Lezioni di Matematica.

Prima parte, a cura della Prof.ssa F. Prinari
Corso di Laurea in Biologia

October 27, 2019

Simboli

se A é un insieme, scriveremo

Simboli

se A é un insieme, scriveremo

- $x \in A$ per dire che x **appartiene** ad A;

Simboli

se A é un insieme, scriveremo

- $x \in A$ per dire che x **appartiene** ad A;
- $x \notin A$ per dire che x **non appartiene** ad A;

Simboli

se A é un insieme, scriveremo

- $x \in A$ per dire che x **appartiene** ad A;
- $x \notin A$ per dire che x **non appartiene** ad A;
- $\forall x \in A$ per dire "per ogni $x \in A$";

Simboli

se A é un insieme, scriveremo

- $x \in A$ per dire che x **appartiene** ad A;
- $x \notin A$ per dire che x **non appartiene** ad A;
- $\forall x \in A$ per dire "per ogni $x \in A$";
- $\exists x \in A$ per dire "esiste $x \in A$";

Simboli

se A é un insieme, scriveremo

- $x \in A$ per dire che x **appartiene** ad A;
- $x \notin A$ per dire che x **non appartiene** ad A;
- $\forall x \in A$ per dire "per ogni $x \in A$";
- $\exists x \in A$ per dire "esiste $x \in A$";
- $\nexists x \in A$ per dire "non esiste $x \in A$";

Simboli

se A é un insieme, scriveremo

- $x \in A$ per dire che x **appartiene** ad A;
- $x \notin A$ per dire che x **non appartiene** ad A;
- $\forall x \in A$ per dire "per ogni $x \in A$";
- $\exists x \in A$ per dire "esiste $x \in A$";
- $\nexists x \in A$ per dire "non esiste $x \in A$";
- indicheremo con $\emptyset$ l'insieme vuoto;

Se A e B sono due insiemi

Se A e B sono due insiemi

- scriveremo $A \subseteq B$ per dire che A é contenuto in B;

Se A e B sono due insiemi

- scriveremo $A \subseteq B$ per dire che A é contenuto in B;
- indicheremo con $A \cap B$ l'insieme **intersezione** di A e B, ossia l'insieme costituito dai punti comuni ad A e B;

Se A e B sono due insiemi

- scriveremo $A \subseteq B$ per dire che A é contenuto in B;
- indicheremo con $A \cap B$ l'insieme **intersezione** di A e B, ossia l'insieme costituito dai punti comuni ad A e B;
- indicheremo con $A \cup B$ l'insieme **unione** di A e B, ossia l'insieme costituito dai punti che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B;

Se A e B sono due insiemi

- scriveremo $A \subseteq B$ per dire che A é contenuto in B;
- indicheremo con $A \cap B$ l'insieme **intersezione** di A e B, ossia l'insieme costituito dai punti comuni ad A e B;
- indicheremo con $A \cup B$ l'insieme **unione** di A e B, ossia l'insieme costituito dai punti che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B;
- indicheremo con $A \times B$ l'insieme **prodotto cartesiano** di A e B, ossia l'insieme

$$A \times B := \{(a, b)\ a \in A, b \in B\}.$$

Se A e B sono due insiemi

- scriveremo $A \subseteq B$ per dire che A é contenuto in B;
- indicheremo con $A \cap B$ l'insieme **intersezione** di A e B, ossia l'insieme costituito dai punti comuni ad A e B;
- indicheremo con $A \cup B$ l'insieme **unione** di A e B, ossia l'insieme costituito dai punti che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B;
- indicheremo con $A \times B$ l'insieme **prodotto cartesiano** di A e B, ossia l'insieme

$$A \times B := \{(a, b)\ a \in A, b \in B\}.$$

se $A = B$ indicheremo con $A^2 := A \times A$.

Notazioni

Indicheremo con

$$\mathbf{N} := \{0, 1, 2, 3 \cdots, \}$$

l'insieme dei numeri **naturali**;

$$\mathbf{Z} := \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

l'insieme dei numeri **interi**;

$$\mathbf{Q} := \{\frac{n}{m};\ n \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$$

l'insieme dei numeri **razionali**.

Notazioni

Indicheremo con

$$\mathbf{N} := \{0, 1, 2, 3 \cdots ,\}$$

l'insieme dei numeri **naturali**;

$$\mathbf{Z} := \{\cdots , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

l'insieme dei numeri **interi**;

$$\mathbf{Q} := \{\frac{n}{m};\ n \in \mathbf{Z}, m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\}$$

l'insieme dei numeri **razionali**. Se rappresentiamo su una retta tali insiemi (scegliendo un'origine 0 ed una unità di misura) si ha che **Q** non copre tutta la retta (sebbene sia "denso" sulla retta ossia é sempre possibile trovare un numero razionale tra due punti qualunque della retta).

I buchi lasciati da Q!!!

Sia

$$A := \{x \in \mathbf{Q} : x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbf{Q} : x > 0\,, x^2 < 2\}$$

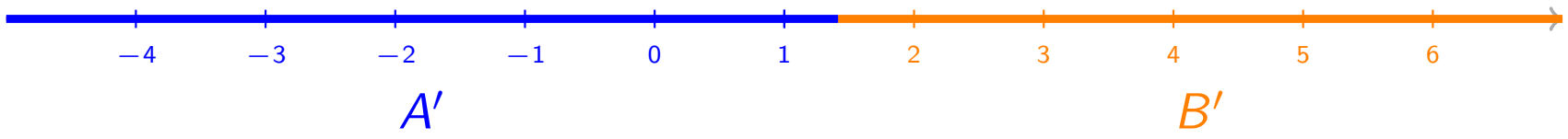
e

$$B = \{x \in \mathbf{Q} : x \geq 0\,, x^2 > 2\}.$$

Allora per ogni $a \in A$ e $b \in B$ vale che $a \leq b$. Infatti

$$A \subseteq A', \quad B \subseteq B'$$

dove A' e B' sono rappresentati da



I buchi lasciati da Q!!!

Sia

$$A := \{x \in \mathbf{Q} : x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbf{Q} : x > 0\,, x^2 < 2\}$$

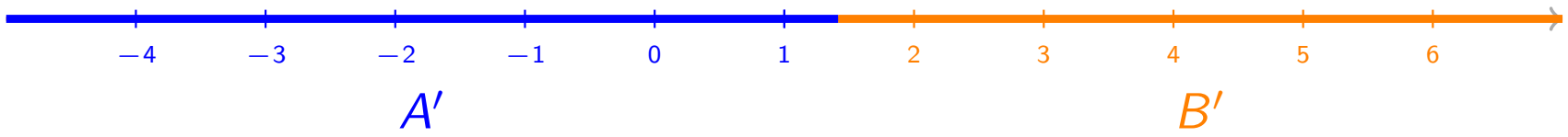
e

$$B = \{x \in \mathbf{Q} : x \geq 0\,, x^2 > 2\}.$$

Allora per ogni $a \in A$ e $b \in B$ vale che $a \leq b$. Infatti

$$A \subseteq A', \quad B \subseteq B'$$

dove A' e B' sono rappresentati da



Inoltre

$$A \cup B = \mathbf{Q} \text{ e } A \cap B = \emptyset.$$

I buchi lasciati da Q!!!

Sia

$$A := \{x \in \mathbf{Q} : x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbf{Q} : x > 0\,, x^2 < 2\}$$

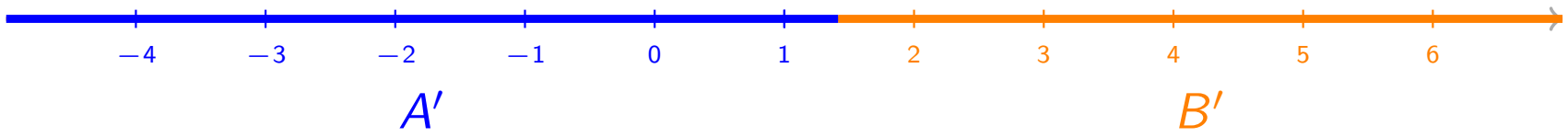
e

$$B = \{x \in \mathbf{Q} : x \geq 0\,, x^2 > 2\}.$$

Allora per ogni $a \in A$ e $b \in B$ vale che $a \leq b$. Infatti

$$A \subseteq A', \quad B \subseteq B'$$

dove A' e B' sono rappresentati da



Inoltre

$$A \cup B = \mathbf{Q} \text{ e } A \cap B = \emptyset.$$

I due insiemi sono tali da essere separati da un punto della retta che deve soddisfare $x^2 = 2$.

Si dimostra che tale punto non può appartenere a $\mathbf{Q}$:
(non dimostrato in classe: se infatti $x = \frac{m}{n}$ con $m, n \in N$ e primi tra loro (ossia senza divisori comuni oltre ad 1), allora

$$m^2 = 2n^2 \Longrightarrow m \text{ é pari}$$

Si dimostra che tale punto non può appartenere a $\mathbf{Q}$:
(<u>non dimostrato in classe</u>: se infatti $x = \frac{m}{n}$ con $m, n \in N$ e primi tra loro (ossia senza divisori comuni oltre ad 1), allora

$$m^2 = 2n^2 \Longrightarrow m \text{ é pari} \Longrightarrow m = 2k$$

Si dimostra che tale punto non può appartenere a $\mathbf{Q}$:
(<u>non dimostrato in classe</u>: se infatti $x = \frac{m}{n}$ con $m, n \in N$ e primi tra loro (ossia senza divisori comuni oltre ad 1), allora

$$m^2 = 2n^2 \Longrightarrow m \text{ é pari} \Longrightarrow m = 2k \Longrightarrow m^2 = 4k^2$$

Si dimostra che tale punto non può appartenere a $\mathbf{Q}$:
(<u>non dimostrato in classe</u>: se infatti $x = \frac{m}{n}$ con $m, n \in N$ e primi tra loro (ossia senza divisori comuni oltre ad 1), allora

$$m^2 = 2n^2 \Longrightarrow m \text{ é pari} \Longrightarrow m = 2k \Longrightarrow m^2 = 4k^2$$

$$\Longrightarrow 4k^2 = 2n^2$$

Si dimostra che tale punto non può appartenere a $\mathbf{Q}$:
(<u>non dimostrato in classe</u>: se infatti $x = \frac{m}{n}$ con $m, n \in N$ e primi tra loro (ossia senza divisori comuni oltre ad 1), allora

$$m^2 = 2n^2 \Longrightarrow m \text{ é pari} \Longrightarrow m = 2k \Longrightarrow m^2 = 4k^2$$

$$\Longrightarrow 4k^2 = 2n^2 \Longrightarrow n^2 = 2k^2$$

Si dimostra che tale punto non può appartenere a $\mathbf{Q}$:
(<u>non dimostrato in classe</u>: se infatti $x = \frac{m}{n}$ con $m, n \in N$ e primi tra loro (ossia senza divisori comuni oltre ad 1), allora

$$m^2 = 2n^2 \Longrightarrow m \text{ é pari} \Longrightarrow m = 2k \Longrightarrow m^2 = 4k^2$$

$$\Longrightarrow 4k^2 = 2n^2 \Longrightarrow n^2 = 2k^2 \Longrightarrow n \text{ é pari}$$

Si dimostra che tale punto non può appartenere a $\mathbf{Q}$:
(non dimostrato in classe: se infatti $x = \frac{m}{n}$ con $m, n \in N$ e primi tra loro (ossia senza divisori comuni oltre ad 1), allora

$$m^2 = 2n^2 \Longrightarrow m \text{ é pari} \Longrightarrow m = 2k \Longrightarrow m^2 = 4k^2$$

$$\Longrightarrow 4k^2 = 2n^2 \Longrightarrow n^2 = 2k^2 \Longrightarrow n \text{ é pari}$$

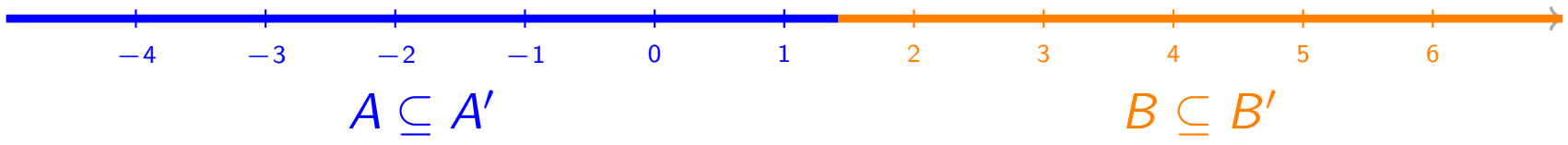
Quindi m, n non sarebbero più primi tra di loro.)
Si definisce $\sqrt{2}$ questo punto e si dice che $\sqrt{2}$ appartiene all'insieme dei numeri reali $\mathbf{R}$. Sup-Inf

Si dimostra che tale punto non può appartenere a $\mathbf{Q}$:
(<u>non dimostrato in classe</u>: se infatti $x = \frac{m}{n}$ con $m, n \in N$ e primi tra loro (ossia senza divisori comuni oltre ad 1), allora

$$m^2 = 2n^2 \Longrightarrow m \text{ é pari} \Longrightarrow m = 2k \Longrightarrow m^2 = 4k^2$$

$$\Longrightarrow 4k^2 = 2n^2 \Longrightarrow n^2 = 2k^2 \Longrightarrow n \text{ é pari}$$

Quindi m, n non sarebbero più primi tra di loro.)
Si definisce $\sqrt{2}$ questo punto e si dice che $\sqrt{2}$ appartiene all'insieme dei numeri reali $\mathbf{R}$. Sup-Inf

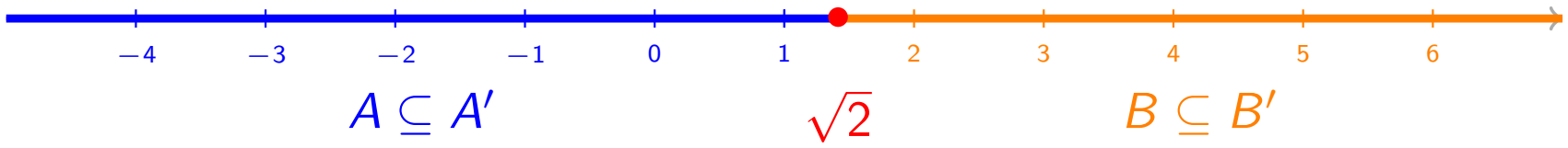


Si dimostra che tale punto non può appartenere a $\mathbf{Q}$:
(non dimostrato in classe: se infatti $x = \frac{m}{n}$ con $m, n \in N$ e primi tra loro (ossia senza divisori comuni oltre ad 1), allora

$$m^2 = 2n^2 \Longrightarrow m \text{ é pari} \Longrightarrow m = 2k \Longrightarrow m^2 = 4k^2$$

$$\Longrightarrow 4k^2 = 2n^2 \Longrightarrow n^2 = 2k^2 \Longrightarrow n \text{ é pari}$$

Quindi m, n non sarebbero più primi tra di loro.)
Si definisce $\sqrt{2}$ questo punto e si dice che $\sqrt{2}$ appartiene all'insieme dei numeri reali $\mathbf{R}$. Sup-Inf



L'insieme dei numeri reali **R** é quell'ampliamento di **Q** che mette in corrispondenza (in modo unico) ogni punto della retta con un numero e viceversa.

L'insieme dei numeri reali **R** é quell'ampliamento di **Q** che mette in corrispondenza (in modo unico) ogni punto della retta con un numero e viceversa.
Si dice che R ha la proprietà del "continuo" (=non ha "buchi").

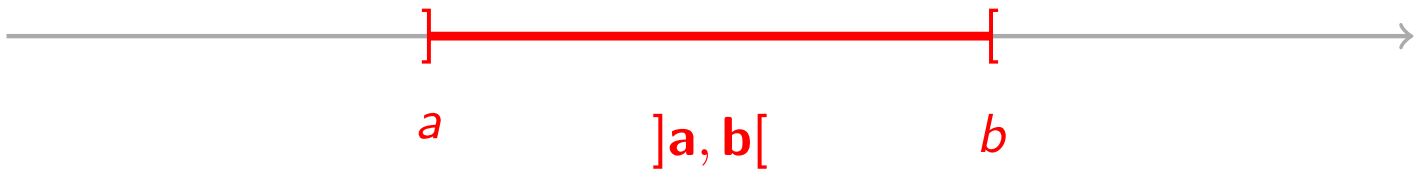
Intervalli limitati

Definizione

Siano $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$.
Si definisce **intervallo aperto** *di estremi* a *e* b *l'insieme*

$$(a, b) =]a, b[:= \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}.$$

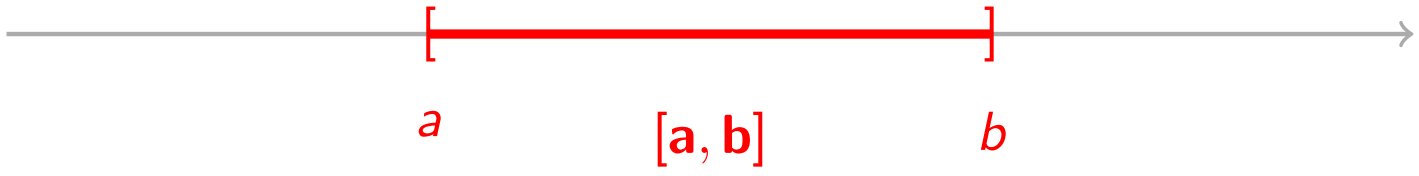
Tale intervallo si indica anche come $]a, b[$.



Definizione

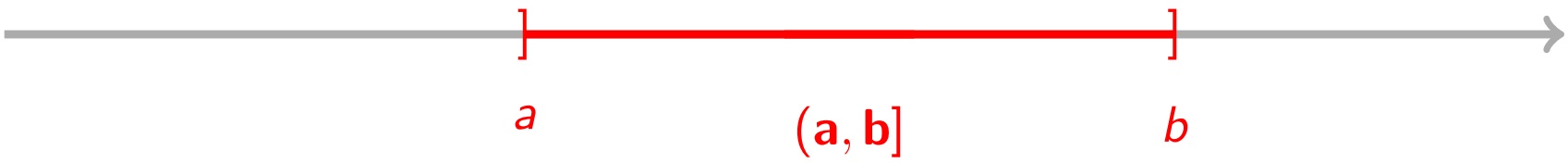
Si definisce **intervallo chiuso** *di estremi a e b l'insieme*

$$[a, b] := \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}.$$



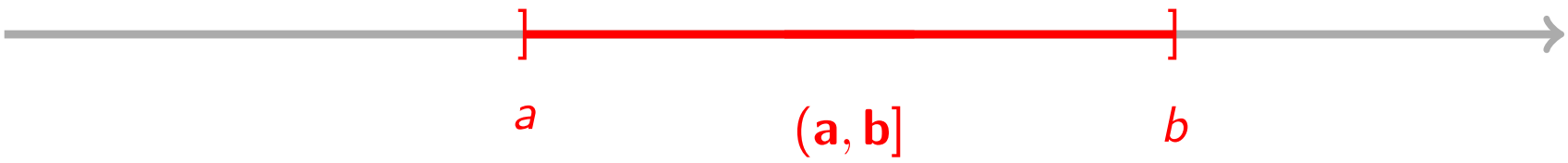
Si possono inoltre definire intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra, ossia intervalli del tipo

$$]a, b](= (a, b]) := \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$$



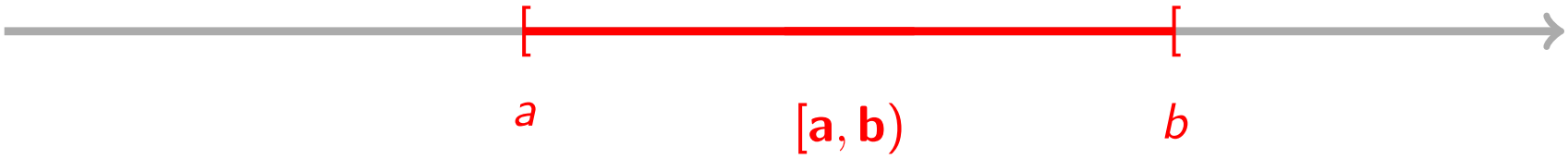
Si possono inoltre definire intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra, ossia intervalli del tipo

$$]a, b](= (a, b]) := \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$$



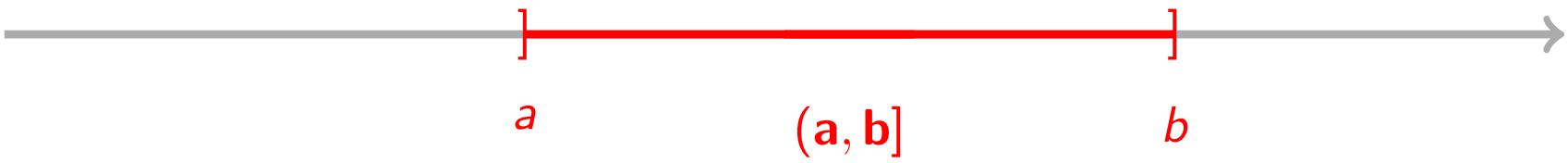
e intervalli chiusi a sinistra e aperti a destra, ossia intervalli del tipo

$$[a, b) := \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}.$$



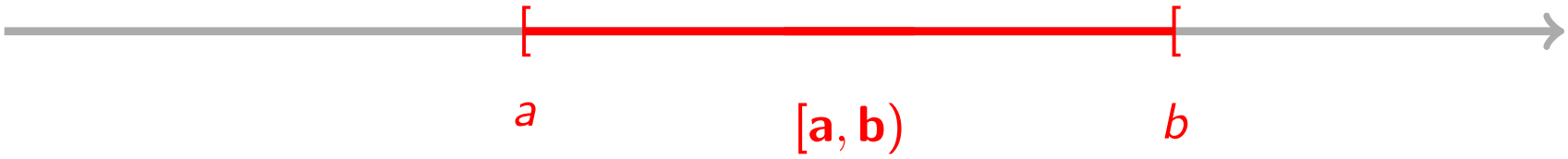
Si possono inoltre definire intervalli aperti a sinistra e chiusi a destra, ossia intervalli del tipo

$$]a, b](= (a, b]) := \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$$



e intervalli chiusi a sinistra e aperti a destra, ossia intervalli del tipo

$$[a, b) := \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}.$$



Gli intervalli introdotti finora sono **limitati sia dall'alto che dal basso** nel senso che ci sono due valori reali (a e b) che limitano (rispettivamente) dal basso e dall'alto gli elementi x che stanno nell'intervallo.

Massimo o estremo superiore?

Se consideriamo gli intervalli I del tipo (a, b) o $[a, b)$ si ha che

Massimo o estremo superiore?

Se consideriamo gli intervalli I del tipo (a, b) o $[a, b)$ si ha che

1. b **limita dall'alto l'insieme** I ossia $x \leq b$ **per ogni** $x \in I$;

Massimo o estremo superiore?

Se consideriamo gli intervalli I del tipo (a, b) o $[a, b)$ si ha che

1. b **limita dall'alto l'insieme** I ossia $x \leq b$ **per ogni** $x \in I$;
2. b **é il piú piccolo** numero reale che ha questa proprietá.

Massimo o estremo superiore?

Se consideriamo gli intervalli I del tipo (a, b) o $[a, b)$ si ha che

1. b **limita dall'alto l'insieme** I ossia $x \leq b$ **per ogni** $x \in I$;
2. b **é il piú piccolo** numero reale che ha questa proprietá.

