di affidabilità 0.1 le leggi di Mendel.

Esercizio 12.76 Stimiamo la media con i dati, ottenendo $\mu \simeq 1.82$. Applichiamo il test χ^2 con $k = 6$ e $\ell = 1$; troviamo $\chi_4^2 \simeq 174.31 > 13.277$, per cui possiamo smentire una ipotesi di distribuzione di Poisson con livello di affidabilità 0.01.

Esercizio 12.77 Tabella E12.1: stimiamo la media con i dati, ottenendo $\mu = 1.8$. Applichiamo il test χ^2 con $k = 10$ e $\ell = 1$; troviamo $\chi_8^2 \simeq 33.82 > 20.09$, per cui possiamo smentire una ipotesi di distribuzione di Poisson con livello di affidabilità 0.01. Tabella E12.2: stimiamo la media con i dati, ottenendo $\mu \simeq 0.46$. Applichiamo il test χ^2 con $k = 6$ e $\ell = 1$; troviamo $\chi_4^2 \simeq 17.403 > 13.277$, per cui possiamo smentire una ipotesi di distribuzione di Poisson con livello di affidabilità 0.01.

Esercizio 12.78 Procedendo come descritto nel Problema 12.7 si trova $\chi_2^2 \simeq 9.625 > 9.210$, per cui possiamo smentire l'ipotesi nulla che non ci sia una relazione fra l'attività sportiva e le visite per problemi mestruali con un livello di affidabilità 0.01.

Esercizio 12.79 Procedendo come nell'Esempio 12.33, usiamo i dati per stimare la media $\mu \simeq 6.237$ e la varianza $\sigma^2 \simeq 13.373$. Avendo 30 dati, li suddividiamo in 5 intervalli: $(-\infty, 3]$, $(3, 5]$, $(5, 7]$, $(7, 9]$ e $(9, +\infty)$. Abbiamo quindi $\nu = 2$ gradi di libertà.

Calcolando otteniamo $\chi_2^2 \simeq 6.949 > 5.991$, per cui possiamo smentire l'ipotesi che i dati siano coerenti con una distribuzione normale a un livello di affidabilità 0.05 ma non a un livello di affidabilità 0.01.