Il punto b viene detto **l'estremo superiore** dell'insieme I e si scrive

$$b = \sup I.$$

Massimo o estremo superiore?

Se consideriamo gli intervalli I del tipo (a, b) o $[a, b)$ si ha che

1. b **limita dall'alto l'insieme** I ossia $x \leq b$ **per ogni** $x \in I$;
2. b **é il piú piccolo** numero reale che ha questa proprietá.

Il punto b viene detto **l'estremo superiore** dell'insieme I e si scrive

$$b = \sup I.$$

Se consideriamo gli intervalli I del tipo $(a, b]$ o $[a, b]$ si ha che

- b **limita dall'alto l'insieme** I
- $b \in I$ ossia **appartiene ad** I. In particolare é il più piccolo numero reale che limita dall'alto I.

Massimo o estremo superiore?

Se consideriamo gli intervalli I del tipo (a, b) o $[a, b)$ si ha che

1. b **limita dall'alto l'insieme** I ossia $x \leq b$ **per ogni** $x \in I$;
2. b **é il piú piccolo** numero reale che ha questa proprietá.

Il punto b viene detto **l'estremo superiore** dell'insieme I e si scrive

$$b = \sup I.$$

Se consideriamo gli intervalli I del tipo $(a, b]$ o $[a, b]$ si ha che

- b **limita dall'alto l'insieme** I
- $b \in I$ ossia **appartiene ad** I. In particolare é il più piccolo numero reale che limita dall'alto I.

Si dice che b é il **massimo** dell'insieme I e si scrive

$$b = \max I.$$

Massimo o estremo superiore?

Se consideriamo gli intervalli I del tipo (a, b) o $[a, b)$ si ha che

1. b **limita dall'alto l'insieme** I ossia $x \leq b$ **per ogni** $x \in I$;
2. b **é il piú piccolo** numero reale che ha questa proprietá.

Il punto b viene detto **l'estremo superiore** dell'insieme I e si scrive

$$b = \sup I.$$

Se consideriamo gli intervalli I del tipo $(a, b]$ o $[a, b]$ si ha che

- b **limita dall'alto l'insieme** I
- $b \in I$ ossia **appartiene ad** I. In particolare é il più piccolo numero reale che limita dall'alto I.

Si dice che b é il **massimo** dell'insieme I e si scrive

$$b = \max I.$$

Si osservi che il max é un sup.

Massimo o estremo superiore?

Se consideriamo gli intervalli I del tipo (a, b) o $[a, b)$ si ha che

1. b **limita dall'alto l'insieme** I ossia $x \leq b$ **per ogni** $x \in I$;
2. b **é il piú piccolo** numero reale che ha questa proprietá.

Il punto b viene detto **l'estremo superiore** dell'insieme I e si scrive

$$b = \sup I.$$

Se consideriamo gli intervalli I del tipo $(a, b]$ o $[a, b]$ si ha che

- b **limita dall'alto l'insieme** I
- $b \in I$ ossia **appartiene ad** I. In particolare é il più piccolo numero reale che limita dall'alto I.

Si dice che b é il **massimo** dell'insieme I e si scrive

$$b = \max I.$$

Si osservi che il max é un sup.Invece il sup diventa max se appartiene all'insieme.

Esempio

Consideriamo I=età dei minorenni (espressa in anni)$\equiv [0, 18)$. Il numero 18 limita superiormente l'età dei minorenni ed é un sup ma non un max!

Minimo o estremo inferiore?

Se consideriamo invece gli intervalli I del tipo (a, b) o $(a, b]$ si ha che

- a **limita dal basso l'insieme** I ossia $x \geq a \ \forall x \in A$;
- a é il **più grande** numero reale che ha tale proprietà.

Minimo o estremo inferiore?

Se consideriamo invece gli intervalli I del tipo (a, b) o $(a, b]$ si ha che

- a **limita dal basso l'insieme** I ossia $x \geq a \ \forall x \in A$;
- a é il **più grande** numero reale che ha tale proprietà.

Si dice che a é **l'estremo inferiore** dell'intervallo I e si scrive

$$a = \inf I.$$

Minimo o estremo inferiore?

Se consideriamo invece gli intervalli I del tipo (a, b) o $(a, b]$ si ha che

- a **limita dal basso l'insieme** I ossia $x \geq a \ \forall x \in A$;
- a é il **più grande** numero reale che ha tale proprietà.

Si dice che a é **l'estremo inferiore** dell'intervallo I e si scrive

$$a = \inf I.$$

Se consideriamo gli intervalli I del tipo $[a, b]$ o $[a, b)$ si ha che

- a **limita dal basso l'insieme** I
- $a \in I$ ossia a **appartiene ad** I .

Minimo o estremo inferiore?

Se consideriamo invece gli intervalli I del tipo (a, b) o $(a, b]$ si ha che

- a **limita dal basso l'insieme** I ossia $x \geq a \ \forall x \in A$;
- a é il **più grande** numero reale che ha tale proprietà.

Si dice che a é **l'estremo inferiore** dell'intervallo I e si scrive

$$a = \inf I.$$

Se consideriamo gli intervalli I del tipo $[a, b]$ o $[a, b)$ si ha che

- a **limita dal basso l'insieme** I
- $a \in I$ ossia a **appartiene ad** I .

In tal caso si dice che a é il **minimo** dell'insieme I e si scrive

$$a = \min I.$$

Minimo o estremo inferiore?

Se consideriamo invece gli intervalli I del tipo (a, b) o $(a, b]$ si ha che

- a **limita dal basso l'insieme** I ossia $x \geq a \ \forall x \in A$;
- a é il **più grande** numero reale che ha tale proprietà.

Si dice che a é **l'estremo inferiore** dell'intervallo I e si scrive

$$a = \inf I.$$

Se consideriamo gli intervalli I del tipo $[a, b]$ o $[a, b)$ si ha che

- a **limita dal basso l'insieme** I
- $a \in I$ ossia a **appartiene ad** I .

In tal caso si dice che a é il **minimo** dell'insieme I e si scrive

$$a = \min I.$$

Si osservi che i min sono sempre inf. Invece un inf é un min se appartiene all'insieme.

Quando $a = -\infty$ si ottengono degli intervalli che sono delle "semirette":

- **semiretta chiusa a destra**

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbf{R} : x \leq b\}$$

che é un intervallo chiuso, limitato dall'alto e illimitato dal basso;

Quando $a = -\infty$ si ottengono degli intervalli che sono delle "semirette":

- **semiretta chiusa a destra**

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbf{R} : x \leq b\}$$

che é un intervallo chiuso, limitato dall'alto e illimitato dal basso;

In tal caso $\max I = b$,

Quando $a = -\infty$ si ottengono degli intervalli che sono delle "semirette":

- **semiretta chiusa a destra**

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbf{R} : x \leq b\}$$

che é un intervallo chiuso, limitato dall'alto e illimitato dal basso;

In tal caso $\max I = b$, e $\inf I := -\infty$.

Quando $a = -\infty$ si ottengono degli intervalli che sono delle "semirette":

- **semiretta chiusa a destra**

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbf{R} : x \leq b\}$$

che é un intervallo chiuso, limitato dall'alto e illimitato dal basso;

In tal caso $\max I = b$, e $\inf I := -\infty$.

- **semiretta aperta a destra**

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbf{R} : x < b\}$$

che é un intervallo aperto, limitato dall'alto e illimitato dal basso;

Quando $a = -\infty$ si ottengono degli intervalli che sono delle "semirette":

- **semiretta chiusa a destra**

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbf{R} : x \leq b\}$$

che é un intervallo chiuso, limitato dall'alto e illimitato dal basso;

In tal caso $\max I = b$, e $\inf I := -\infty$.

- **semiretta aperta a destra**

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbf{R} : x < b\}$$

che é un intervallo aperto, limitato dall'alto e illimitato dal basso;

In tal caso $\sup I := b$,

Quando $a = -\infty$ si ottengono degli intervalli che sono delle "semirette":

- **semiretta chiusa a destra**

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbf{R} : x \leq b\}$$

che é un intervallo chiuso, limitato dall'alto e illimitato dal basso;

In tal caso $\max I = b$, e $\inf I := -\infty$.

- **semiretta aperta a destra**

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbf{R} : x < b\}$$

che é un intervallo aperto, limitato dall'alto e illimitato dal basso;

In tal caso $\sup I := b$, $\inf I := -\infty$.

Quando $b = +\infty$ si ottengono degli intervalli che sono un altro tipo di semirette:

- **semiretta aperta a sinistra**

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbf{R} : x > a\}$$

che é un intervallo aperto, illimitato dall'alto e limitato dal basso:

Quando $b = +\infty$ si ottengono degli intervalli che sono un altro tipo di semirette:

- **semiretta aperta a sinistra**

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbf{R} : x > a\}$$

che é un intervallo aperto, illimitato dall'alto e limitato dal basso:

In tal caso $\inf I := a$,

Quando $b = +\infty$ si ottengono degli intervalli che sono un altro tipo di semirette:

- **semiretta aperta a sinistra**

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbf{R} : x > a\}$$

che é un intervallo aperto, illimitato dall'alto e limitato dal basso:

In tal caso $\inf I := a, \quad \sup I := +\infty.$

Quando $b = +\infty$ si ottengono degli intervalli che sono un altro tipo di semirette:

- **semiretta aperta a sinistra**

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbf{R} : x > a\}$$

che é un intervallo aperto, illimitato dall'alto e limitato dal basso:

In tal caso $\inf I := a, \quad \sup I := +\infty.$

- **semiretta chiusa a sinistra**

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbf{R} : x \geq a\}$$

che é un intervallo chiuso, illimitato dall'alto e limitato dal basso.

Quando $b = +\infty$ si ottengono degli intervalli che sono un altro tipo di semirette:

- **semiretta aperta a sinistra**

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbf{R} : x > a\}$$

che é un intervallo aperto, illimitato dall'alto e limitato dal basso:

In tal caso $\inf I := a, \quad \sup I := +\infty.$

- **semiretta chiusa a sinistra**

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbf{R} : x \geq a\}$$

che é un intervallo chiuso, illimitato dall'alto e limitato dal basso.

In tal caso $\min I = a,$

Quando $b = +\infty$ si ottengono degli intervalli che sono un altro tipo di semirette:

- **semiretta aperta a sinistra**

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbf{R} : x > a\}$$

che é un intervallo aperto, illimitato dall'alto e limitato dal basso:

In tal caso $\inf I := a, \quad \sup I := +\infty.$

- **semiretta chiusa a sinistra**

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbf{R} : x \geq a\}$$

che é un intervallo chiuso, illimitato dall'alto e limitato dal basso.

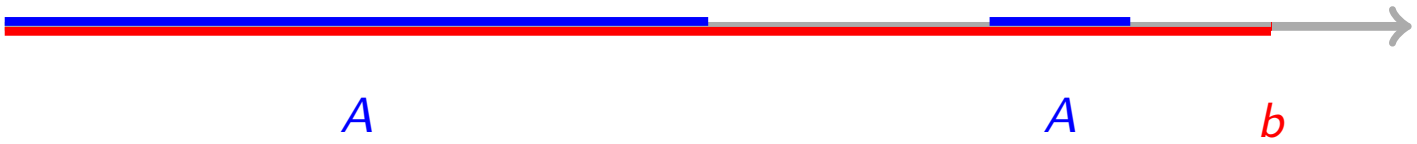
In tal caso $\min I = a, \quad \sup I := +\infty.$

Insiemi limitati superiormente.

Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Se esiste $b \in \mathbf{R}$ tale che $A \subseteq (-\infty, b]$

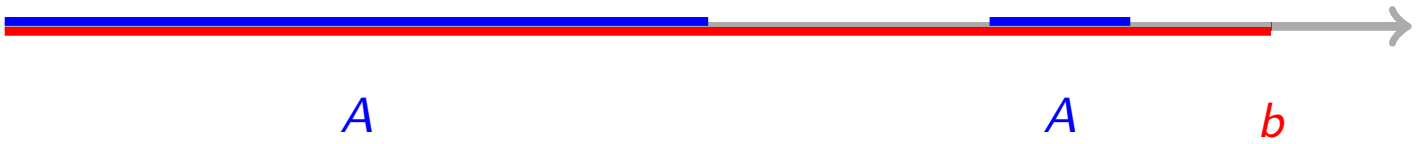
Insiemi limitati superiormente.

Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Se esiste $b \in \mathbf{R}$ tale che $A \subseteq (-\infty, b]$



Insiemi limitati superiormente.

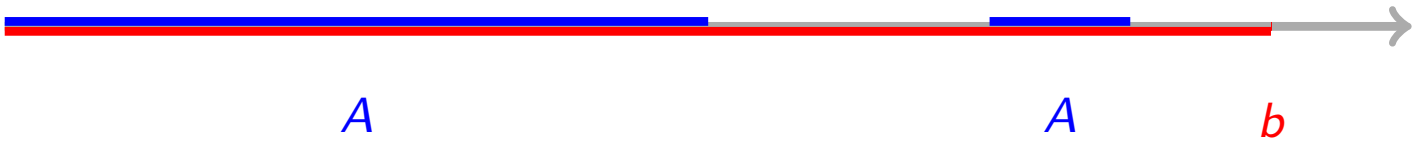
Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Se esiste $b \in \mathbf{R}$ tale che $A \subseteq (-\infty, b]$



diremo che A é **limitato superiormente**.

Insiemi limitati superiormente.

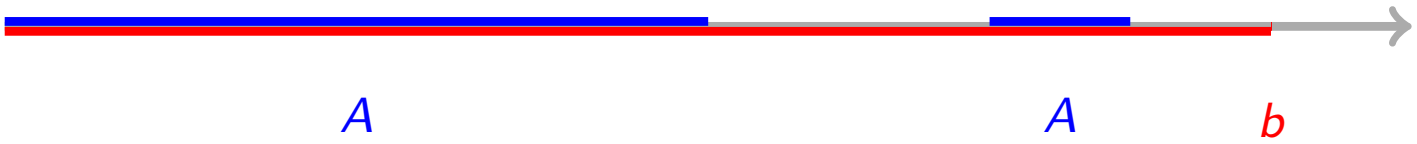
Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Se esiste $b \in \mathbf{R}$ tale che $A \subseteq (-\infty, b]$



diremo che A é **limitato superiormente**.
Se A é limitato superiormente, chiameremo **estremo superiore** di A **il più piccolo** b che limita A dall'alto e lo indicheremo con $\sup A$.

Insiemi limitati superiormente.

Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Se esiste $b \in \mathbf{R}$ tale che $A \subseteq (-\infty, b]$

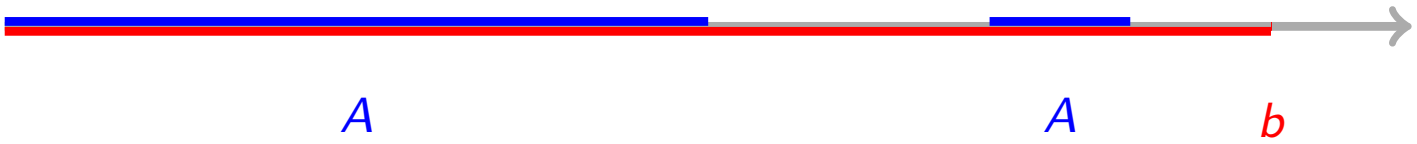


diremo che A é **limitato superiormente**.
Se A é limitato superiormente, chiameremo **estremo superiore** di A **il più piccolo** b che limita A dall'alto e lo indicheremo con $\sup A$.
Se esiste $M \in A$ tale che $x \leq M$ per ogni $x \in A$ diremo che

$$M = \max A.$$

Insiemi limitati superiormente.

Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Se esiste $b \in \mathbf{R}$ tale che $A \subseteq (-\infty, b]$



diremo che A é **limitato superiormente**.
Se A é limitato superiormente, chiameremo **estremo superiore** di A **il più piccolo** b che limita A dall'alto e lo indicheremo con $\sup A$.
Se esiste $M \in A$ tale che $x \leq M$ per ogni $x \in A$ diremo che

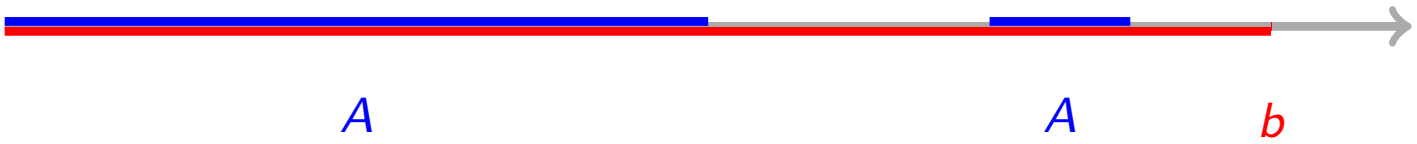
$$M = \max A.$$

Quindi

$$M = \max A \iff \begin{cases} x \leq M \quad \forall x \in A \\ \\ M \in A \end{cases} \tag{1}$$

Insiemi limitati superiormente.

Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Se esiste $b \in \mathbf{R}$ tale che $A \subseteq (-\infty, b]$



diremo che A é **limitato superiormente**.
Se A é limitato superiormente, chiameremo **estremo superiore** di A **il più piccolo** b che limita A dall'alto e lo indicheremo con $\sup A$.
Se esiste $M \in A$ tale che $x \leq M$ per ogni $x \in A$ diremo che

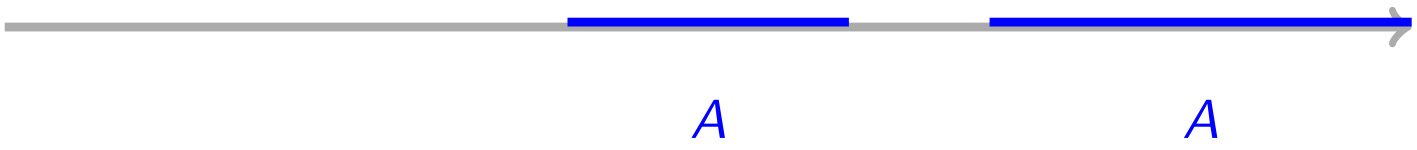
$$M = \max A.$$

Quindi

$$M = \max A \iff \begin{cases} x \leq M & \forall x \in A \\ M \in A \end{cases} \tag{1}$$

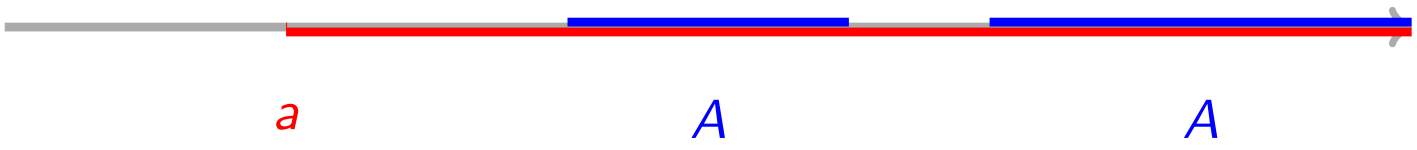
Insiemi limitati inferiormente.

Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Se esiste $a \in \mathbf{R}$ tale che $A \subseteq [a, +\infty)$ diremo che A é **limitato inferiormente**;



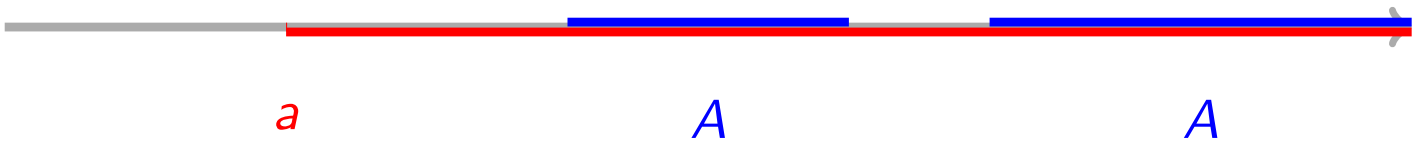
Insiemi limitati inferiormente.

Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Se esiste $a \in \mathbf{R}$ tale che $A \subseteq [a, +\infty)$ diremo che A é **limitato inferiormente**;



Insiemi limitati inferiormente.

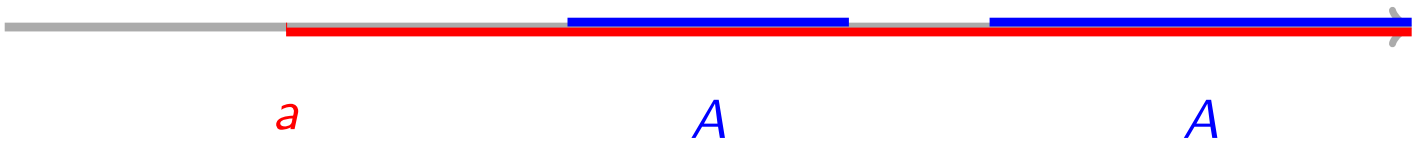
Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Se esiste $a \in \mathbf{R}$ tale che $A \subseteq [a, +\infty)$ diremo che A é **limitato inferiormente**;



Se A é limitato inferiormente, chiameremo **estremo inferiore** di A **il più grande** a che limita A dal basso e lo indicheremo con $\inf A$.

Insiemi limitati inferiormente.

Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Se esiste $a \in \mathbf{R}$ tale che $A \subseteq [a, +\infty)$ diremo che A é **limitato inferiormente**;

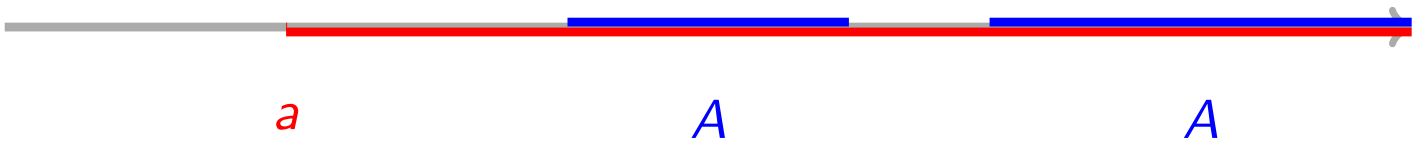


Se A é limitato inferiormente, chiameremo **estremo inferiore** di A **il più grande** a che limita A dal basso e lo indicheremo con $\inf A$.
Se esiste $m \in A$ tale che $x \geq m$ per ogni $x \in A$ diremo che

$$m = \min A.$$

Insiemi limitati inferiormente.

Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Se esiste $a \in \mathbf{R}$ tale che $A \subseteq [a, +\infty)$ diremo che A é **limitato inferiormente**;



Se A é limitato inferiormente, chiameremo **estremo inferiore** di A **il più grande** a che limita A dal basso e lo indicheremo con $\inf A$.
Se esiste $m \in A$ tale che $x \geq m$ per ogni $x \in A$ diremo che

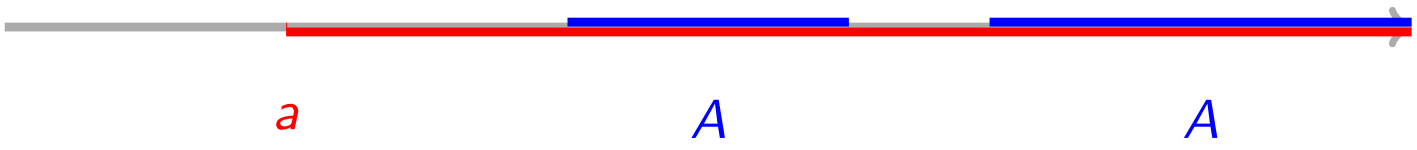
$$m = \min A.$$

Quindi

$$m = \min A \iff \begin{cases} x \geq m & \forall x \in A \\ m \in A \end{cases} \tag{2}$$

Insiemi limitati inferiormente.

Sia $A \subseteq \mathbf{R}$. Se esiste $a \in \mathbf{R}$ tale che $A \subseteq [a, +\infty)$ diremo che A é **limitato inferiormente**;

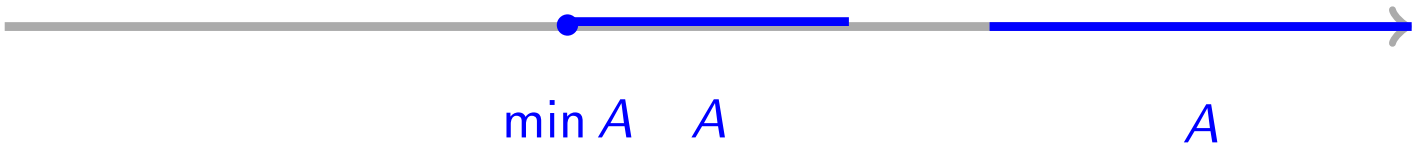


Se A é limitato inferiormente, chiameremo **estremo inferiore** di A **il più grande** a che limita A dal basso e lo indicheremo con $\inf A$.
Se esiste $m \in A$ tale che $x \geq m$ per ogni $x \in A$ diremo che

$$m = \min A.$$

Quindi

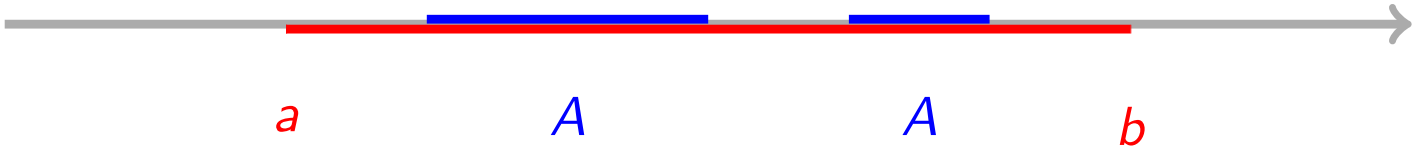
$$m = \min A \iff \begin{cases} x \geq m & \forall x \in A \\ m \in A \end{cases} \tag{2}$$



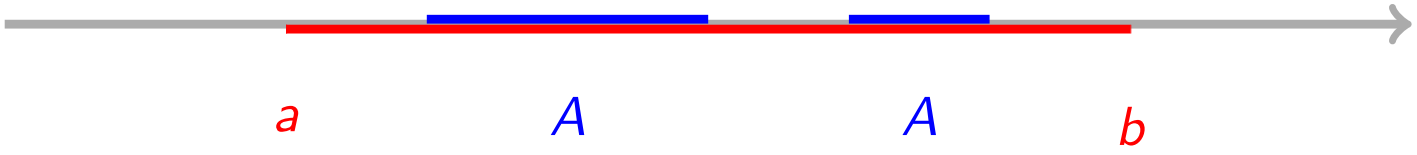
Se esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $A \subseteq (a, b)$ diremo che A é un insieme **limitato**.

Se esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $A \subseteq (a, b)$ diremo che A é un insieme **limitato**.

Se esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $A \subseteq (a, b)$ diremo che A é un insieme **limitato**.



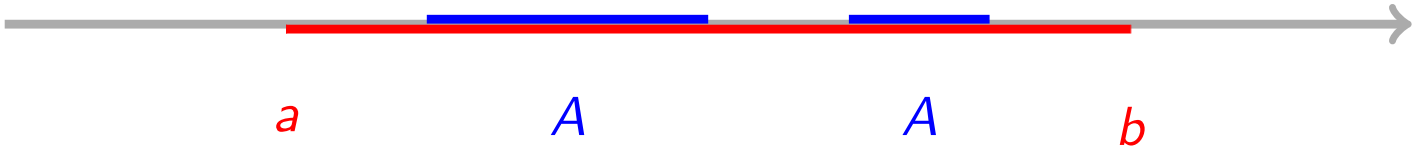
Se esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $A \subseteq (a, b)$ diremo che A é un insieme **limitato**.



Se esiste $m \in A$ tale che $x \geq m$ per ogni $x \in A$ diremo che

$$m = \min A.$$

Se esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $A \subseteq (a, b)$ diremo che A é un insieme **limitato**.



Se esiste $m \in A$ tale che $x \geq m$ per ogni $x \in A$ diremo che

$$m = \min A.$$

Se esiste $M \in A$ tale che $x \leq M$ per ogni $x \in A$ diremo che

$$M = \max A.$$

In generale un sottoinsieme A non é detto che abbia massimo o minimo;

In generale un sottoinsieme A non é detto che abbia massimo o minimo; però, grazie **all'assioma di completezza**

In generale un sottoinsieme A non é detto che abbia massimo o minimo; però, grazie **all'assioma di completezza**

- se un $A \subseteq \mathbf{R}$ é non vuoto e limitato superiormente allora A ha estremo superiore in $\mathbf{R}$ che corrisponde al più piccolo b che limita A dall'alto;

In generale un sottoinsieme A non é detto che abbia massimo o minimo; però, grazie **all'assioma di completezza**

- se un $A \subseteq \mathbf{R}$ é non vuoto e limitato superiormente allora A ha estremo superiore in $\mathbf{R}$ che corrisponde al più piccolo b che limita A dall'alto;
- se un $A \subseteq \mathbf{R}$ é non vuoto e limitato inferiormente, allora A ha estremo inferiore in $\mathbf{R}$ che corrisponde al più grande a che limita l'insieme A dal basso.

In generale un sottoinsieme A non é detto che abbia massimo o minimo; però, grazie **all'assioma di completezza**

- se un $A \subseteq \mathbf{R}$ é non vuoto e limitato superiormente allora A ha estremo superiore in $\mathbf{R}$ che corrisponde al più piccolo b che limita A dall'alto;
- se un $A \subseteq \mathbf{R}$ é non vuoto e limitato inferiormente, allora A ha estremo inferiore in $\mathbf{R}$ che corrisponde al più grande a che limita l'insieme A dal basso.

Nell'esempio $\sqrt{2}$ A é limitato superiormente e B inferiormente e

$$\sup A = \sqrt{2} = \inf B.$$

Approfondimento: l'assioma di completezza

Esattamente in **R** vale l'assioma di completezza.

Approfondimento: l'assioma di completezza

Esattamente in **R** vale l'assioma di completezza.
Per ogni coppia di sottoinsiemi non vuoti A e B di **R** tali che

$$a \leq b \quad \text{per ogni } a \in A \text{ e per ogni } b \in B$$

esiste un elemento $c \in \mathbf{R}$ tale che

$$a \leq c \leq b \quad \text{per ogni } a \in A \text{ e per ogni } b \in B.$$

c si chiama **elemento separatore** degli insiemi A e B.

Approfondimento: l'assioma di completezza

Esattamente in **R** vale l'assioma di completezza.
Per ogni coppia di sottoinsiemi non vuoti A e B di **R** tali che

$$a \leq b \quad \text{per ogni } a \in A \text{ e per ogni } b \in B$$

esiste un elemento $c \in \mathbf{R}$ tale che

$$a \leq c \leq b \quad \text{per ogni } a \in A \text{ e per ogni } b \in B.$$

c si chiama **elemento separatore** degli insiemi A e B.
In generale non esiste un unico elemento separatore. Nell'esempio sotto tutti i punti tra 0.5 e 3 separano A e B.

Approfondimento: l'assioma di completezza

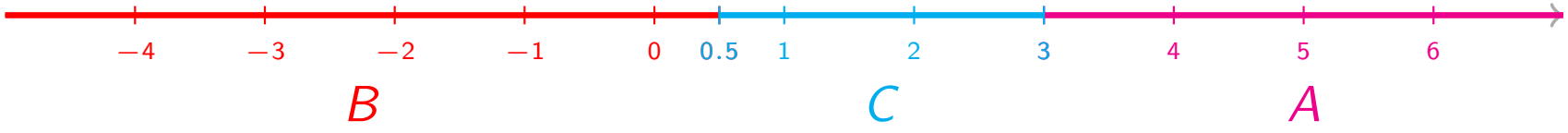
Esattamente in **R** vale l'assioma di completezza.
Per ogni coppia di sottoinsiemi non vuoti A e B di **R** tali che

$$a \leq b \quad \text{per ogni } a \in A \text{ e per ogni } b \in B$$

esiste un elemento $c \in \mathbf{R}$ tale che

$$a \leq c \leq b \quad \text{per ogni } a \in A \text{ e per ogni } b \in B.$$

c si chiama **elemento separatore** degli insiemi A e B.
In generale non esiste un unico elemento separatore. Nell'esempio sotto tutti i punti tra 0.5 e 3 separano A e B.



Se invece $A \cup B = \mathbf{R}$ c'é un solo elemento separatore. Nell'esempio vai $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$ é l'unico elemento separatore tra A e B. L'esistenza di questi elementi separatori in $\mathbf{R}$ completa i buchi lasciati da $\mathbf{Q}$ sulla retta!

Funzioni

Definizione

Siano X e Y insiemi. Diremo che f é una **funzione da X su Y** *se associa ad ogni elemento $x \in X$ uno ed un solo elemento $y = f(x) \in Y$. Scriveremo $f : X \to Y$.*

- *X viene chiamato* **dominio** *(o campo di esistenza) di f;*
- *x si dice* **variabile** *della funzione;*
- *$f(x)$ viene chiamata* **immagine** *di x (tramite f);*
- *l'insieme $f(X) := \{f(x) : \ x \in X\}$ si dice* **immagine** *di X tramite f.*

Esempi

1. Siano

$$X = \{x : x \text{ studente di Unife}\}$$

$$Y = \{y : y \text{ indirizzo e-mail}\}$$

l'applicazione che ad ogni studente associa indirizzo mail non é una funzione da X su Y perché alcuni potrebbero averne più di uno.

Esempi

1. Siano

$$X = \{x : x \text{ studente di Unife}\}$$

$$Y = \{y : y \text{ indirizzo e-mail}\}$$

l'applicazione che ad ogni studente associa indirizzo mail non é una funzione da X su Y perché alcuni potrebbero averne più di uno. Se però ci restringiamo a considerare

$$Y = \{y : \ y \text{ indirizzo mail @student.unife.it}\}$$

Esempi

1. Siano

$$X = \{x : x \text{ studente di Unife}\}$$

$$Y = \{y : y \text{ indirizzo e-mail}\}$$

l'applicazione che ad ogni studente associa indirizzo mail non é una funzione da X su Y perché alcuni potrebbero averne più di uno. Se però ci restringiamo a considerare

$$Y = \{y : \ y \text{ indirizzo mail @student.unife.it}\}$$

allora l'applicazione $f : X \to Y$

$$x \to f(x) = \textbf{indirizzo@student.unife.it dello studente x}$$

Esempi

1. Siano

$$X = \{x : x \text{ studente di Unife}\}$$

$$Y = \{y : y \text{ indirizzo e-mail}\}$$

l'applicazione che ad ogni studente associa indirizzo mail non é una funzione da X su Y perché alcuni potrebbero averne più di uno. Se però ci restringiamo a considerare

$$Y = \{y : \ y \text{ indirizzo mail @student.unife.it}\}$$

allora l'applicazione $f : X \to Y$

$$x \to f(x) = \textbf{indirizzo@student.unife.it dello studente x}$$

é una funzione da X su Y.

2. Siano

$$X := \{x : \ x \text{ studente di questo corso}\}$$

$$Y := \{y : \ y \text{ gruppo sanguigno}\} = \{A, B, AB, 0\}.$$

2. Siano

$$X := \{x : \ x \text{ studente di questo corso}\}$$

$$Y := \{y : \ y \text{ gruppo sanguigno}\} = \{A, B, AB, 0\}.$$

L'applicazione $f : X \to Y$

$$x \to f(x) := \textbf{il gruppo sanguigno di } x$$

é una funzione da X su Y;

2. Siano

$$X := \{x : \ x \text{ studente di questo corso}\}$$

$$Y := \{y : \ y \text{ gruppo sanguigno}\} = \{A, B, AB, 0\}.$$

L'applicazione $f : X \to Y$

$$x \to f(x) := \textbf{il gruppo sanguigno di } x$$

é una funzione da X su Y;

3. siano $X := \{x : \ x \text{ matricola di Unife}\}$ e $Y := \{y : \ y \text{ cittá}\}$. L'applicazione

$$x \to f(x) := \textbf{luogo di nascita di } x$$

é una funzione da X su Y;

2. Siano

$$X := \{x : \ x \text{ studente di questo corso}\}$$

$$Y := \{y : \ y \text{ gruppo sanguigno}\} = \{A, B, AB, 0\}.$$

L'applicazione $f : X \to Y$

$$x \to f(x) := \textbf{il gruppo sanguigno di } x$$

é una funzione da X su Y;

3. siano $X := \{x : \ x \text{ matricola di Unife}\}$ e $Y := \{y : \ y \text{ cittá}\}$. L'applicazione

$$x \to f(x) := \textbf{luogo di nascita di } x$$

é una funzione da X su Y;

4. sia $X = Y = \mathbf{R}$. L'applicazione

$$x \to f(x) := x^2$$

é una funzione da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$.

Funzione composta

Siano X, Y, Z tre insiemi e siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni. Allora definiamo $g \circ f : X \to Z$ la funzione definita da

$$g \circ f(x) := g(f(x)).$$

Funzione composta

Siano X, Y, Z tre insiemi e siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni. Allora definiamo $g \circ f : X \to Z$ la funzione definita da

$$g \circ f(x) := g(f(x)).$$

Esempio

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definita da*

$$f(x) = x^2$$

e $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definita da*

$$g(x) = 2x + 1.$$

Funzione composta

Siano X, Y, Z tre insiemi e siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni. Allora definiamo $g \circ f : X \to Z$ la funzione definita da

$$g \circ f(x) := g(f(x)).$$

Esempio

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definita da*

$$f(x) = x^2$$

e $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definita da*

$$g(x) = 2x + 1.$$

Allora $X = Y = Z = \mathbf{R}$ *e ha senso fare sia*

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 1$$

Funzione composta

Siano X, Y, Z tre insiemi e siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni. Allora definiamo $g \circ f : X \to Z$ la funzione definita da

$$g \circ f(x) := g(f(x)).$$

Esempio

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definita da*

$$f(x) = x^2$$

e $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definita da*

$$g(x) = 2x + 1.$$

Allora $X = Y = Z = \mathbf{R}$ *e ha senso fare sia*

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 1$$

ma anche

$$f \circ g(x) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2.$$

Funzione composta

Siano X, Y, Z tre insiemi e siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni. Allora definiamo $g \circ f : X \to Z$ la funzione definita da

$$g \circ f(x) := g(f(x)).$$

Esempio

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definita da*

$$f(x) = x^2$$

e $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definita da*

$$g(x) = 2x + 1.$$

Allora $X = Y = Z = \mathbf{R}$ *e ha senso fare sia*

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 1$$

ma anche

$$f \circ g(x) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2.$$

Si noti che $f \circ g \neq g \circ f$.

Grafico di una funzione reale di variabile reale

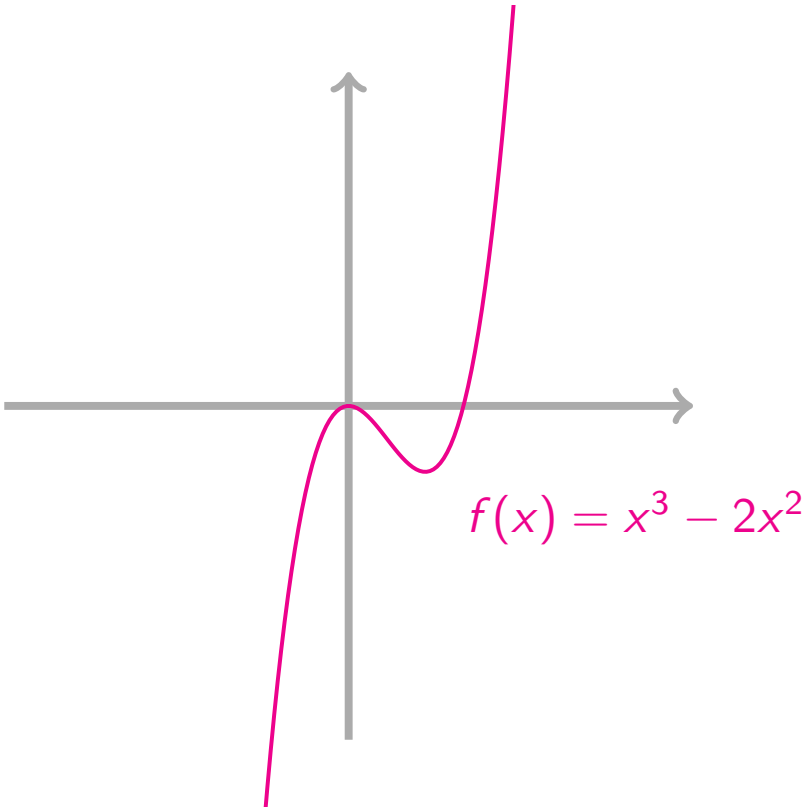
Sia $f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione. Si definisce **grafico** l'insieme

$$Gr(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : x \in A\}.$$

Grafico di una funzione reale di variabile reale

Sia $f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione. Si definisce **grafico** l'insieme

$$Gr(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} : x \in A\}.$$



Estremo inferiore, estremo superiore di una funzione

Definizione

Sia $f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *e sia* $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. *Si dice che*

Estremo inferiore, estremo superiore di una funzione

Definizione

Sia $f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *e sia* $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. *Si dice che*

- f *é* **limitata superiormente o dall'alto su** A *se l'insieme* $f(A)$ *é limitato dall'alto ossia se esiste* $b \in \mathbf{R}$ *tali che*

$$f(x) \leq b \quad \forall x \in A.$$

Estremo inferiore, estremo superiore di una funzione

Definizione

Sia $f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *e sia* $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. *Si dice che*

- f *é* **limitata superiormente o dall'alto su** A *se l'insieme* $f(A)$ *é limitato dall'alto ossia se esiste* $b \in \mathbf{R}$ *tali che*

$$f(x) \leq b \quad \forall x \in A.$$

  In caso contrario, diremo che f *é* **illimitata superiormente** *e scriveremo* $\sup_A f = +\infty$;

Estremo inferiore, estremo superiore di una funzione

Definizione

Sia $f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *e sia* $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. *Si dice che*

- f *é* **limitata superiormente o dall'alto su** A *se l'insieme* $f(A)$ *é limitato dall'alto ossia se esiste* $b \in \mathbf{R}$ *tali che*

$$f(x) \leq b \quad \forall x \in A.$$

  In caso contrario, diremo che f *é* **illimitata superiormente** *e scriveremo* $\sup_A f = +\infty$;

- f *é* **limitata inferiormente o dal basso su** A *se l'insieme* $f(A)$ *é limitato dal basso ossia se esiste* $a \in \mathbf{R}$ *tali che*

$$f(x) \geq b \quad \forall x \in A.$$

Estremo inferiore, estremo superiore di una funzione

Definizione

Sia $f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *e sia* $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. *Si dice che*

- f *é* **limitata superiormente o dall'alto su** A *se l'insieme* $f(A)$ *é limitato dall'alto ossia se esiste* $b \in \mathbf{R}$ *tali che*

$$f(x) \leq b \quad \forall x \in A.$$

  In caso contrario, diremo che f *é* **illimitata superiormente** *e scriveremo* $\sup_A f = +\infty$;

- f *é* **limitata inferiormente o dal basso su** A *se l'insieme* $f(A)$ *é limitato dal basso ossia se esiste* $a \in \mathbf{R}$ *tali che*

$$f(x) \geq b \quad \forall x \in A.$$

  In caso contrario, diremo che f *é* **illimitata inferiormente su** A *e scriveremo* $\inf_A f = -\infty$;

Definizione

Diremo che f é **limitata su** *A se l'insieme $f(A)$ é limitato dall'alto e dal basso ossia se esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che*

$$a \leq f(x) \leq b \quad \forall x \in A.$$

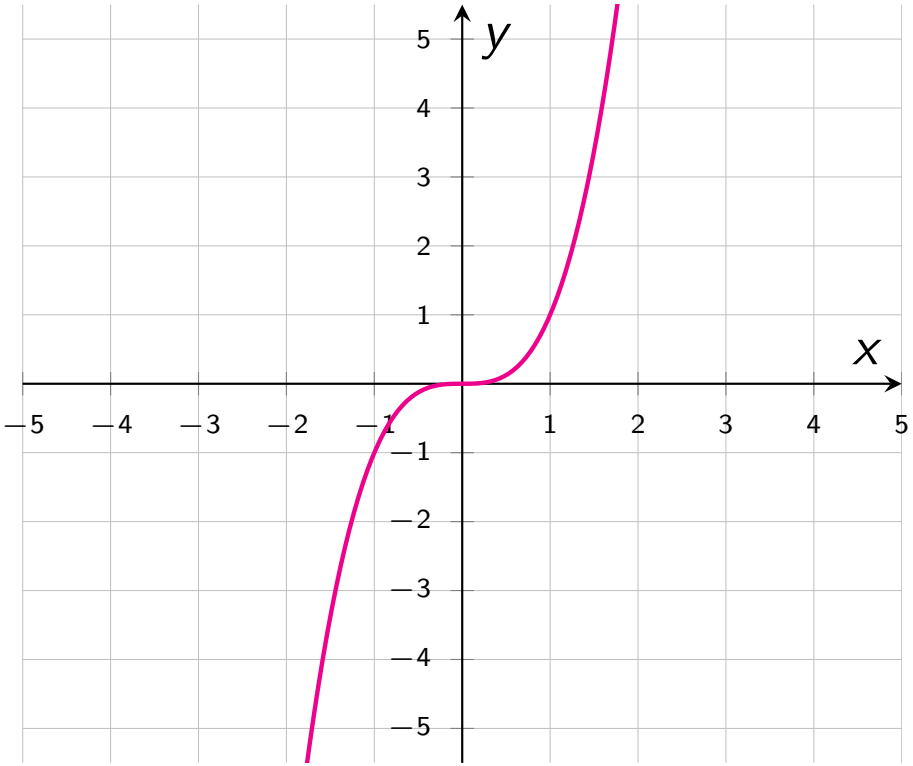
Definizione

Diremo che f é **limitata su** *A se l'insieme $f(A)$ é limitato dall'alto e dal basso ossia se esistono $a, b \in \mathbf{R}$ tali che*

$$a \leq f(x) \leq b \quad \forall x \in A.$$

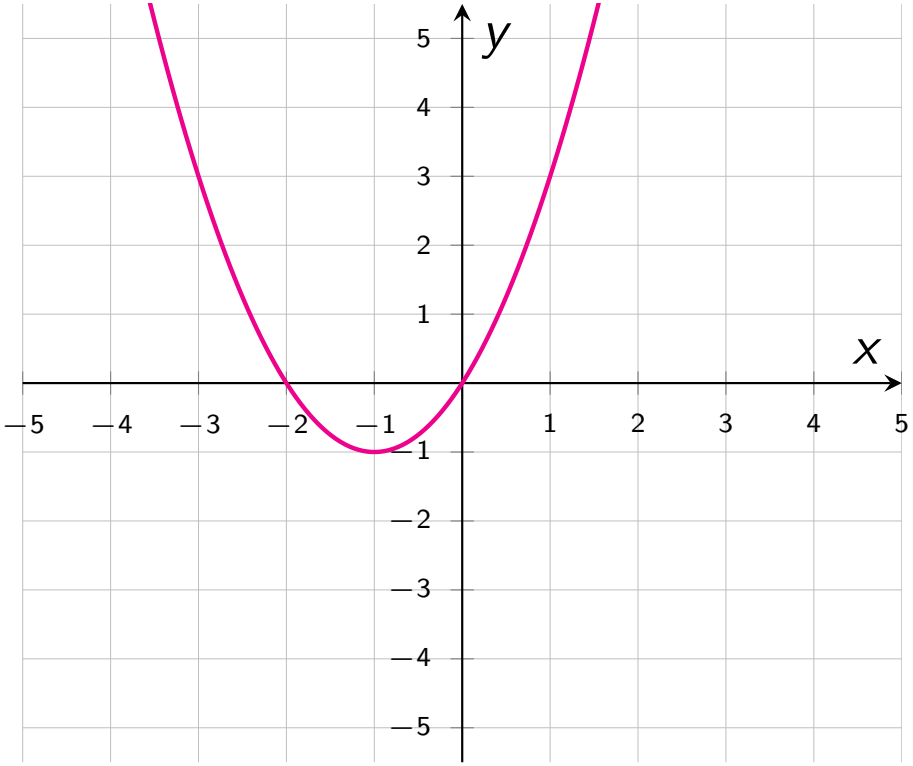
Esempi:

- di una funzione illimitata dall'alto e dal basso;



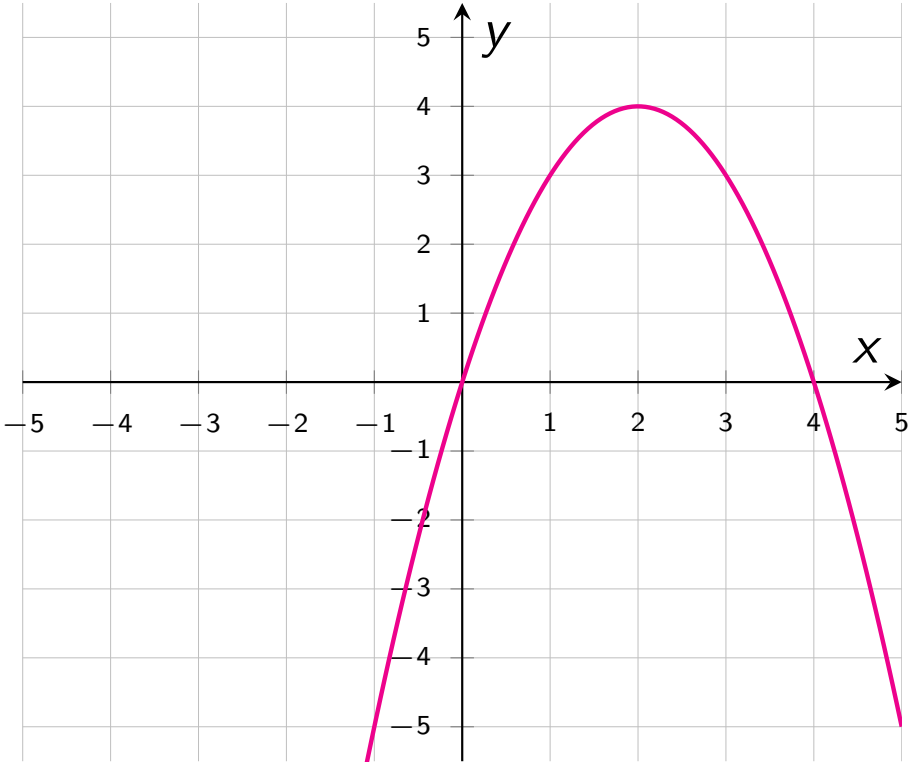
torna

- di una funzione limitata dal basso ma non dall'alto;



torna

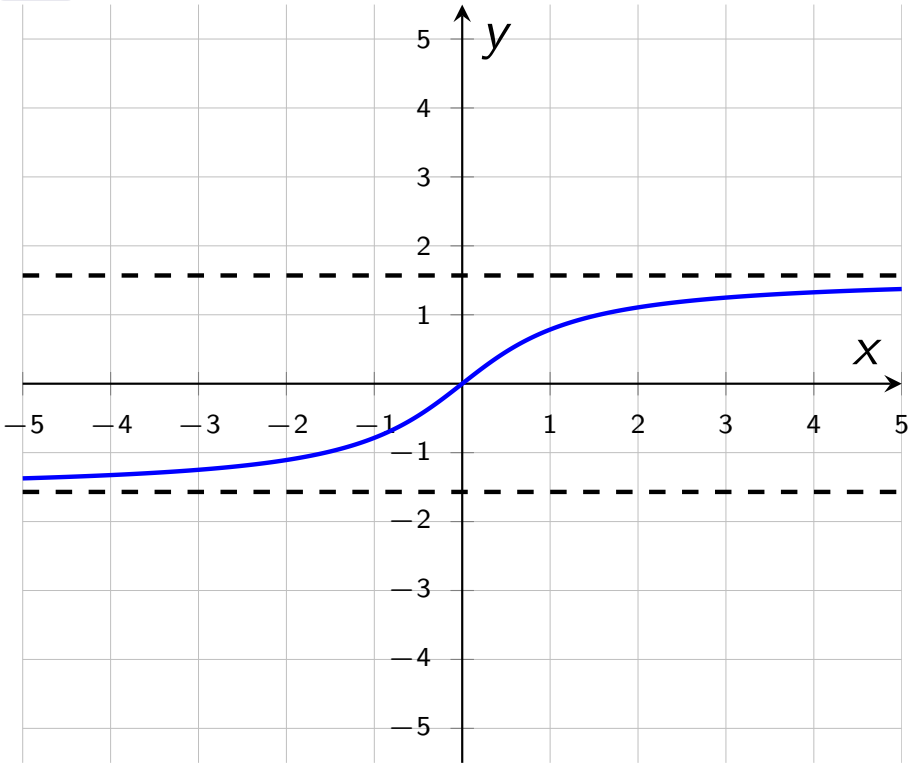
- di una funzione limitata dall'alto ma non dal basso;



torna

- di una funzione limitata dall'alto e dal basso;

torna



Massimo e minimo

Definizione

Sia $f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Massimo e minimo

Definizione

Sia $f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

- *Se esiste* $x_m \in A$ *tale che*

$$f(x) \geq f(x_m) \, \forall x \in X$$

allora x_m *si chiama* **punto di minimo assoluto** *e*

$$\min f := f(x_m);$$

Massimo e minimo

Definizione

Sia $f : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

- *Se esiste* $x_m \in A$ *tale che*

$$f(x) \geq f(x_m) \, \forall x \in X$$

allora x_m *si chiama* **punto di minimo assoluto** *e*

$$\min f := f(x_m);$$

- *se esiste* $x_M \in A$ *tale*

$$f(x) \leq f(x_M) \, \forall x \in X$$

allora x_M *si chiama* **punto di massimo assoluto** *e*

$$\max f := f(x_M).$$

- vai f é illimitata superiormente $\inf f = -\infty$ e $\sup f = +\infty$;

- vai f é illimitata superiormente $\inf f = -\infty$ e $\sup f = +\infty$;
- vai $\min f = -1$ e $\sup f = +\infty$;

- vai f é illimitata superiormente $\inf f = -\infty$ e $\sup f = +\infty$;
- vai $\min f = -1$ e $\sup f = +\infty$;
- vai $\inf f = -\infty$ e $\max f = 4$;

- vai f é illimitata superiormente $\inf f = -\infty$ e $\sup f = +\infty$;
- vai $\min f = -1$ e $\sup f = +\infty$;
- vai $\inf f = -\infty$ e $\max f = 4$;
- vai $\inf f = -\pi/2$ e $\sup f = \pi/2$;

Monotonia

Definizione

Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ una funzione. Diremo che:

Monotonia

Definizione

Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ una funzione. Diremo che:

- f é **monotona crescente** se per ogni $x, y \in (a, b)$

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y);$$

Monotonia

Definizione

Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ una funzione. Diremo che:

- f é **monotona crescente** se per ogni $x, y \in (a, b)$

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y);$$

- f é **monotona strettamente crescente** se per ogni $x, y \in (a, b)$

$$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y);$$

Monotonia

Definizione

Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ una funzione. Diremo che:

- f é **monotona crescente** se per ogni $x, y \in (a, b)$

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y);$$

- f é **monotona strettamente crescente** se per ogni $x, y \in (a, b)$

$$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y);$$

- f é **monotona decrescente** se per ogni $x, y \in (a, b)$

$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y);$$

Monotonia

Definizione

Sia $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ una funzione. Diremo che:

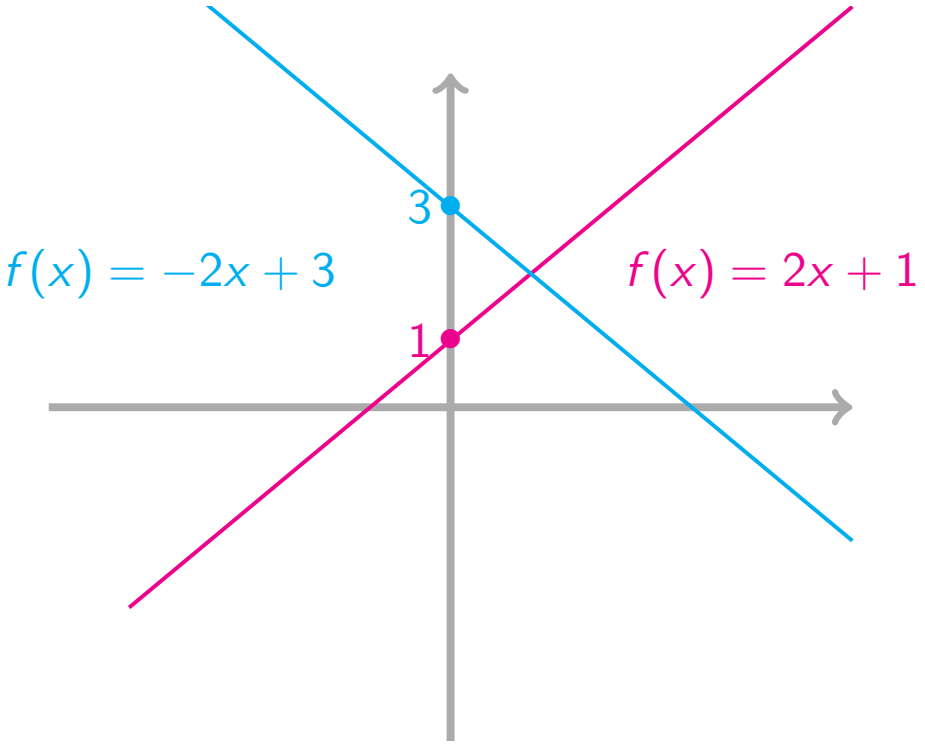
- f é **monotona crescente** se per ogni $x, y \in (a, b)$
$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y);$$
- f é **monotona strettamente crescente** se per ogni $x, y \in (a, b)$
$$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y);$$
- f é **monotona decrescente** se per ogni $x, y \in (a, b)$
$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y);$$
- f é **monotona strettamente decrescente** se per ogni $x, y \in (a, b)$
$$x < y \Longrightarrow f(x) > f(y).$$

Esempi

- **funzione lineare** del tipo $f(x) = ax + b$ con $a \in \mathbf{R}$ **fissato**: Tale funzione é definita su tutto $\mathbf{R}$. Tale funzione é illimitata dal basso e dall'alto. Inoltre
  - se $a > 0$ allora f é monotona strett. crescente su tutto $\mathbf{R}$;
  - se $a < 0$ allora f é monotona strett. decrescente su tutto $\mathbf{R}$.

Esempi

- **funzione lineare** del tipo $f(x) = ax + b$ con $a \in \mathbf{R}$ **fissato**: Tale funzione é definita su tutto $\mathbf{R}$. Tale funzione é illimitata dal basso e dall'alto. Inoltre
  - se $a > 0$ allora f é monotona strett. crescente su tutto $\mathbf{R}$;
  - se $a < 0$ allora f é monotona strett. decrescente su tutto $\mathbf{R}$.



- **funzione quadratica** del tipo

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

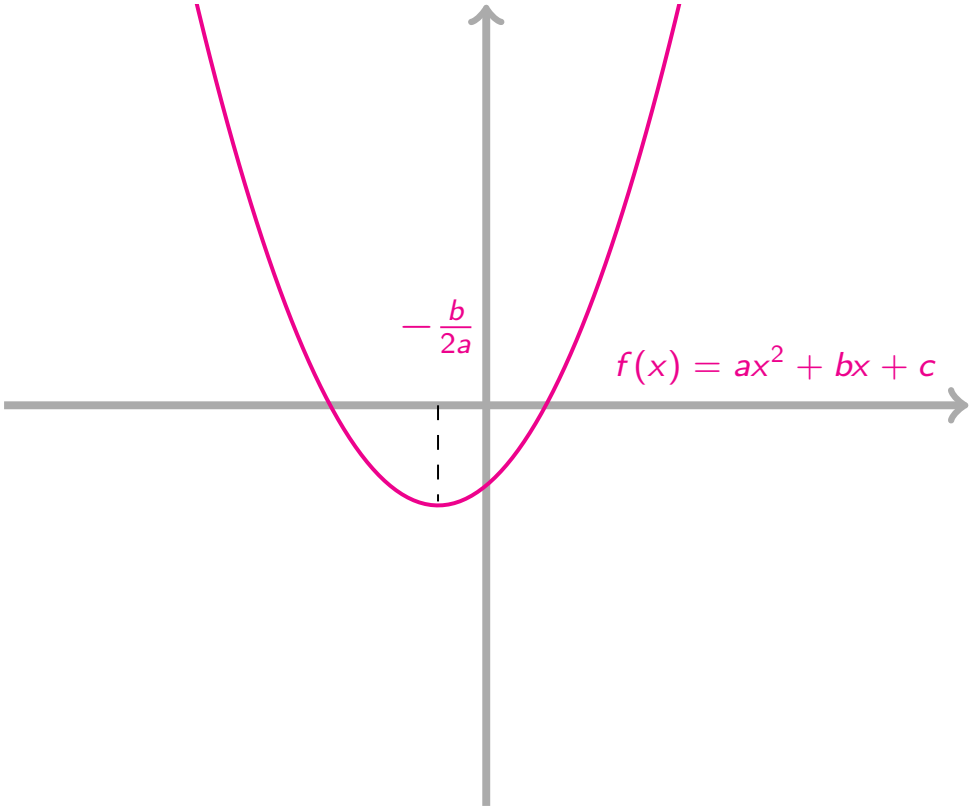
con $a, b \in$ **R fissati**. Tale funzione é definita su tutto **R**.

- **funzione quadratica** del tipo

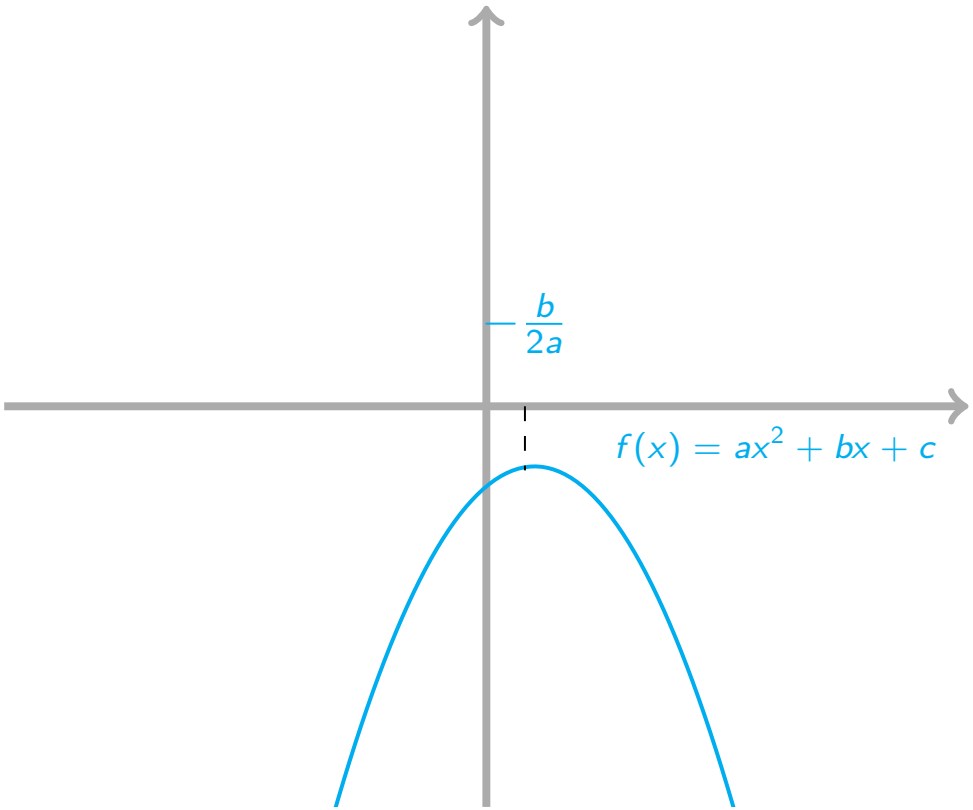
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

con $a, b \in$ **R fissati**. Tale funzione é definita su tutto **R**. Inoltre

- se $a > 0$ allora f é monotona strett. crescente su $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ e monotona strett. decrescente su $(-\infty, -\frac{b}{2a})$; ha minimo in $x_m = -\frac{b}{2a}$; é illimitata dall'alto. Il grafico é la parabola rivolta verso l'alto.



- se $a > 0$ allora f é monotona strett. decrescente su $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ e monotona strett. crescente su $(-\infty, -\frac{b}{2a})$; ha massimo in $x_M = -\frac{b}{2a}$; é illimitata dal basso. Il grafico é la parabola rivolta verso il basso.



Polinomi

I polinomi sono funzioni del tipo

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

con $a_{n-1}, \cdots, a_0 \in$ **R fissati** e $a_n \neq 0$.

Polinomi

I polinomi sono funzioni del tipo

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

con $a_{n-1}, \cdots, a_0 \in$ **R fissati** e $a_n \neq 0$. n si dice **grado** del polinomio.
Le funzioni lineari e le funzioni quadratiche sono polinomi rispettivamente di grado 1 e 2.

Polinomi

I polinomi sono funzioni del tipo

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

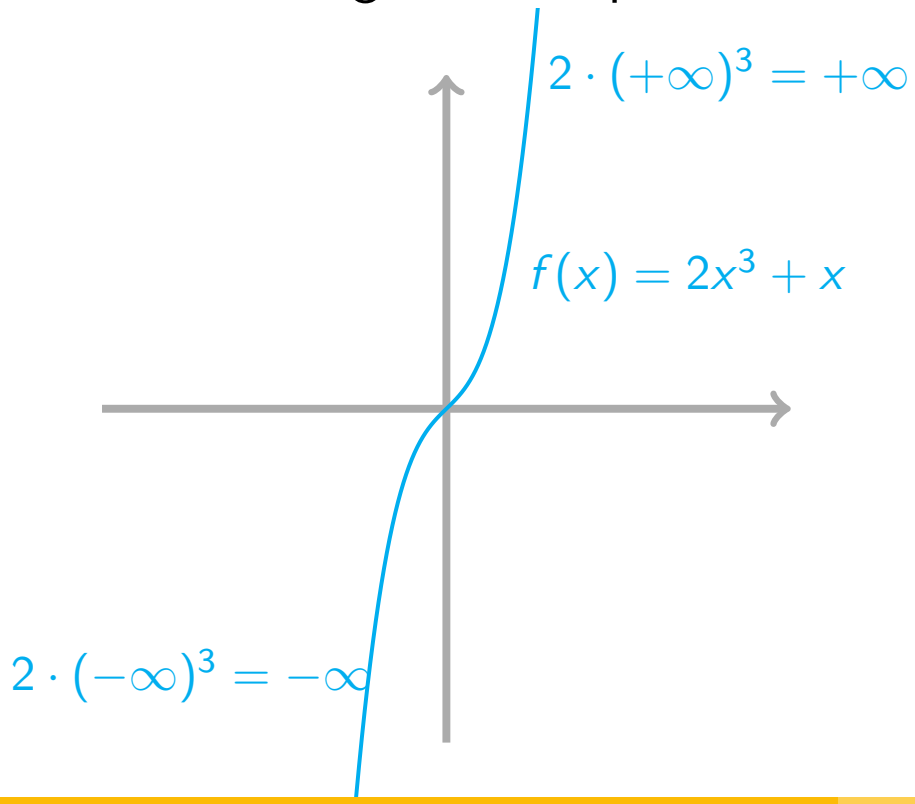
con $a_{n-1}, \cdots, a_0 \in$ **R fissati** e $a_n \neq 0$. n si dice **grado** del polinomio.
Le funzioni lineari e le funzioni quadratiche sono polinomi rispettivamente di grado 1 e 2. Tutti i polinomi sono definiti su tutto **R** e a seconda del segno del coefficiente del termine a_n potremo stabilire il "comportamento all'infinito" del grafico del polinomio:

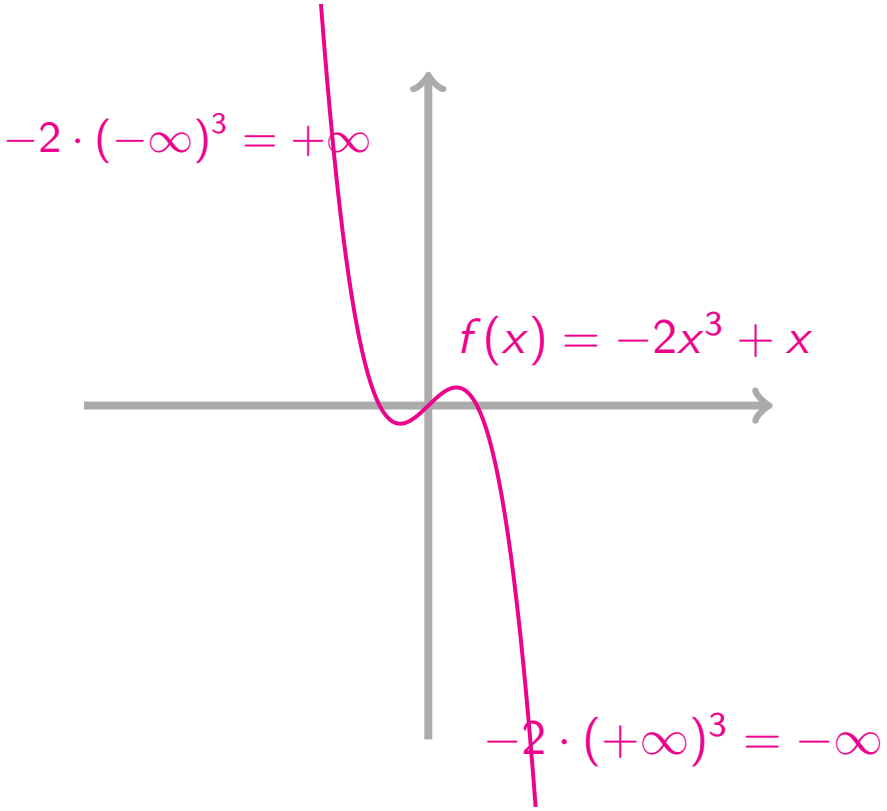
Polinomi

I polinomi sono funzioni del tipo

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

con $a_{n-1}, \cdots, a_0 \in$ **R fissati** e $a_n \neq 0$. n si dice **grado** del polinomio.
Le funzioni lineari e le funzioni quadratiche sono polinomi rispettivamente di grado 1 e 2. Tutti i polinomi sono definiti su tutto **R** e a seconda del segno del coefficiente del termine a_n potremo stabilire il "comportamento all'infinito" del grafico del polinomio:




$-2 \cdot (-\infty)^3 = +\infty$
$f(x) = -2x^3 + x$
$-2 \cdot (+\infty)^3 = -\infty$

Funzioni razionali

Sono polinomi o funzioni espresse come rapporto di polinomi.
Le piú semplici sono le funzioni del tipo

$$f(x) = x^{-n}(= \frac{1}{x^n})$$

con $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$. Esse sono definite per $x \neq 0$. La più generica funzione razionale sarà del tipo

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

dove P e Q sono polinomi. Il dominio di f é l'insieme

$$X := \{x \in \mathbf{R} : \ Q(x) \neq 0\}.$$

Domini di funzioni razionali

Ricordiamo che se Q é un polinomio e $x_0 \in \mathbf{R}$ tale che $Q(x_0) = 0$ diremo x_0 **radice** o **zero** del polinomio Q.

Domini di funzioni razionali

Ricordiamo che se Q é un polinomio e $x_0 \in \mathbf{R}$ tale che $Q(x_0) = 0$ diremo x_0 **radice** o **zero** del polinomio Q. Il teorema fondamentale dell'algebra stabilisce che n **é il numero massimo di radici distinte che ammette un polinomio di grado** n.

Domini di funzioni razionali

Ricordiamo che se Q é un polinomio e $x_0 \in \mathbf{R}$ tale che $Q(x_0) = 0$ diremo x_0 **radice** o **zero** del polinomio Q. Il teorema fondamentale dell'algebra stabilisce che **n é il numero massimo di radici distinte che ammette un polinomio di grado n**.

Discutiamo i seguenti domini:

1. $\frac{1}{2x-1}$
2. $\frac{1}{2-x}$
3. $\frac{1}{x^2-5x+6}$
4. $\frac{1}{x^2-6x+9}$
5. $\frac{1}{x^2+6x+10}$
6. $\frac{1}{4x^2-9}$
7. $\frac{1}{4x^2+9}$
8. $\frac{1}{x^2-2x}$
9. $\frac{1}{x^2+2x}$

Equazioni algebriche

- **Equazioni di primo grado** Sono della forma

$$ax + b = 0 \tag{3}$$

con $a \neq 0$.
Ammettono un'unica soluzione data da

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Equazioni algebriche

- **Equazioni di primo grado** Sono della forma

$$ax + b = 0 \tag{3}$$

con $a \neq 0$.
Ammettono un'unica soluzione data da

$$x = -\frac{b}{a}.$$

- **Equazioni di secondo grado** Sono della forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{4}$$

Nella risoluzione di (4) occorre distinguere 3 casi:

Equazioni algebriche

- **Equazioni di primo grado** Sono della forma

$$ax + b = 0 \tag{3}$$

con $a \neq 0$.
Ammettono un'unica soluzione data da

$$x = -\frac{b}{a}.$$

- **Equazioni di secondo grado** Sono della forma

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{4}$$

Nella risoluzione di (4) occorre distinguere 3 casi:

1. I caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$.
   In questo caso l'equazione (4) ammette 2 radici reali e distinte $x_1 < x_2$ date da

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

   e il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ si decompone come

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

2. Il caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac = 0}$. In questo caso l'equazione (4)ammette 2 radici reali e coincidenti x_1, x_2 date da

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$$

e il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ si decompone come

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

2. II caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac = 0}$. In questo caso l'equazione (4)ammette 2 radici reali e coincidenti x_1, x_2 date da

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$$

e il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ si decompone come

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

3. III caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac < 0}$.
In questo caso l'equazione (4) non ammette soluzioni reali ossia é impossibile. Il trinomio $ax^2 + bx + c$ non puó essere fattorizzato. Puó essere peró scritto come somma di 2 quadrati: infatti

$$ax^2 + bx + c = (\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

dove $\frac{4ac-b^2}{4a} > 0$.

Esempio

Consideriamo le equazioni del tipo $x^2 = k$.

1. quelle con $k > 0$ cadono nella classe con $b = 0$ e $\Delta = 4k > 0$.

Esempio

Consideriamo le equazioni del tipo $x^2 = k$.

1. quelle con $k > 0$ cadono nella classe con $b = 0$ e $\Delta = 4k > 0$. Quindi ammettono le 2 soluzioni $x = \pm\sqrt{k}$. Inoltre il binomio $x^2 - k$ puó essere fattorizzato come

$$(x - \sqrt{k})(x + \sqrt{k}).$$

Esempio

Consideriamo le equazioni del tipo $x^2 = k$.

1. quelle con $k > 0$ cadono nella classe con $b = 0$ e $\Delta = 4k > 0$. Quindi ammettono le 2 soluzioni $x = \pm\sqrt{k}$. Inoltre il binomio $x^2 - k$ puó essere fattorizzato come

$$(x - \sqrt{k})(x + \sqrt{k}).$$

   Per esempio l'equazione $x^2 - 4 = 0$ si puó scrivere come $x^2 = 4$ e si trova che ammette le 2 soluzioni $x = \pm 2$. Inoltre il binomio $x^2 - 4$ puó essere fattorizzato come

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

Esempio

Consideriamo le equazioni del tipo $x^2 = k$.

1. quelle con $k > 0$ cadono nella classe con $b = 0$ e $\Delta = 4k > 0$. Quindi ammettono le 2 soluzioni $x = \pm\sqrt{k}$. Inoltre il binomio $x^2 - k$ puó essere fattorizzato come

$$(x - \sqrt{k})(x + \sqrt{k}).$$

   Per esempio l'equazione $x^2 - 4 = 0$ si puó scrivere come $x^2 = 4$ e si trova che ammette le 2 soluzioni $x = \pm 2$. Inoltre il binomio $x^2 - 4$ puó essere fattorizzato come

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

2. quelle con $k < 0$ cadono nella classe delle equazioni con $\Delta < 0$.

Esempio

Consideriamo le equazioni del tipo $x^2 = k$.

1. quelle con $k > 0$ cadono nella classe con $b = 0$ e $\Delta = 4k > 0$. Quindi ammettono le 2 soluzioni $x = \pm\sqrt{k}$. Inoltre il binomio $x^2 - k$ puó essere fattorizzato come

$$(x - \sqrt{k})(x + \sqrt{k}).$$

   Per esempio l'equazione $x^2 - 4 = 0$ si puó scrivere come $x^2 = 4$ e si trova che ammette le 2 soluzioni $x = \pm 2$. Inoltre il binomio $x^2 - 4$ puó essere fattorizzato come

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

2. quelle con $k < 0$ cadono nella classe delle equazioni con $\Delta < 0$. Quindi non ammettono soluzioni (reali) e il binomio

$$x^2 + (-k)$$

   non puó essere fattorizzato. Per esempio l'equazione $x^2 + 4 = 0$ si puó riscrivere come $x^2 = -4$ ed é impossibile. Il binomio $x^2 + 4$ non puó essere fattorizzato.

Limiti a $+\infty$.

Definizione

Sia $f : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$ *(ossia* f *definita su una semiretta a destra). Diremo che*

Limiti a $+\infty$.

Definizione

Sia $f : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$ *(ossia* f *definita su una semiretta a destra). Diremo che*

1. *per* x *che tende a* $+\infty$ *il limite della funzione* f *é* $+\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Limiti a $+\infty$.

Definizione

Sia $f : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$ *(ossia* f *definita su una semiretta a destra). Diremo che*

1. *per* x *che tende a* $+\infty$ *il limite della funzione* f *é* $+\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

se **per ogni** $M > 0$ **esiste** $N > 0$ **tale che per ogni** $x > N$ **vale che** $f(x) > M$;

Limiti a $+\infty$.

Definizione

Sia $f : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$ *(ossia* f *definita su una semiretta a destra). Diremo che*

1. *per* x *che tende a* $+\infty$ *il limite della funzione* f *é* $+\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

   se **per ogni** $M > 0$ **esiste** $N > 0$ **tale che per ogni** $x > N$ **vale che** $f(x) > M$;

2. *per* x *che tende a* $+\infty$ *il limite della funzione* f *é* $-\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

Limiti a $+\infty$.

Definizione

Sia $f : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$ *(ossia* f *definita su una semiretta a destra). Diremo che*

1. *per* x *che tende a* $+\infty$ *il limite della funzione* f *é* $+\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

   se **per ogni** $M > 0$ **esiste** $N > 0$ **tale che per ogni** $x > N$ **vale che** $f(x) > M$;

2. *per* x *che tende a* $+\infty$ *il limite della funzione* f *é* $-\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

   se **per ogni** $M > 0$ **esiste** $N > 0$ **tale che per ogni** $x > N$ **vale che** $f(x) < -M$;

Esempio

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

Esempio

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

mentre

$$\lim_{x \to +\infty} (-x)^n = \begin{cases} +\infty & \textit{se } n \textit{ é pari,} \\ -\infty & \textit{se } n \textit{ é dispari.} \end{cases}$$

Limiti a $-\infty$.

Definizione

Sia $f : (-\infty, b) \to \mathbf{R}$ *(ossia* f *definita su una semiretta a sinistra). Diremo che*

Limiti a $-\infty$.

Definizione

Sia $f : (-\infty, b) \to \mathbf{R}$ *(ossia* f *definita su una semiretta a sinistra). Diremo che*

1. *per* x *che tende a* $-\infty$ *il limite della funzione* f *é* $+\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

se **per ogni** $M > 0$ **esiste** $N > 0$ **tale che per ogni** $x < -N$ **vale che** $f(x) > M$;

Limiti a $-\infty$.

Definizione

Sia $f : (-\infty, b) \to \mathbf{R}$ (ossia f definita su una semiretta a sinistra). Diremo che

1. *per x che tende a $-\infty$ il limite della funzione f é $+\infty$ e scriveremo*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

   se **per ogni** $M > 0$ **esiste** $N > 0$ **tale che per ogni** $x < -N$ **vale che** $f(x) > M$;

2. *per x che tende a $-\infty$ il limite della funzione f é $-\infty$ e scriveremo*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

   se **per ogni** $M > 0$ **esiste** $N > 0$ **tale che per ogni** $x < -N$ **vale che** $f(x) < -M$.

Esempio

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \textit{se } n \textit{ é pari}, \\ -\infty & \textit{se } n \textit{ é dispari}. \end{cases}$$

Algebra degli ∞

Algebra degli ∞

1. $(+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty,$

Algebra degli ∞

1. $(+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty,$
2. $(-\infty)\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty,$

Algebra degli ∞

1. $(+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$,
2. $(-\infty)\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$,
3. $(\pm\infty)^k = (\pm 1)^k \cdot \infty \ \forall k \in \mathbf{N}$;

Algebra degli ∞

1. $(+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$,
2. $(-\infty)\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$,
3. $(\pm\infty)^k = (\pm 1)^k \cdot \infty \ \forall k \in \mathbf{N}$;
4. 1^∞ FORMA INDETERMINATA;

Algebra degli ∞

1. $(+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$,
2. $(-\infty)\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$,
3. $(\pm\infty)^k = (\pm 1)^k \cdot \infty \ \forall k \in \mathbf{N}$;
4. 1^∞ FORMA INDETERMINATA;
5. $k\cdot(\pm\infty) = (\pm \cdot segnok)\cdot\infty \ \forall k \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$,

Algebra degli ∞

1. $(+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$,
2. $(-\infty)\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$,
3. $(\pm\infty)^k = (\pm 1)^k \cdot \infty \ \forall k \in \mathbf{N}$;
4. 1^∞ FORMA INDETERMINATA;
5. $k\cdot(\pm\infty) = (\pm \cdot segnok)\cdot\infty \ \forall k \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$,
6. $0\cdot(\pm\infty)$ FORMA INDETERMINATA;

Algebra degli ∞

1. $(+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$,
2. $(-\infty)\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$,
3. $(\pm\infty)^k = (\pm 1)^k \cdot \infty \ \forall k \in \mathbf{N}$;
4. 1^∞ FORMA INDETERMINATA;
5. $k\cdot(\pm\infty) = (\pm \cdot segnok)\cdot\infty \ \forall k \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$,
6. $0\cdot(\pm\infty)$ FORMA INDETERMINATA;
7. $k + (\pm\infty) = \pm\infty \ \forall k \in \mathbf{R}$;

Algebra degli ∞

1. $(+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$,
2. $(-\infty)\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$,
3. $(\pm\infty)^k = (\pm 1)^k \cdot \infty \ \forall k \in \mathbf{N}$;
4. 1^∞ FORMA INDETERMINATA;
5. $k\cdot(\pm\infty) = (\pm \cdot segnok)\cdot\infty \ \forall k \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$,
6. $0\cdot(\pm\infty)$ FORMA INDETERMINATA;
7. $k + (\pm\infty) = \pm\infty \ \forall k \in \mathbf{R}$;
8. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$,

Algebra degli ∞

1. $(+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$,
2. $(-\infty)\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$,
3. $(\pm\infty)^k = (\pm 1)^k \cdot \infty \ \forall k \in \mathbf{N}$;
4. 1^∞ FORMA INDETERMINATA;
5. $k\cdot(\pm\infty) = (\pm \cdot segnok)\cdot\infty \ \forall k \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$,
6. $0\cdot(\pm\infty)$ FORMA INDETERMINATA;
7. $k + (\pm\infty) = \pm\infty \ \forall k \in \mathbf{R}$;
8. $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$,
9. $(-\infty)+(-\infty) = -\infty$.

Algebra degli ∞

1. $(+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$,
2. $(-\infty)\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$,
3. $(\pm\infty)^k = (\pm 1)^k \cdot \infty \ \forall k \in \mathbf{N}$;
4. 1^∞ FORMA INDETERMINATA;
5. $k\cdot(\pm\infty) = (\pm \cdot segnok)\cdot\infty \ \forall k \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$,
6. $0\cdot(\pm\infty)$ FORMA INDETERMINATA;
7. $k + (\pm\infty) = \pm\infty \ \forall k \in \mathbf{R}$;
8. $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$,
9. $(-\infty)+(-\infty) = -\infty$.
10. $(+\infty)+(-\infty)$ FORMA INDETERMINATA;

Algebra degli ∞

1. $(+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$,
2. $(-\infty)\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$,
3. $(\pm\infty)^k = (\pm 1)^k \cdot \infty \ \forall k \in \mathbf{N}$;
4. 1^∞ FORMA INDETERMINATA;
5. $k\cdot(\pm\infty) = (\pm \cdot segnok)\cdot\infty \ \forall k \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$,
6. $0\cdot(\pm\infty)$ FORMA INDETERMINATA;
7. $k + (\pm\infty) = \pm\infty \ \forall k \in \mathbf{R}$;
8. $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$,
9. $(-\infty)+(-\infty) = -\infty$.
10. $(+\infty)+(-\infty)$ FORMA INDETERMINATA;
11. $\frac{\infty}{\infty}$ FORMA INDETERMINATA.

Teorema

Supponiamo che per $x \to +\infty$ (o per $x \to -\infty$) due funzioni f e g abbiano limite rispettivamente ℓ_1 e ℓ_2;

Teorema

Supponiamo che per $x \to +\infty$ (o per $x \to -\infty$) due funzioni f e g abbiano limite rispettivamente ℓ_1 e ℓ_2;

1. *se la somma di tali limiti non é F.I., allora per $x \to \infty$ (o per $x \to -\infty$) il limite della somma $f + g$ é la somma $\ell_1 + \ell_2$;*

Teorema

Supponiamo che per $x \to +\infty$ (o per $x \to -\infty$) due funzioni f e g abbiano limite rispettivamente ℓ_1 e ℓ_2;

1. *se la somma di tali limiti non é F.I., allora per $x \to \infty$ (o per $x \to -\infty$) il limite della somma $f + g$ é la somma $\ell_1 + \ell_2$;*
2. *se il prodotto di tali limiti non é F.I., allora per $x \to \infty$ (o per $x \to -\infty$) il limite del prodotto $f \cdot g$ é il prodotto $\ell_1 \cdot \ell_2$;*

Teorema

Supponiamo che per $x \to +\infty$ (o per $x \to -\infty$) due funzioni f e g abbiano limite rispettivamente ℓ_1 e ℓ_2;

1. *se la somma di tali limiti non é F.I., allora per $x \to \infty$ (o per $x \to -\infty$) il limite della somma $f + g$ é la somma $\ell_1 + \ell_2$;*
2. *se il prodotto di tali limiti non é F.I., allora per $x \to \infty$ (o per $x \to -\infty$) il limite del prodotto $f \cdot g$ é il prodotto $\ell_1 \cdot \ell_2$;*
3. *se il quoziente di tali limiti non é F.I. e $\ell_2 \neq 0$, allora per $x \to \infty$ (o per $x \to -\infty$) il limite del quoziente $\frac{f}{g}$ é il quoziente $\frac{\ell_1}{\ell_2}$.*

Osservazione

Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ *allora diremo che*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = segno(a_n)\cdot(\infty)$$

Osservazione

Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ *allora diremo che*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = segno(a_n)\cdot(\infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = segno(a_n)\cdot(-\infty)^n.$$

Osservazione

Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ *allora diremo che*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Esempio

$$\lim_{x\to+\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = segno(a_n)\cdot(\infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = segno(a_n)\cdot(-\infty)^n.$$

Infatti

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = x^n(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots \frac{a_0}{x^n}).$$

In particolare data una funzione del tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dove P e Q sono polinomi, definito x_m il piú piccolo zero del polinomio P e x_M il piú grande zero di P vale che

$$(-\infty, x_m) \subseteq domf$$

e

$$(x_M, +\infty) \subseteq domf.$$

Quindi é possibile calcolare il limite di f per $x \to +\infty$ e il limite per $x \to -\infty$.

Il calcolo dei limiti per $x \to \pm\infty$ si presenta nella forma (indeterminata) $\frac{\infty}{\infty}$. Il rapporto di polinomi si semplifica considerando a numeratore e a denominatore solo i termini di grado massimo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_n} & \text{se } n = m \\ segno(\frac{a_n}{b_m}) \cdot \infty & \text{se } n > m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_n} & \text{se } n = m \\ segno(\frac{a_n}{b_m}) \cdot (-\infty)^{n-m} & \text{se } n > m \\ 0 & \text{se } n < m \end{cases}$$

Disequazioni e segno di una funzione.

Lo studio del segno di una funzione conduce alla risoluzione di una disequazione: stabilire se una funzione f é positiva significa studiare quando

$$f(x) \geq 0.$$

Disequazioni e segno di una funzione.

Lo studio del segno di una funzione conduce alla risoluzione di una disequazione: stabilire se una funzione f é positiva significa studiare quando

$$f(x) \geq 0.$$

Nello studio di una disequazione sono lecite tutte quelle le operazioni che lasciano invariato l'insieme delle soluzioni.

Disequazioni e segno di una funzione.

Lo studio del segno di una funzione conduce alla risoluzione di una disequazione: stabilire se una funzione f é positiva significa studiare quando

$$f(x) \geq 0.$$

Nello studio di una disequazione sono lecite tutte quelle le operazioni che lasciano invariato l'insieme delle soluzioni. Due disequazioni si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Disequazioni e segno di una funzione.

Lo studio del segno di una funzione conduce alla risoluzione di una disequazione: stabilire se una funzione f é positiva significa studiare quando

$$f(x) \geq 0.$$

Nello studio di una disequazione sono lecite tutte quelle le operazioni che lasciano invariato l'insieme delle soluzioni. Due disequazioni si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme di soluzioni.
Nella risoluzione delle disequazioni si applicano i seguenti principi:

Disequazioni e segno di una funzione.

Lo studio del segno di una funzione conduce alla risoluzione di una disequazione: stabilire se una funzione f é positiva significa studiare quando

$$f(x) \geq 0.$$

Nello studio di una disequazione sono lecite tutte quelle le operazioni che lasciano invariato l'insieme delle soluzioni. Due disequazioni si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme di soluzioni.
Nella risoluzione delle disequazioni si applicano i seguenti principi:

1. **Addizionando o sottraendo** ad entrambi i membri di una disequazione uno stesso numero reale si ottiene una disequazione equivalente a quella data;

Disequazioni e segno di una funzione.

Lo studio del segno di una funzione conduce alla risoluzione di una disequazione: stabilire se una funzione f é positiva significa studiare quando

$$f(x) \geq 0.$$

Nello studio di una disequazione sono lecite tutte quelle le operazioni che lasciano invariato l'insieme delle soluzioni. Due disequazioni si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme di soluzioni.
Nella risoluzione delle disequazioni si applicano i seguenti principi:

1. **Addizionando o sottraendo** ad entrambi i membri di una disequazione uno stesso numero reale si ottiene una disequazione equivalente a quella data;
2. **Moltiplicando o dividendo** entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero reale **strettamente positivo** si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

Disequazioni e segno di una funzione.

Lo studio del segno di una funzione conduce alla risoluzione di una disequazione: stabilire se una funzione f é positiva significa studiare quando

$$f(x) \geq 0.$$

Nello studio di una disequazione sono lecite tutte quelle le operazioni che lasciano invariato l'insieme delle soluzioni. Due disequazioni si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme di soluzioni.
Nella risoluzione delle disequazioni si applicano i seguenti principi:

1. **Addizionando o sottraendo** ad entrambi i membri di una disequazione uno stesso numero reale si ottiene una disequazione equivalente a quella data;
2. **Moltiplicando o dividendo** entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero reale **strettamente positivo** si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

Se invece si moltiplicano o si dividono entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero reale **strettamente negativo**, al fine di ottenere una disequazione equivalente a quella data, é necessario **cambiare il verso** della disequazione.

Nota bene.

Siano $a, b > 0$. Allora

Nota bene.

Siano $a, b > 0$. Allora

$$a < b \Longleftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

Nota bene.

Siano $a, b > 0$. Allora

$$a < b \iff \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$a > b \iff \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

Nota bene.

Siano $a, b > 0$. Allora

$$a < b \Longleftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$a > b \Longleftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

Invece

$$a < 0 < b \Longrightarrow \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$$

Nota bene.

Siano $a, b > 0$. Allora

$$a < b \Longleftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$a > b \Longleftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

Invece

$$a < 0 < b \Longrightarrow \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$$

$$a > 0 > b \Longrightarrow \frac{1}{a} > 0 > \frac{1}{b}$$

Disequazioni di primo grado

Sono della forma

$$ax + b \geq 0 \quad (\text{ o } \quad ax + b \leq 0) \tag{5}$$

con $a \neq 0$.
Se $a > 0$ allora la (5) é equivalente a

$$x \geq -\frac{b}{a} \quad (\text{ o } \quad x \leq -\frac{b}{a}).$$

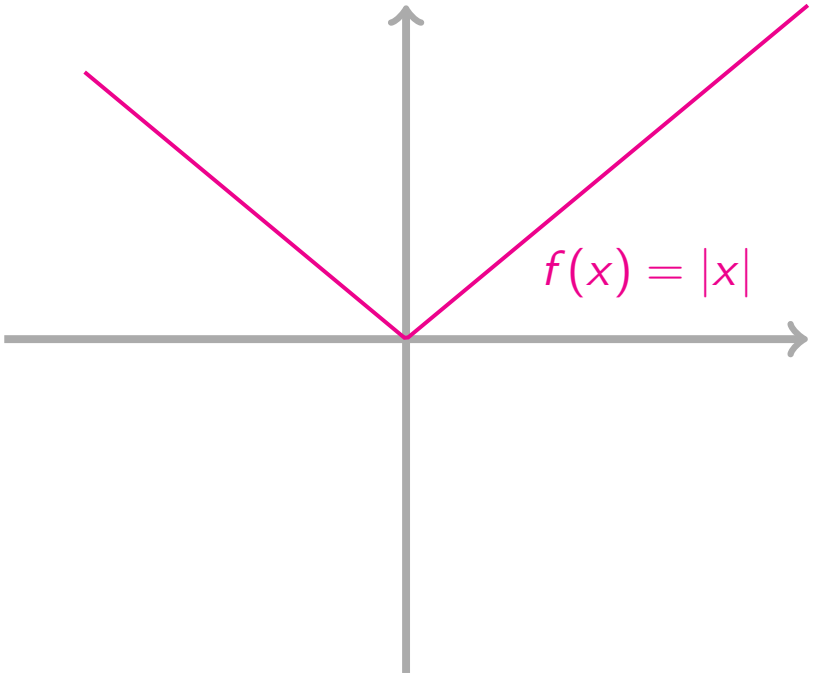
Se $a < 0$ allora la (5) é equivalente a

$$x \leq -\frac{b}{a} \quad (\text{ o } \quad x \geq -\frac{b}{a}).$$

Funzione valore assoluto

Per ogni $x \in \mathbf{R}$ definiamo

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

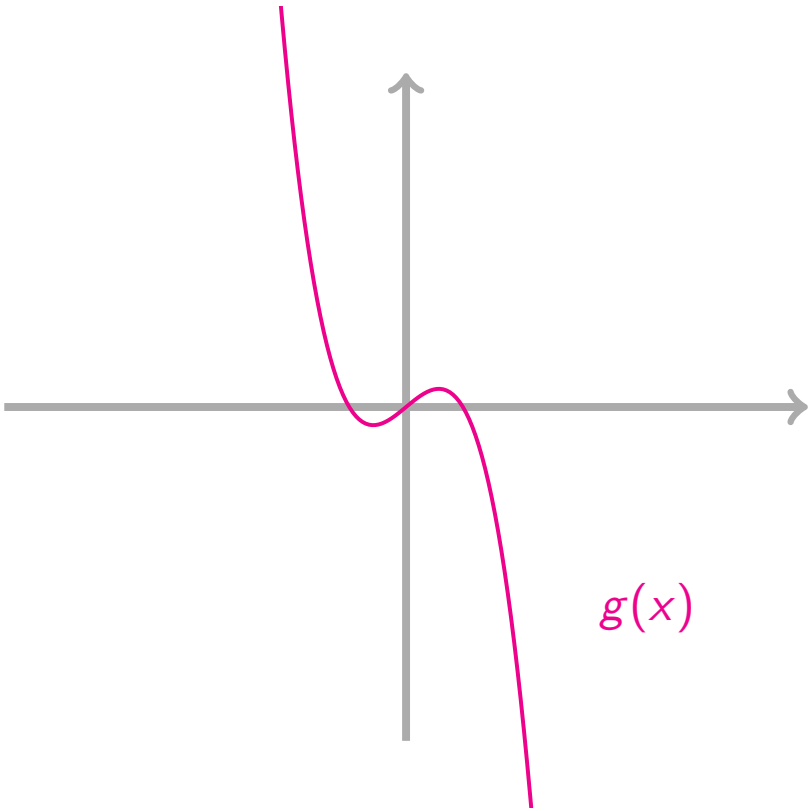


In particolare se $g : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ allora la funzione $|g| : A \to [0, +\infty)$ é la composizione $f \circ g$ con $f(x) = |x|$.

$$|g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{se } g(x) \geq 0, \\ -g(x) & \text{se } g(x) \leq 0. \end{cases}$$

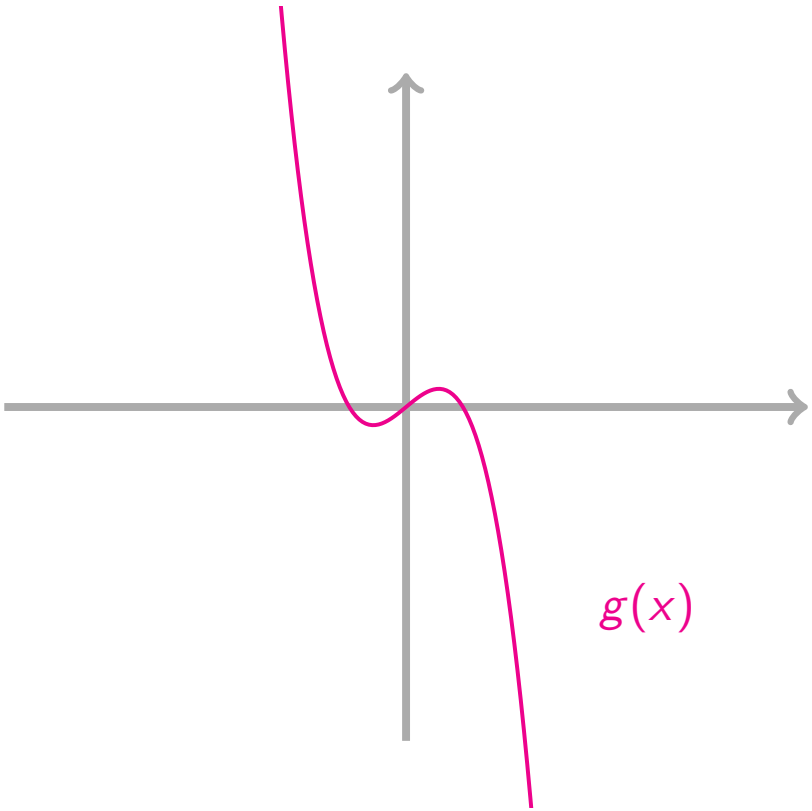
In particolare se $g : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ allora la funzione $|g| : A \to [0, +\infty)$ é la composizione $f \circ g$ con $f(x) = |x|$.

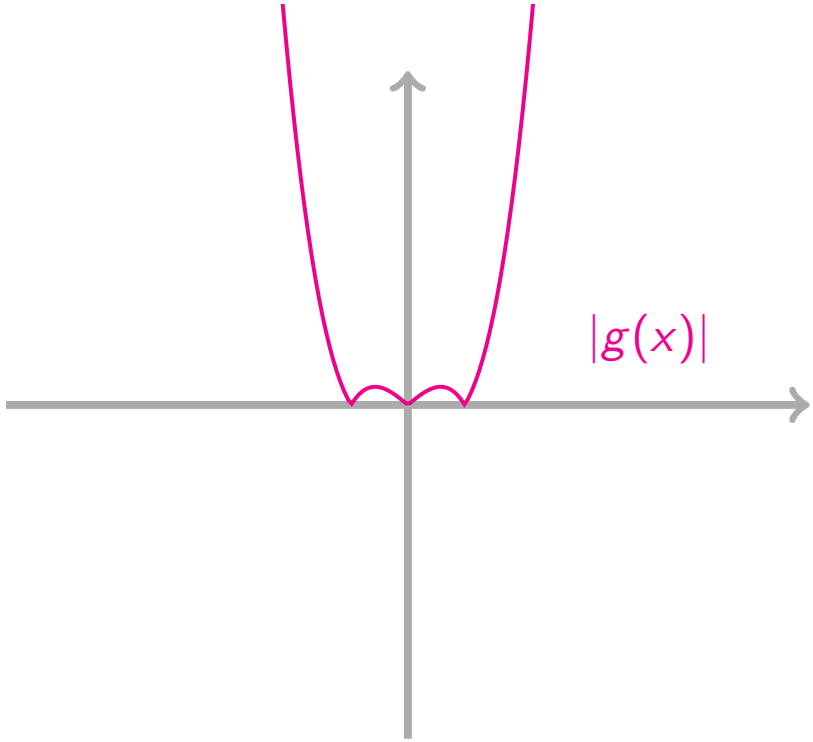
$$|g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{se } g(x) \geq 0, \\ -g(x) & \text{se } g(x) \leq 0. \end{cases}$$



In particolare se $g : A \subseteq \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ allora la funzione $|g| : A \to [0, +\infty)$ é la composizione $f \circ g$ con $f(x) = |x|$.

$$|g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{se } g(x) \geq 0, \\ -g(x) & \text{se } g(x) \leq 0. \end{cases}$$





La funzione valore assoluto soddisfa le seguenti proprietá:

La funzione valore assoluto soddisfa le seguenti proprietá:

1. $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$;

La funzione valore assoluto soddisfa le seguenti proprietá:

1. $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$;
2. $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

La funzione valore assoluto soddisfa le seguenti proprietá:

1. $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$;
2. $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
3. $|xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$. In particolare $|x|^2 = x^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

La funzione valore assoluto soddisfa le seguenti proprietá:

1. $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$;
2. $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
3. $|xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$. In particolare $|x|^2 = x^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

Inoltre

$$|x| = a \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \pm a & \text{se } a > 0, \\ x = 0 & \text{se } a = 0 \\ \text{impossibile} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

La funzione valore assoluto soddisfa le seguenti proprietá:

1. $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$;
2. $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
3. $|xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$. In particolare $|x|^2 = x^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

Inoltre

$$|x| = a \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \pm a & \text{se } a > 0, \\ x = 0 & \text{se } a = 0 \\ \text{impossibile} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

$$|x| \leq a \Longleftrightarrow \begin{cases} -a \leq x \leq a \text{ (ossia sull'}\textbf{intervallo interno)} & \text{se } a \geq 0, \\ \text{mai} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

La funzione valore assoluto soddisfa le seguenti proprietá:

1. $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$;
2. $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;
3. $|xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbf{R}$. In particolare $|x|^2 = x^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

Inoltre

$$|x| = a \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \pm a & \text{se } a > 0, \\ x = 0 & \text{se } a = 0 \\ \text{impossibile} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

$$|x| \leq a \Longleftrightarrow \begin{cases} -a \leq x \leq a \text{ (ossia sull'}\textbf{intervallo interno)} & \text{se } a \geq 0, \\ \text{mai} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

$$|x| \geq a \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq a \ \vee \ x \leq -a \text{ (ossia sugli } \textbf{intervalli esterni)} & \text{se } a \geq 0, \\ \text{sempre} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Esempi

Esempi

1. $|x-2| = 3$

Esempi

1. $|x-2| = 3 \iff x-2 = \pm 3$

Esempi

1. $|x-2| = 3 \iff x-2 = \pm 3 \iff x = 2+3 = 5 \vee x = 2-3 = -1;$

Esempi

1. $|x-2| = 3 \iff x-2 = \pm 3 \iff x = 2+3 = 5 \vee x = 2-3 = -1;$
2. $|x-2| < 3$

Esempi

1. $|x-2| = 3 \iff x-2 = \pm 3 \iff x = 2+3 = 5 \vee x = 2-3 = -1;$
2. $|x-2| < 3 \iff -3 < x-2 < 3$

Esempi

1. $|x-2| = 3 \iff x-2 = \pm 3 \iff x = 2+3 = 5 \vee x = 2-3 = -1;$
2. $|x-2| < 3 \iff -3 < x-2 < 3 \iff -3+2 < x < 3+2$

Esempi

1. $|x-2| = 3 \iff x-2 = \pm 3 \iff x = 2+3 = 5 \vee x = 2-3 = -1$;
2. $|x-2| < 3 \iff -3 < x-2 < 3 \iff -3+2 < x < 3+2 \iff$ $-1 < x < 5$;

Esempi

1. $|x-2| = 3 \iff x-2 = \pm 3 \iff x = 2+3 = 5 \vee x = 2-3 = -1$;
2. $|x-2| < 3 \iff -3 < x-2 < 3 \iff -3+2 < x < 3+2 \iff$ $-1 < x < 5$;
3. $|x-2| < -1$ Mai;

Esempi

1. $|x-2| = 3 \iff x-2 = \pm 3 \iff x = 2+3 = 5 \vee x = 2-3 = -1$;
2. $|x-2| < 3 \iff -3 < x-2 < 3 \iff -3+2 < x < 3+2 \iff$ $-1 < x < 5$;
3. $|x-2| < -1$ Mai;
4. $|x-2| \geq 0$ sempre;

Esempi

1. $|x-2| = 3 \iff x-2 = \pm 3 \iff x = 2+3 = 5 \vee x = 2-3 = -1$;
2. $|x-2| < 3 \iff -3 < x-2 < 3 \iff -3+2 < x < 3+2 \iff$ $-1 < x < 5$;
3. $|x-2| < -1$ Mai;
4. $|x-2| \geq 0$ sempre;
5. $|2x-1| > 5$

Esempi

1. $|x-2| = 3 \iff x-2 = \pm 3 \iff x = 2+3 = 5 \vee x = 2-3 = -1$;
2. $|x-2| < 3 \iff -3 < x-2 < 3 \iff -3+2 < x < 3+2 \iff$ $-1 < x < 5$;
3. $|x-2| < -1$ Mai;
4. $|x-2| \geq 0$ sempre;
5. $|2x-1| > 5 \iff 2x-1 < -5 \vee 2x-1 > 5 \iff x < -2 \vee x > 3$;

Esempi

1. $|x-2| = 3 \iff x-2 = \pm 3 \iff x = 2+3 = 5 \vee x = 2-3 = -1$;
2. $|x-2| < 3 \iff -3 < x-2 < 3 \iff -3+2 < x < 3+2 \iff -1 < x < 5$;
3. $|x-2| < -1$ Mai;
4. $|x-2| \geq 0$ sempre;
5. $|2x-1| > 5 \iff 2x-1 < -5 \vee 2x-1 > 5 \iff x < -2 \vee x > 3$;
6. $|2x-1| > 0 \iff |2x-1| \neq 0 \iff 2x-1 \neq 0 \iff x \neq \frac{1}{2}$.

Il dominio delle funzioni del tipo

$$f(x) = \frac{1}{|Q(x)|}$$

dove Q é un polinomio, é l'insieme

$$\{x \in \mathbf{R} : \ |Q(x)| \neq 0\} = \{x \in \mathbf{R} : \ Q(x) \neq 0\}.$$

Il dominio delle funzioni del tipo

$$f(x) = \frac{1}{|Q(x)|}$$

dove Q é un polinomio, é l'insieme

$$\{x \in \mathbf{R} : \ |Q(x)| \neq 0\} = \{x \in \mathbf{R} : \ Q(x) \neq 0\}.$$

1. Il dominio di $f(x) = \frac{1}{|x+2|}$ é $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$

Il dominio delle funzioni del tipo

$$f(x) = \frac{1}{|Q(x)|}$$

dove Q é un polinomio, é l'insieme

$$\{x \in \mathbf{R} : |Q(x)| \neq 0\} = \{x \in \mathbf{R} : Q(x) \neq 0\}.$$

1. Il dominio di $f(x) = \frac{1}{|x+2|}$ é $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$
2. Il dominio di $f(x) = \frac{1}{|x|+2}$ allora il suo dominio é tutto $\mathbf{R}$!!!

Il dominio delle funzioni del tipo

$$f(x) = \frac{1}{|Q(x)|}$$

dove Q é un polinomio, é l'insieme

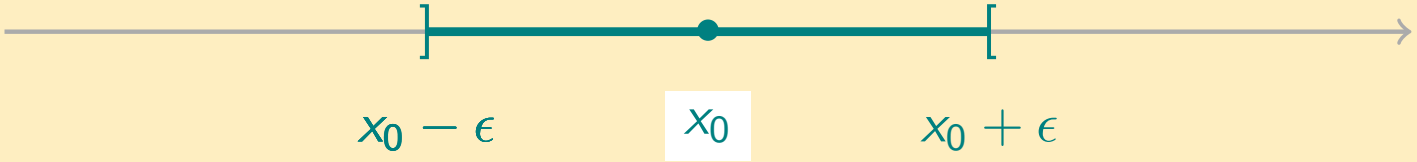
$$\{x \in \mathbf{R} : |Q(x)| \neq 0\} = \{x \in \mathbf{R} : Q(x) \neq 0\}.$$

1. Il dominio di $f(x) = \frac{1}{|x+2|}$ é $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$
2. Il dominio di $f(x) = \frac{1}{|x|+2}$ allora il suo dominio é tutto $\mathbf{R}$!!!
3. Il dominio di $f(x) = \frac{1}{|x|-2}$ é $\mathbf{R} \setminus \{\pm 2\}$

Intorni

Definizione

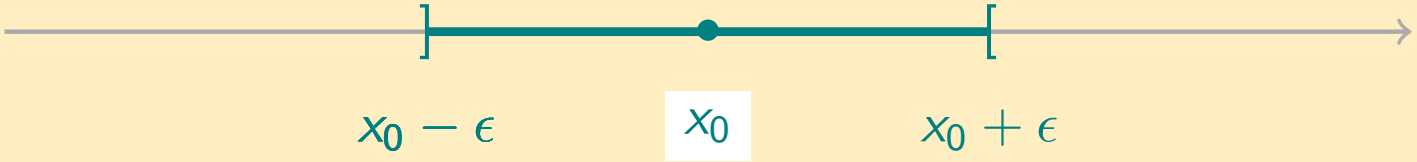
Sia $x_0 \in \mathbf{R}$. *Chiamiamo* **intorno (centrato)** *di* x_0 *e raggio* $\epsilon > 0$ *un insieme del tipo* $I_\epsilon(x_0) := (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$*:*



Intorni

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbf{R}$. *Chiamiamo* **intorno (centrato)** *di* x_0 *e raggio* $\epsilon > 0$ *un insieme del tipo* $I_\epsilon(x_0) := (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$*:*



Usando il valore assoluto vale che

$$x \in I_\epsilon(x_0) \iff x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon \iff |x - x_0| < \epsilon.$$

Limite $\ell \in \mathbf{R}$ per $x \to \pm\infty$

.

Definizione

1. *Sia* $f : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$. *Diremo che il limite della funzione* f *per* x *che tende a* $+\infty$ *é* ℓ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

Limite $\ell \in \mathbf{R}$ per $x \to \pm\infty$

.

Definizione

1. *Sia $f : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$. Diremo che il limite della funzione f per x che tende a $+\infty$ é ℓ e scriveremo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $N > 0$ **tale che per ogni** $x > N$ **vale che** $f(x) \in I_\epsilon(\ell)$.

Limite $\ell \in \mathbf{R}$ per $x \to \pm\infty$

.

Definizione

1. *Sia $f : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$. Diremo che il limite della funzione f per x che tende a $+\infty$ é ℓ e scriveremo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $N > 0$ **tale che per ogni** $x > N$ **vale che** $f(x) \in I_\epsilon(\ell)$. *In tal caso la retta $y = \ell$ si dice* **asintoto orizzontale (a destra)** *della funzione f.*

Limite $\ell \in \mathbf{R}$ per $x \to \pm\infty$

.

Definizione

1. *Sia $f : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$. Diremo che il limite della funzione f per x che tende a $+\infty$ é ℓ e scriveremo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $N > 0$ **tale che per ogni** $x > N$ **vale che** $f(x) \in I_\epsilon(\ell)$. *In tal caso la retta $y = \ell$ si dice* **asintoto orizzontale (a destra)** *della funzione f.*

2. *Sia $f : (-\infty, b) \to \mathbf{R}$ (ossia f definita su una semiretta a sinistra). Diremo che il limite della funzione f per x che tende a $-\infty$ é l e scriveremo*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

Limite $\ell \in \mathbf{R}$ per $x \to \pm\infty$

.

Definizione

1. *Sia $f : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$. Diremo che il limite della funzione f per x che tende a $+\infty$ é ℓ e scriveremo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $N > 0$ **tale che per ogni** $x > N$ **vale che** $f(x) \in I_\epsilon(\ell)$. *In tal caso la retta $y = \ell$ si dice* **asintoto orizzontale (a destra)** *della funzione f.*

2. *Sia $f : (-\infty, b) \to \mathbf{R}$ (ossia f definita su una semiretta a sinistra). Diremo che il limite della funzione f per x che tende a $-\infty$ é l e scriveremo*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $N > 0$ **tale che per ogni** $x < -N$ **vale che** $f(x) \in I_\epsilon(\ell)$.

Limite $\ell \in \mathbf{R}$ per $x \to \pm\infty$

.

Definizione

1. *Sia $f : (a, +\infty) \to \mathbf{R}$. Diremo che il limite della funzione f per x che tende a $+\infty$ é ℓ e scriveremo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $N > 0$ **tale che per ogni** $x > N$ **vale che** $f(x) \in I_\epsilon(\ell)$. *In tal caso la retta $y = \ell$ si dice* **asintoto orizzontale (a destra)** *della funzione f.*

2. *Sia $f : (-\infty, b) \to \mathbf{R}$ (ossia f definita su una semiretta a sinistra). Diremo che il limite della funzione f per x che tende a $-\infty$ é l e scriveremo*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $N > 0$ **tale che per ogni** $x < -N$ **vale che** $f(x) \in I_\epsilon(\ell)$. *In tal caso la retta $y = \ell$ si dice* **asintoto orizzontale (a sinistra)** *della funzione f.*

Esempio

Per ogni $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Limite $= +\infty$ per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$

.

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbf{R}$.

Limite $= +\infty$ per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$

.

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbf{R}$.

1. *Sia* $f : (x_0, b) \to \mathbf{R}$ *(ossia* f *definita a destra di un punto* x_0*). Diremo che per* x *che tende a* x_0^+ *il limite della funzione* f *é* $+\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

Limite $= +\infty$ per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$

.

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbf{R}$.

1. *Sia* $f : (x_0, b) \to \mathbf{R}$ *(ossia* f *definita a destra di un punto* x_0*). Diremo che per* x *che tende a* x_0^+ *il limite della funzione* f *é* $+\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

se **per ogni** $M > 0$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x_0 < x < x_0 + \delta$ **vale che** $f(x) > M$*;*

Limite $= +\infty$ per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$

.

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbf{R}$.

1. *Sia* $f : (x_0, b) \to \mathbf{R}$ *(ossia* f *definita a destra di un punto* x_0*). Diremo che per* x *che tende a* x_0^+ *il limite della funzione* f *é* $+\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

se **per ogni** $M > 0$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x_0 < x < x_0 + \delta$ **vale che** $f(x) > M$*;*

2. *Sia* $f : (a, x_0) \to \mathbf{R}$ *(ossia* f *definita a sinistra di un punto* x_0*). Diremo che il limite per* x *che tende a* x_0^- *della funzione* f *é* $+\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$

Limite $= +\infty$ per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$

.

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbf{R}$.

1. *Sia* $f : (x_0, b) \to \mathbf{R}$ *(ossia* f *definita a destra di un punto* x_0*). Diremo che per* x *che tende a* x_0^+ *il limite della funzione* f *é* $+\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

se **per ogni** $M > 0$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x_0 < x < x_0 + \delta$ **vale che** $f(x) > M$*;*

2. *Sia* $f : (a, x_0) \to \mathbf{R}$ *(ossia* f *definita a sinistra di un punto* x_0*). Diremo che il limite per* x *che tende a* x_0^- *della funzione* f *é* $+\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$

se **per ogni** $M > 0$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x_0 - \delta < x < x_0$ **vale che** $f(x) > M$.

Esempio

Per ogni $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty :$$

infatti, fissato $M > 0$ *scelto* $\delta = \frac{1}{M} > 0$, *per ogni* $0 < x < \delta$ *vale che*

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = M.$$

Invece

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

in quanto, fissato $M > 0$, *scelto* $\delta = \frac{1}{M} > 0$, *per ogni* $-\delta < x < 0$ *vale che*

$$\frac{1}{x} < -\frac{1}{\delta} = -M.$$

Limite $= -\infty$ per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$

.

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbf{R}$.

Limite $= -\infty$ per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$

.

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbf{R}$.

1. *Sia* $f : (x_0, b) \to \mathbf{R}$. *Diremo che per* x *che tende a* x_0^+ *il limite della funzione* f *é* $-\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

Limite $= -\infty$ per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$

.

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbf{R}$.

1. *Sia* $f : (x_0, b) \to \mathbf{R}$. *Diremo che per* x *che tende a* x_0^+ *il limite della funzione* f *é* $-\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

se **per ogni** $M > 0$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x_0 < x < x_0 + \delta$ **vale che** $f(x) < -M$;

Limite $= -\infty$ per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$

.

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbf{R}$.

1. *Sia* $f : (x_0, b) \to \mathbf{R}$. *Diremo che per* x *che tende a* x_0^+ *il limite della funzione* f *é* $-\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

se **per ogni** $M > 0$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x_0 < x < x_0 + \delta$ **vale che** $f(x) < -M$;

2. *Sia* $f : (a, x_0) \to \mathbf{R}$. *Diremo che per* x *che tende a* x_0^- *il limite della funzione* f *é* $-\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

Limite $= -\infty$ per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$

.

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbf{R}$.

1. *Sia* $f : (x_0, b) \to \mathbf{R}$. *Diremo che per* x *che tende a* x_0^+ *il limite della funzione* f *é* $-\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

se **per ogni** $M > 0$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x_0 < x < x_0 + \delta$ **vale che** $f(x) < -M$;

2. *Sia* $f : (a, x_0) \to \mathbf{R}$. *Diremo che per* x *che tende a* x_0^- *il limite della funzione* f *é* $-\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

se **per ogni** $M > 0$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x_0 - \delta < x < x_0$ **vale che** $f(x) < -M$.

Asintoto verticale

Definizione

1. *Sia* $f : (a, x_0) \to \mathbf{R}$. *Se*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty,$$

la retta $x = x_0$ *si dice* **asintoto verticale** *della funzione* f.

2. *Sia* $f : (x_0, b) \to \mathbf{R}$. *Se*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty,$$

la retta $x = x_0$ *si dice* **asintoto verticale** *della funzione* f.

Esempio

Per ogni $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$ *abbiamo visto che*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Esempio

Per ogni $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$ *abbiamo visto che*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Invece

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Esempio

Per ogni $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$ *abbiamo visto che*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Invece

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

In generale per ogni $n \geq 1$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

Esempio

Per ogni $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$ *abbiamo visto che*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Invece

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

In generale per ogni $n \geq 1$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

mentre

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ é pari,} \\ -\infty & \text{se } n \text{ é dispari.} \end{cases}$$

Limiti della forma $\frac{1}{0}$.

Se una funzione f definita a destra o a sinistra di x_0 é tale che $f(x_0) = 0$, allora

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0}.$$

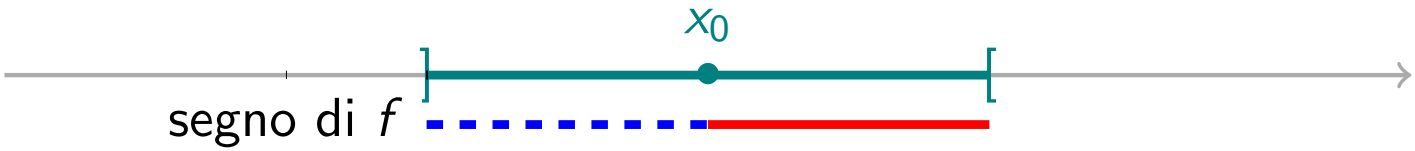
Limiti della forma $\frac{1}{0}$.

Se una funzione f definita a destra o a sinistra di x_0 é tale che $f(x_0) = 0$, allora

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0}.$$

Per calcolare tale limite, si studia il segno del denominatore f a destra o a sinistra di x_0.

Se

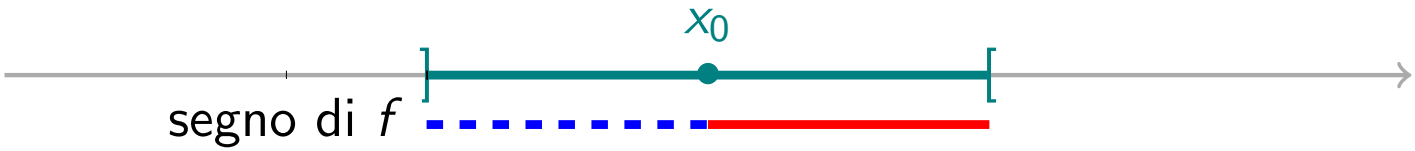


allora

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Se

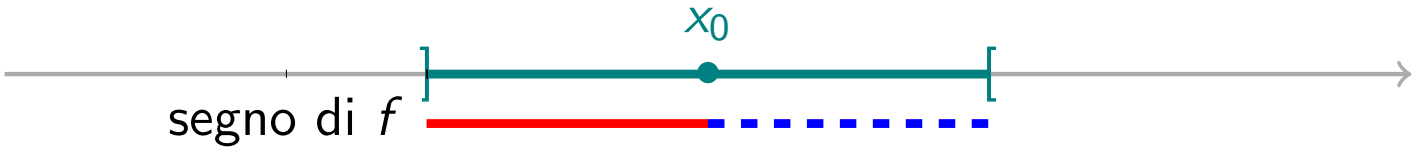


allora

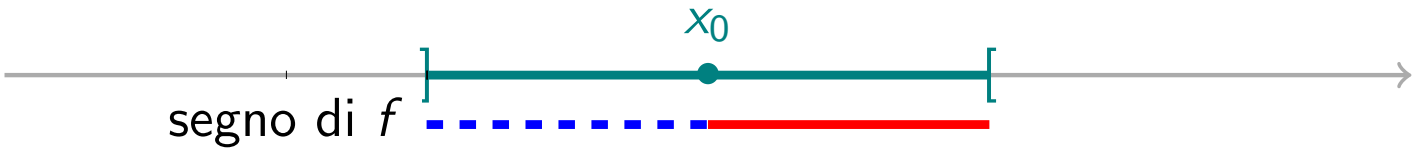
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Se



Se

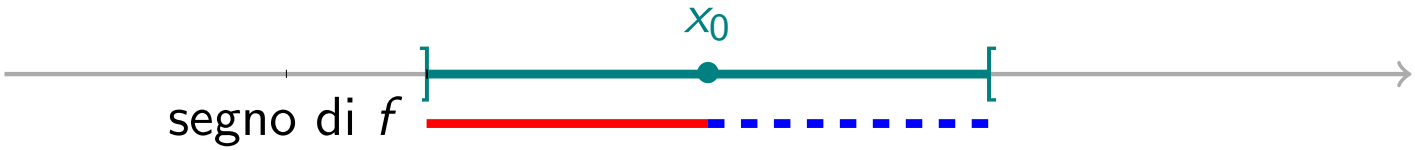


allora

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

Se



allora

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Se

Se

allora

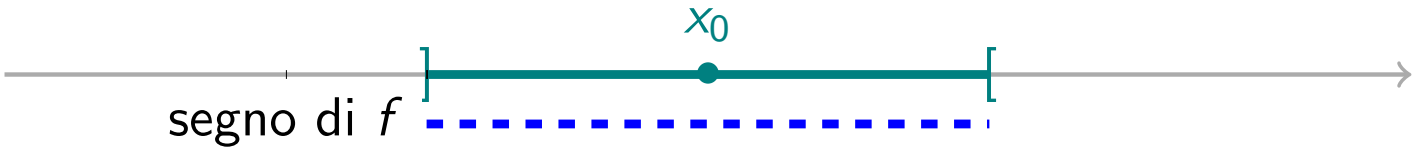
$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty;$$

Se

allora

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{1}{f(x)} = +\infty;$$

se



allora

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Quindi la regola generale é

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } f(x) > 0 \text{ su } (x_0, x_0 + \delta) \\ -\infty & \text{se } f(x) < 0 \text{ su } (x_0, x_0 + \delta). \end{cases}$$

e

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } f(x) > 0 \quad \text{su } (x_0 - \delta, x_0) \\ -\infty & \text{se } f(x) < 0 \text{ su } (x_0 - \delta, x_0). \end{cases}$$

Esempio

Supponiamo di voler studiare il segno della funzione $f(x) = 3 - x$.

$$f(x) \geq 0$$

Esempio

Supponiamo di voler studiare il segno della funzione $f(x) = 3 - x$.

$$f(x) \geq 0 \Longleftrightarrow 3 - x \geq 0$$

Esempio

Supponiamo di voler studiare il segno della funzione $f(x) = 3 - x$.

$$f(x) \geq 0 \iff 3 - x \geq 0 \iff -x \geq -3$$

Esempio

Supponiamo di voler studiare il segno della funzione $f(x) = 3 - x$.

$$f(x) \geq 0 \iff 3 - x \geq 0 \iff -x \geq -3 \iff x \leq 3.$$

Esempio

Supponiamo di voler studiare il segno della funzione $f(x) = 3 - x$.

$$f(x) \geq 0 \iff 3 - x \geq 0 \iff -x \geq -3 \iff x \leq 3.$$

Studiamo ora i limiti

1. $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{f(x)}$
2. $\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{f(x)}$

Esempio

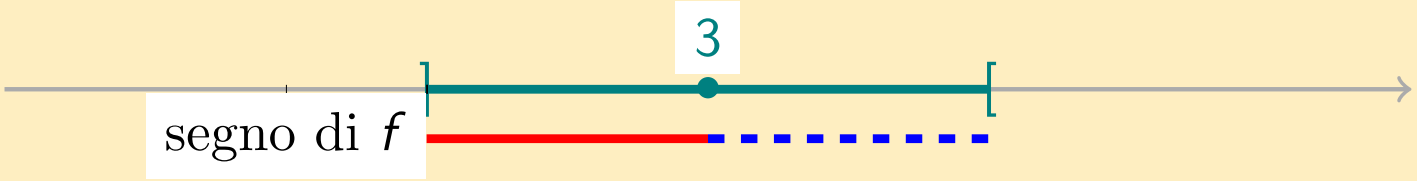
Supponiamo di voler studiare il segno della funzione $f(x) = 3 - x$.

$$f(x) \geq 0 \iff 3 - x \geq 0 \iff -x \geq -3 \iff x \leq 3.$$

Studiamo ora i limiti

1. $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{f(x)}$
2. $\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{f(x)}$

Essi si presentano nella forma indeterminata $\frac{1}{0}$. Studiando il segno del denominatore si ha che $3 - x > 0 \iff x < 3$. Quindi



Pertanto

$$\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{3 - x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

mentre

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{3 - x} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Esempio

Sia $f(x) = 3 - x$. Studiamo i limiti

1. $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{|3-x|}$
2. $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{(3-x)^2}$.

Esempio

Sia $f(x) = 3 - x$. Studiamo i limiti

1. $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{|3-x|}$
2. $\lim_{x \to 3^+} \frac{1}{(3-x)^2}$.

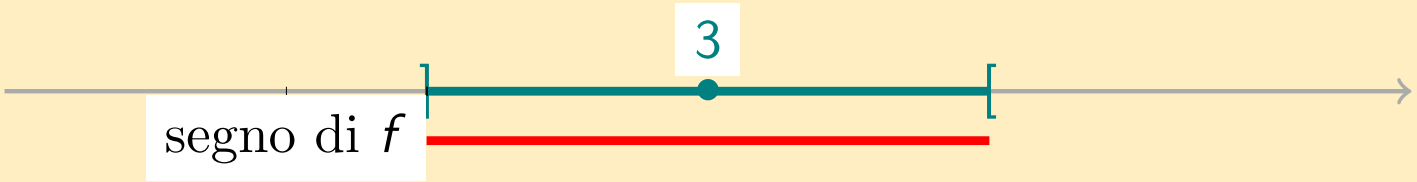
Studiando il segno del denominatore si ha che,

$$(3-x)^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbf{R}$$

e

$$|3-x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbf{R}$$

ossia



Quindi

$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{|3-x|} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{(3-x)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

Disequazioni di secondo grado

Sono della forma

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (\text{ o } \quad ax^2 + bx + c \leq 0) \tag{6}$$

con $a > 0$ (infatti se $a < 0$ basta moltiplicare tutto per -1 e invertire il verso della disequazione).
Occorre distinguere 3 casi:

Disequazioni di secondo grado

Sono della forma

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (\text{ o } \quad ax^2 + bx + c \leq 0) \tag{6}$$

con $a > 0$ (infatti se $a < 0$ basta moltiplicare tutto per -1 e invertire il verso della disequazione).
Occorre distinguere 3 casi:

1. I caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$.

Disequazioni di secondo grado

Sono della forma

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (\text{ o } \quad ax^2 + bx + c \leq 0) \tag{6}$$

con $a > 0$ (infatti se $a < 0$ basta moltiplicare tutto per -1 e invertire il verso della disequazione).
Occorre distinguere 3 casi:

1. I caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$.
2. I caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac = 0}$.

Disequazioni di secondo grado

Sono della forma

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (\text{ o } \quad ax^2 + bx + c \leq 0) \tag{6}$$

con $a > 0$ (infatti se $a < 0$ basta moltiplicare tutto per -1 e invertire il verso della disequazione).
Occorre distinguere 3 casi:

1. I caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$.
2. I caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac = 0}$.
3. I caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac < 0}$.

$\Delta = b^2 - 4ac > 0.$

In questo caso esistono $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ tali che il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ si decompone come

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

$\Delta = b^2 - 4ac > 0.$

In questo caso esistono $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ tali che il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ si decompone come

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Allora se $a > 0$ il segno di p é determinato dal *prodotto dei segni* di $(x - x_1)$ e di $(x - x_2)$. Ossia

$\Delta = b^2 - 4ac > 0.$

In questo caso esistono $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ tali che il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ si decompone come

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Allora se $a > 0$ il segno di p é determinato dal *prodotto dei segni* di $(x - x_1)$ e di $(x - x_2)$. Ossia

- p é positivo se $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ **hanno lo stesso segno**;

$\Delta = b^2 - 4ac > 0.$

In questo caso esistono $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ tali che il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ si decompone come

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Allora se $a > 0$ il segno di p é determinato dal *prodotto dei segni* di $(x - x_1)$ e di $(x - x_2)$. Ossia

- p é positivo se $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ **hanno lo stesso segno**;
- p é negativo se $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ sono discordi.

Allo scopo di studiare la (6)

$\Delta = b^2 - 4ac > 0.$

In questo caso esistono $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ tali che il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ si decompone come

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Allora se $a > 0$ il segno di p é determinato dal *prodotto dei segni* di $(x - x_1)$ e di $(x - x_2)$. Ossia

- p é positivo se $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ **hanno lo stesso segno**;
- p é negativo se $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ sono discordi.

Allo scopo di studiare la (6)

1. si studia quando $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ sono positivi (rispettivamente per $x \geq x_1$ e $x \geq x_2$);

$\Delta = b^2 - 4ac > 0.$

In questo caso esistono $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ tali che il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ si decompone come

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Allora se $a > 0$ il segno di p é determinato dal *prodotto dei segni* di $(x - x_1)$ e di $(x - x_2)$. Ossia

- p é positivo se $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ **hanno lo stesso segno**;
- p é negativo se $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ sono discordi.

Allo scopo di studiare la (6)

1. si studia quando $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ sono positivi (rispettivamente per $x \geq x_1$ e $x \geq x_2$);
2. si rappresentano sulla retta reale i due valori x_1, x_2, e per ciascun insieme $x \geq x_1$ e $x \geq x_2$ si disegna una semiretta (tratteggiando le semirette opposte ad indicare che negli intervalli $x \leq x_1$e $x \leq x_2$ i fattori $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ sono negativi);

$\Delta = b^2 - 4ac > 0.$

In questo caso esistono $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ tali che il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ si decompone come

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Allora se $a > 0$ il segno di p é determinato dal *prodotto dei segni* di $(x - x_1)$ e di $(x - x_2)$. Ossia

- p é positivo se $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ **hanno lo stesso segno**;
- p é negativo se $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ sono discordi.

Allo scopo di studiare la (6)

1. si studia quando $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ sono positivi (rispettivamente per $x \geq x_1$ e $x \geq x_2$);
2. si rappresentano sulla retta reale i due valori x_1, x_2, e per ciascun insieme $x \geq x_1$ e $x \geq x_2$ si disegna una semiretta (tratteggiando le semirette opposte ad indicare che negli intervalli $x \leq x_1$e $x \leq x_2$ i fattori $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ sono negativi);
3. su ogni intervallo $x \leq x_1$, $x_1 \leq x \leq x_2$, $x \geq x_2$ si moltiplicano i segni di $(x - x_1)$, $(x - x_2)$ ottenendo cosí il segno di $p(x)$.

Si ottiene cosí il seguente risultato generale:

Si ottiene cosí il seguente risultato generale:
se $a > 0$ **e** $\Delta > 0$ **il trinomio** $p(x)$ **é** **positivo** **negli intervalli** $x \leq x_1$ **e** $x \geq x_2$**, ossia** **negli intervalli esterni** **all'intervallo delle radici,**

Si ottiene cosí il seguente risultato generale:
se $a > 0$ **e** $\Delta > 0$ **il trinomio** $p(x)$ **é positivo negli intervalli** $x \leq x_1$ **e** $x \geq x_2$**, ossia negli intervalli esterni all'intervallo delle radici, mentre il trinomio é negativo nell'intervallo interno alle radici** (x_1, x_2)**.**

Si ottiene cosí il seguente risultato generale:
se $a > 0$ e $\Delta > 0$ il trinomio $p(x)$ é positivo negli intervalli $x \leq x_1$ e $x \geq x_2$, ossia negli intervalli esterni all'intervallo delle radici, mentre il trinomio é negativo nell'intervallo interno alle radici (x_1, x_2).
Scriveremo

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \iff x \leq x_1 \ \vee \ x \geq x_2,$$

mentre

$$ax^2 + bx + c \leq 0 \iff x_1 \leq x \leq x_2.$$

Esempio

$\forall k > 0$

$$x^2 - k^2 = (x - k)(x + k) \leq 0$$

Esempio

$\forall k > 0$

$$x^2 - k^2 = (x-k)(x+k) \leq 0 \Longleftrightarrow -k \leq x \leq k$$

Esempio

$\forall k > 0$

$$x^2 - k^2 = (x-k)(x+k) \leq 0 \iff -k \leq x \leq k$$

$$x^2 - k^2 \geq 0 \iff x \leq -k \vee x \geq k.$$

Esempio

$\forall k > 0$

$$x^2 - k^2 = (x-k)(x+k) \leq 0 \iff -k \leq x \leq k$$

$$x^2 - k^2 \geq 0 \iff x \leq -k \vee x \geq k.$$

Esempio

$$-5x^2 + 6x + 8 < 0$$

Esempio

$\forall k > 0$

$$x^2 - k^2 = (x-k)(x+k) \leq 0 \iff -k \leq x \leq k$$

$$x^2 - k^2 \geq 0 \iff x \leq -k \vee x \geq k.$$

Esempio

$$-5x^2 + 6x + 8 < 0 \iff 5x^2 - 6x - 8 > 0.$$

Poiché $\Delta = 196$ si possono calcolare $x_1 = -\frac{4}{5}$ e $x_2 = 2$.
Quindi

$$5x^2 - 6x - 8 = 5(x + \frac{4}{5})(x-2) > 0$$

Esempio

$\forall k > 0$

$$x^2 - k^2 = (x-k)(x+k) \leq 0 \iff -k \leq x \leq k$$

$$x^2 - k^2 \geq 0 \iff x \leq -k \vee x \geq k.$$

Esempio

$$-5x^2 + 6x + 8 < 0 \iff 5x^2 - 6x - 8 > 0.$$

Poiché $\Delta = 196$ si possono calcolare $x_1 = -\frac{4}{5}$ e $x_2 = 2$.
Quindi

$$5x^2 - 6x - 8 = 5(x + \frac{4}{5})(x-2) > 0 \iff x < -\frac{4}{5} \vee x > 2.$$

Esempio

Sia $f(x) = 4 - x^2$. Studiamo i limiti

1. $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{f(x)}$
2. $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{f(x)}$
3. $\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{f(x)}$
4. $\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{f(x)}$.

Esempio

Sia $f(x) = 4 - x^2$. Studiamo i limiti

1. $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{f(x)}$
2. $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{f(x)}$
3. $\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{f(x)}$
4. $\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{f(x)}$.

Si presentano tutti nella forma indeterminata $\frac{1}{0}$.

Esempio

Sia $f(x) = 4 - x^2$. Studiamo i limiti

1. $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{f(x)}$
2. $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{f(x)}$
3. $\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{f(x)}$
4. $\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{f(x)}$.

Si presentano tutti nella forma indeterminata $\frac{1}{0}$. Studiando il segno del denominatore si ha che

$$4 - x^2 > 0 \iff -2 < x < 2$$

ossia

Quindi

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{4 - x^2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{4 - x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{4 - x^2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{4 - x^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0.$

In questo caso esiste $x_1 \in \mathbf{R}$ tale che il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ si decompone come

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

$\Delta = b^2 - 4ac = 0.$

In questo caso esiste $x_1 \in \mathbf{R}$ tale che il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ si decompone come

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Quindi **se** $a > 0$ **e** $\Delta = 0$ **il trinomio é sempre positivo e si annulla solo nel punto** $x = x_1$**.** Ossia se $a > 0$ vale che

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &\geq 0 \ \forall x \in \mathbf{R} \\
ax^2 + bx + c &\leq 0 \iff x = x_1 \\
ax^2 + bx + c &> 0 \iff \forall x \neq x_1 \\
ax^2 + bx + c &< 0 \text{ per nessun valore di } x.
\end{aligned}$$

Esempio

Poiché $9x^2 - 6x + 1 = (x + \frac{1}{3})^2$ allora

$$\begin{aligned}
9x^2 - 6x + 1 &\geq 0 \ \forall x \in \mathbf{R} \\
9x^2 - 6x + 1 &\leq 0 \iff x = \frac{1}{3} \\
9x^2 - 6x + 1 &> 0 \iff \forall x \neq \frac{1}{3} \\
9x^2 - 6x + 1 &< 0 \text{ per nessun valore di } x.
\end{aligned}$$

Esempio

Poiché $9x^2 - 6x + 1 = (x + \frac{1}{3})^2$ allora

$$\begin{aligned}
9x^2 - 6x + 1 &\geq 0 \ \forall x \in \mathbf{R} \\
9x^2 - 6x + 1 &\leq 0 \iff x = \frac{1}{3} \\
9x^2 - 6x + 1 &> 0 \iff \forall x \neq \frac{1}{3} \\
9x^2 - 6x + 1 &< 0 \text{ per nessun valore di } x.
\end{aligned}$$

In particolare

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}^+} \frac{1}{9x^2 - 6x + 1} = \lim_{x \to -\frac{1}{3}^-} \frac{1}{9x^2 - 6x + 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0.$

In questo caso l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ non ammette radici reali e **se** $a > 0$ **il trinomio é sempre strettamente positivo.**

$\Delta = b^2 - 4ac < 0.$

In questo caso l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ non ammette radici reali e **se** $a > 0$ **il trinomio é sempre strettamente positivo.** Quindi, in particolare, se $a > 0$

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c &> 0 \ \forall x \in \mathbf{R}; \\
ax^2 + bx + c &\leq 0 \ \text{ per nessun valore di } x; \\
ax^2 + bx + c &\geq 0 \ \forall x \in \mathbf{R}; \\
ax^2 + bx + c &< 0 \ \text{per nessun valore di } x.
\end{aligned}$$

$\Delta = b^2 - 4ac < 0.$

In questo caso l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ non ammette radici reali e **se** $a > 0$ **il trinomio é sempre strettamente positivo.** Quindi, in particolare, se $a > 0$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &> 0 \ \forall x \in \mathbf{R}; \\ ax^2 + bx + c &\leq 0 \ \text{ per nessun valore di } x; \\ ax^2 + bx + c &\geq 0 \ \forall x \in \mathbf{R}; \\ ax^2 + bx + c &< 0 \ \text{per nessun valore di } x. \end{aligned}$$

Esempio

$\forall a \neq 0$

$$\begin{aligned} x^2 + a^2 &\geq 0 \ \forall x \in \mathbf{R} \\ x^2 + a^2 &\leq 0 \ \text{per nessun valore di } x. \end{aligned}$$

Limite $\ell \in \mathbf{R}$ per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$

.

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbf{R}$.

Limite $\ell \in \mathbf{R}$ per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$

.

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbf{R}$.

1. *Sia* $f : (x_0, b)$. *Diremo che per* x *che tende a* x_0^+ *il limite della funzione* f *é* $\ell \in \mathbf{R}$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

Limite $\ell \in \mathbf{R}$ per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$

.

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbf{R}$.

1. *Sia* $f : (x_0, b)$. *Diremo che per* x *che tende a* x_0^+ *il limite della funzione* f *é* $\ell \in \mathbf{R}$ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x_0 < x < x_0 + \delta$ **vale che** $|f(x) - \ell| < \epsilon$ *(ossia* $f(x) \in I_\epsilon(\ell)$*);*

Limite $\ell \in \mathbf{R}$ per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$

.

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbf{R}$.

1. *Sia* $f : (x_0, b)$. *Diremo che per* x *che tende a* x_0^+ *il limite della funzione* f *é* $\ell \in \mathbf{R}$ *e scriveremo*
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$
se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x_0 < x < x_0 + \delta$ **vale che** $|f(x) - \ell| < \epsilon$ *(ossia* $f(x) \in I_\epsilon(\ell)$*);*

2. *Sia* $f : (a, x_0)$. *Diremo che per* x *che tende a* x_0^- *il limite della funzione* f *é* $\ell \in \mathbf{R}$ *e scriveremo*
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$

Limite $\ell \in \mathbf{R}$ per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$

.

Definizione

Sia $x_0 \in \mathbf{R}$.

1. *Sia* $f : (x_0, b)$. *Diremo che per* x *che tende a* x_0^+ *il limite della funzione* f *é* $\ell \in \mathbf{R}$ *e scriveremo*
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$
se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x_0 < x < x_0 + \delta$ **vale che** $|f(x) - \ell| < \epsilon$ *(ossia* $f(x) \in I_\epsilon(\ell)$*);*

2. *Sia* $f : (a, x_0)$. *Diremo che per* x *che tende a* x_0^- *il limite della funzione* f *é* $\ell \in \mathbf{R}$ *e scriveremo*
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$
se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x_0 - \delta < x < x_0$ **vale che** $|f(x) - \ell| < \epsilon$ *(ossia* $f(x) \in I_\epsilon(\ell)$*).*

Limite per $x \to x_0$

.

Definizione

Sia $a < x_0 < b$ *ed* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, *eventualmente non definita in* x_0, *e sia* $\ell \in [-\infty, \infty]$.

Limite per $x \to x_0$

.

Definizione

Sia $a < x_0 < b$ *ed* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, *eventualmente non definita in* x_0, *e sia* $\ell \in [-\infty, \infty]$. *Se*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Limite per $x \to x_0$

.

Definizione

Sia $a < x_0 < b$ *ed* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$, *eventualmente non definita in* x_0, *e sia* $\ell \in [-\infty, \infty]$. *Se*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

allora diremo che per x *che tende a* x_0 *il limite della funzione* f *é* ℓ *e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

1. Se $\ell \in \mathbf{R}$, allora
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff$$
$\forall \epsilon > 0$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ **vale che** $f(x) \in I_\epsilon(\ell)$.

2. Invece
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff$$
$\forall M > 0$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ **vale che** $f(x) > M$.

3. Invece
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff$$
$\forall M > 0$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ **vale che** $f(x) < -M$.

Limite di una somma, di un prodotto, di un quoziente

Teorema

Supponiamo che per $x \to x_0^+$ *(rispettivamente, per* $x \to x_0^-$ *o per* $x \to x_0$*) due funzioni* f *e* g *abbiano limite rispettivamente* ℓ_1 *e* ℓ_2*;*

Limite di una somma, di un prodotto, di un quoziente

Teorema

Supponiamo che per $x \to x_0^+$ (rispettivamente, per $x \to x_0^-$ o per $x \to x_0$) due funzioni f e g abbiano limite rispettivamente ℓ_1 e ℓ_2;

1. *se la somma di tali limiti non é F.I., allora per $x \to x_0^+$ (rispettivamente, per $x \to x_0^-$ o per $x \to x_0$) il limite della somma $f + g$ é la somma $\ell_1 + \ell_2$;*

Limite di una somma, di un prodotto, di un quoziente

Teorema

Supponiamo che per $x \to x_0^+$ (rispettivamente, per $x \to x_0^-$ o per $x \to x_0$) due funzioni f e g abbiano limite rispettivamente ℓ_1 e ℓ_2;

1. *se la somma di tali limiti non é F.I., allora per $x \to x_0^+$ (rispettivamente, per $x \to x_0^-$ o per $x \to x_0$) il limite della somma $f + g$ é la somma $\ell_1 + \ell_2$;*
2. *Se il prodotto di tali limiti non é F.I., allora per $x \to x_0^+$ (rispettivamente, per $x \to x_0^-$ o per $x \to x_0$) il limite del prodotto $f \cdot g$ é il prodotto $\ell_1 \cdot \ell_2$;*

Limite di una somma, di un prodotto, di un quoziente

Teorema

Supponiamo che per $x \to x_0^+$ (rispettivamente, per $x \to x_0^-$ o per $x \to x_0$) due funzioni f e g abbiano limite rispettivamente ℓ_1 e ℓ_2;

1. *se la somma di tali limiti non é F.I., allora per $x \to x_0^+$ (rispettivamente, per $x \to x_0^-$ o per $x \to x_0$) il limite della somma $f + g$ é la somma $\ell_1 + \ell_2$;*
2. *Se il prodotto di tali limiti non é F.I., allora per $x \to x_0^+$ (rispettivamente, per $x \to x_0^-$ o per $x \to x_0$) il limite del prodotto $f \cdot g$ é il prodotto $\ell_1 \cdot \ell_2$;*
3. *Se il quoziente di tali limiti non é F.I. e $\ell_2 \neq 0$, allora per $x \to x_0^+$ (rispettivamente, per $x \to x_0^-$ o per $x \to x_0$) il limite del quoziente $\frac{f}{g}$ é il quoziente $\frac{\ell_1}{\ell_2}$.*

Continuitá

Definizione

Sia $a < x_0 < b$ *ed* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$.

Continuitá

Definizione

Sia $a < x_0 < b$ *ed* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$. *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Continuitá

Definizione

Sia $a < x_0 < b$ *ed* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$. *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

allora diremo che f *é continua in* x_0.

Continuitá

Definizione

Sia $a < x_0 < b$ *ed* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$. *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

allora diremo che f *é continua in* x_0.

Definizione

Sia $a < x_0 < b$ *ed* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$.

Continuitá

Definizione

Sia $a < x_0 < b$ *ed* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$. *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

allora diremo che f *é continua in* x_0.

Definizione

Sia $a < x_0 < b$ *ed* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$. *Se* f *é continua in tutti i punti di* (a, b) *diremo che* f *é continua su* (a, b).

Continuitá

Definizione

Sia $a < x_0 < b$ *ed* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$. *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

allora diremo che f *é continua in* x_0.

Definizione

Sia $a < x_0 < b$ *ed* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$. *Se* f *é continua in tutti i punti di* (a, b) *diremo che* f *é continua su* (a, b).

Le funzioni lineari, quadratiche, polinomiali, potenza, il valore assoluto, le funzioni razionali e le radici sono funzioni continue nel loro dominio.

Continuitá

Definizione

Sia $a < x_0 < b$ *ed* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$. *Se*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

allora diremo che f *é continua in* x_0.

Definizione

Sia $a < x_0 < b$ *ed* $f : (a, b) \to \mathbf{R}$. *Se* f *é continua in tutti i punti di* (a, b) *diremo che* f *é continua su* (a, b).

Le funzioni lineari, quadratiche, polinomiali, potenza, il valore assoluto, le funzioni razionali e le radici sono funzioni continue nel loro dominio.
Quindi per calcolare il limite di una di queste funzioni per $x \to x_0$, basta calcolare il valore della funzione nel punto x_0.

1. calcolare

$$\lim_{x \to 2^-} |x-3| + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2} =$$

1. calcolare

$$\lim_{x \to 2^-} |x-3| + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2} = |2-3| + \frac{\sqrt{5}}{0^-}$$

1. calcolare

$$\lim_{x \to 2^-} |x-3| + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2} = |2-3| + \frac{\sqrt{5}}{0^-} = 1 - \infty = -\infty;$$

1. calcolare

$$\lim_{x\to 2^-} |x-3| + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2} = |2-3| + \frac{\sqrt{5}}{0^-} = 1 - \infty = -\infty;$$

2. calcolare

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

1. calcolare

$$\lim_{x\to 2^-} |x-3| + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2} = |2-3| + \frac{\sqrt{5}}{0^-} = 1 - \infty = -\infty;$$

2. calcolare

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{2}{0^+} - \frac{2}{0^+} =$$

1. calcolare

$$\lim_{x\to 2^-} |x-3| + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2} = |2-3| + \frac{\sqrt{5}}{0^-} = 1 - \infty = -\infty;$$

2. calcolare

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{2}{0^+} - \frac{2}{0^+} = +\infty - \infty = F.I.$$

1. calcolare

$$\lim_{x\to 2^-} |x-3| + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2} = |2-3| + \frac{\sqrt{5}}{0^-} = 1 - \infty = -\infty;$$

2. calcolare

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{2}{0^+} - \frac{2}{0^+} = +\infty - \infty = F.I.$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x^2-1}$$

1. calcolare

$$\lim_{x\to 2^-} |x-3| + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2} = |2-3| + \frac{\sqrt{5}}{0^-} = 1 - \infty = -\infty;$$

2. calcolare

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{2}{0^+} - \frac{2}{0^+} = +\infty - \infty = F.I.$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty;$$

Esempio

Il limite

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^3 - 2}{4 - x^2} = \frac{6}{0}.$$

Esempio

Il limite

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^3 - 2}{4 - x^2} = \frac{6}{0}.$$

Studiando il segno del denominatore si ha che $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$. Quindi il denominatore in un intervallo a destra di 2 é negativo. Pertanto

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^3 - 2}{4 - x^2} = 6 \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Esempio

Il limite

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-2}{4-x^2} = \frac{6}{0}.$$

Studiando il segno del denominatore si ha che $4-x^2>0 \Leftrightarrow -2<x<2$. Quindi il denominatore in un intervallo a destra di 2 é negativo. Pertanto

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-2}{4-x^2} = 6\cdot(-\infty) = -\infty.$$

Inoltre poiché il denominatore in un intervallo a sinistra di 2 é positivo si ha che

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-2}{4-x^2} = 6\cdot(+\infty) = (+\infty).$$

Esempio

Il limite

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-2}{4-x^2} = \frac{6}{0}.$$

Studiando il segno del denominatore si ha che $4-x^2>0 \Leftrightarrow -2<x<2$. Quindi il denominatore in un intervallo a destra di 2 é negativo. Pertanto

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-2}{4-x^2} = 6\cdot(-\infty) = -\infty.$$

Inoltre poiché il denominatore in un intervallo a sinistra di 2 é positivo si ha che

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-2}{4-x^2} = 6\cdot(+\infty) = (+\infty).$$

Analogamente si ha che

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^3-2}{4-x^2} = -10\cdot(+\infty) = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^3-2}{4-x^2} = -10\cdot(-\infty) = +\infty.$$

Proposizione

Siano f, g due funzioni continue definite su (a, b) e sia $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$ e $g(x_0) \neq 0$ ed $\epsilon > 0$. Allora

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} g(x_0) \cdot (+\infty) & \text{se } f(x) > 0 \text{ su } (x_0, x_0 + \epsilon) \\ g(x_0) \cdot (-\infty) & \text{se } f(x) < 0 \text{ su } (x_0, x_0 + \epsilon). \end{cases}$$

e

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} g(x_0) \cdot (+\infty) & \text{se } f(x) > 0 \quad \text{se su } (x_0 - \epsilon, x_0) \\ g(x_0) \cdot (-\infty) & \text{se } f(x) < 0 \text{ su } (x_0 - \epsilon, x_0). \end{cases}$$

Se invece si ottiene la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ (ossia se $f(x_0) = g(x_0) = 0$), allora si deve provare a dividere per $(x - x_0)$ sia il numeratore che il denominatore. In alcuni casi si semplifica, in altri casi si useranno i limiti notevoli.

Se invece si ottiene la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ (ossia se $f(x_0) = g(x_0) = 0$), allora si deve provare a dividere per $(x - x_0)$ sia il numeratore che il denominatore. In alcuni casi si semplifica, in altri casi si useranno i limiti notevoli.

1. calcolare

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

Se invece si ottiene la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ (ossia se $f(x_0) = g(x_0) = 0$), allora si deve provare a dividere per $(x - x_0)$ sia il numeratore che il denominatore. In alcuni casi si semplifica, in altri casi si useranno i limiti notevoli.

1. calcolare

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}$$

Se invece si ottiene la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ (ossia se $f(x_0) = g(x_0) = 0$), allora si deve provare a dividere per $(x - x_0)$ sia il numeratore che il denominatore. In alcuni casi si semplifica, in altri casi si useranno i limiti notevoli.

1. calcolare

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{0}{2} = 0$$

Se invece si ottiene la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ (ossia se $f(x_0) = g(x_0) = 0$), allora si deve provare a dividere per $(x - x_0)$ sia il numeratore che il denominatore. In alcuni casi si semplifica, in altri casi si useranno i limiti notevoli.

1. calcolare
$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{0}{2} = 0$$

2. calcolare
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{0}{0}$$

Se invece si ottiene la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ (ossia se $f(x_0) = g(x_0) = 0$), allora si deve provare a dividere per $(x - x_0)$ sia il numeratore che il denominatore. In alcuni casi si semplifica, in altri casi si useranno i limiti notevoli.

1. calcolare

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{0}{2} = 0$$

2. calcolare

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}$$

Se invece si ottiene la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ (ossia se $f(x_0) = g(x_0) = 0$), allora si deve provare a dividere per $(x - x_0)$ sia il numeratore che il denominatore. In alcuni casi si semplifica, in altri casi si useranno i limiti notevoli.

1. calcolare

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{0}{2} = 0$$

2. calcolare

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Limite della funzione composta

Teorema

Sia $f : (a, b) \to (c, d)$ *e* $g : (c, d) \to \mathbf{R}$ *e siano* $x_0 \in (a, b)$ *e* $y_0 \in (c, d)$ *(eventualmente uguali a* $\pm\infty$*). Se*

Limite della funzione composta

Teorema

Sia $f : (a, b) \to (c, d)$ *e* $g : (c, d) \to \mathbf{R}$ *e siano* $x_0 \in (a, b)$ *e* $y_0 \in (c, d)$ *(eventualmente uguali a* $\pm\infty$*). Se*

1. *esiste il* $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$

Limite della funzione composta

Teorema

Sia $f : (a, b) \to (c, d)$ *e* $g : (c, d) \to \mathbf{R}$ *e siano* $x_0 \in (a, b)$ *e* $y_0 \in (c, d)$ *(eventualmente uguali a* $\pm\infty$*). Se*

1. *esiste il* $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$
2. *esiste il* $\lim_{x \to y_0} g(y) = \ell \in [-\infty, +\infty]$

Limite della funzione composta

Teorema

Sia $f : (a, b) \to (c, d)$ *e* $g : (c, d) \to \mathbf{R}$ *e siano* $x_0 \in (a, b)$ *e* $y_0 \in (c, d)$ *(eventualmente uguali a* $\pm\infty$*). Se*

1. *esiste il* $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$
2. *esiste il* $\lim_{x \to y_0} g(y) = \ell \in [-\infty, +\infty]$

allora esiste

$$\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = \ell.$$

Esempio

Calcoliamo il

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{4x^2 - 4}{x^2 + 3}} = \sqrt{4} = 2.$$

Approfondimento: il teorema di permanenza del segno

Teorema

Approfondimento: il teorema di permanenza del segno

Teorema

1. *Supponiamo che* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \in [-\infty, \infty]$, $\ell \neq 0$.
   1. *Se* $\ell > 0$ *allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* $f(x) > 0$ *su* $(x_0, x_0 + \delta)$;
   2. *Se* $\ell < 0$ *allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* $f(x) < 0$ *su* $(x_0, x_0 + \delta)$.

Approfondimento: il teorema di permanenza del segno

Teorema

1. *Supponiamo che* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \in [-\infty, \infty]$, $\ell \neq 0$.
   1. *Se* $\ell > 0$ *allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* $f(x) > 0$ *su* $(x_0, x_0 + \delta)$;
   2. *Se* $\ell < 0$ *allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* $f(x) < 0$ *su* $(x_0, x_0 + \delta)$.
2. *Supponiamo che* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \in [-\infty, \infty]$, $\ell \neq 0$.
   1. *Se* $\ell > 0$ *allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* $f(x) > 0$ *su* $(x_0, x_0 - \delta)$;
   2. *Se* $\ell < 0$ *allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* $f(x) < 0$ *su* $(x_0, x_0 - \delta)$.

Approfondimento: il teorema di permanenza del segno

Teorema

1. *Supponiamo che* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \in [-\infty, \infty]$, $\ell \neq 0$.
   1. *Se* $\ell > 0$ *allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* $f(x) > 0$ *su* $(x_0, x_0 + \delta)$;
   2. *Se* $\ell < 0$ *allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* $f(x) < 0$ *su* $(x_0, x_0 + \delta)$.
2. *Supponiamo che* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \in [-\infty, \infty]$, $\ell \neq 0$.
   1. *Se* $\ell > 0$ *allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* $f(x) > 0$ *su* $(x_0, x_0 - \delta)$;
   2. *Se* $\ell < 0$ *allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* $f(x) < 0$ *su* $(x_0, x_0 - \delta)$.
3. *Supponiamo che* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in [-\infty, \infty]$, $\ell \neq 0$.
   1. *Se* $\ell > 0$ *allora esiste* $N > 0$ *tale che* $f(x) > 0$ *su* $(N, +\infty)$;
   2. *Se* $\ell < 0$ *allora esiste* $N > 0$ *tale che* $f(x) < 0$ *su* $(N, +\infty)$.

Approfondimento: il teorema di permanenza del segno

Teorema

1. *Supponiamo che* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \in [-\infty, \infty]$, $\ell \neq 0$.
   1. *Se* $\ell > 0$ *allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* $f(x) > 0$ *su* $(x_0, x_0 + \delta)$;
   2. *Se* $\ell < 0$ *allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* $f(x) < 0$ *su* $(x_0, x_0 + \delta)$.
2. *Supponiamo che* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell \in [-\infty, \infty]$, $\ell \neq 0$.
   1. *Se* $\ell > 0$ *allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* $f(x) > 0$ *su* $(x_0, x_0 - \delta)$;
   2. *Se* $\ell < 0$ *allora esiste* $\delta > 0$ *tale che* $f(x) < 0$ *su* $(x_0, x_0 - \delta)$.
3. *Supponiamo che* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in [-\infty, \infty]$, $\ell \neq 0$.
   1. *Se* $\ell > 0$ *allora esiste* $N > 0$ *tale che* $f(x) > 0$ *su* $(N, +\infty)$;
   2. *Se* $\ell < 0$ *allora esiste* $N > 0$ *tale che* $f(x) < 0$ *su* $(N, +\infty)$.
4. *Supponiamo che* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell \in [-\infty, \infty]$, $\ell \neq 0$.
   1. *Se* $\ell > 0$ *allora esiste* $N > 0$ *tale che* $f(x) > 0$ *su* $(-\infty, -N)$;
   2. *Se* $\ell < 0$ *allora esiste* $N > 0$ *tale che* $f(x) < 0$ *su* $(-\infty, -N)$.

Potenze con esponente intero

Ricordiamo le proprietá delle potenze. Sia $a \in \mathbf{R}$ e $n \in \mathbf{N}$. Si definisce

$$a^n = a \cdots a \quad (n \text{ volte }).$$

Se $a \neq 0$ definiamo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Si pone

$$a^0 = 1.$$

Proprietá delle potenze. Per ogni $a, b \in \mathbf{R}$ (eventualmente non nulli) e per ogni $h, k \in \mathbf{Z}$ valgono le seguenti proprietá:

1. $a^h \cdot a^k = a^{h+k}$
2. $a^h : a^k = a^{h-k}$
3. $(a^h)^k = a^{hk}$
4. $a^h \cdot b^h = (ab)^h$
5. $a^h : b^h = (\frac{a}{b})^h$.

Esempio

Non dovete avere dubbi riguardo i seguenti esempi:

Esempio

Non dovete avere dubbi riguardo i seguenti esempi:

1. $a^2 \cdot a^2 = a^4$ mentre $a^2 + a^2 = 2a^2$

Esempio

Non dovete avere dubbi riguardo i seguenti esempi:

1. $a^2 \cdot a^2 = a^4$ mentre $a^2 + a^2 = 2a^2$
2. $(a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6$ mentre $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$

Esempio

Non dovete avere dubbi riguardo i seguenti esempi:

1. $a^2 \cdot a^2 = a^4$ mentre $a^2 + a^2 = 2a^2$
2. $(a^3)^2 = a^{3\cdot 2} = a^6$ mentre $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$
3. $(\frac{a}{b})^{-3} = (\frac{b}{a})^3$

Esempio

Non dovete avere dubbi riguardo i seguenti esempi:

1. $a^2 \cdot a^2 = a^4$ mentre $a^2 + a^2 = 2a^2$
2. $(a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6$ mentre $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$
3. $(\frac{a}{b})^{-3} = (\frac{b}{a})^3$
4. $a^2 \cdot a^{-2} = a^{2-2} = a^0 = 1$

Esempio

Non dovete avere dubbi riguardo i seguenti esempi:

1. $a^2 \cdot a^2 = a^4$ mentre $a^2 + a^2 = 2a^2$
2. $(a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6$ mentre $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$
3. $(\frac{a}{b})^{-3} = (\frac{b}{a})^3$
4. $a^2 \cdot a^{-2} = a^{2-2} = a^0 = 1$

Vogliamo ora generalizzare la definizione di potenza in modo che l'esponente $h \in \mathbf{R}$ ed in modo che le proprietá sopra siano ancora soddisfatte.

Definizione di $x^{\frac{1}{n}}$ ossia della radice n-ma

Sia $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Fissiamo $x \in \mathbf{R}$. Vogliamo risolvere l'equazione

$$b^n = x \tag{7}$$

con incognita b.

Definizione di $x^{\frac{1}{n}}$ ossia della radice n-ma

Sia $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Fissiamo $x \in \mathbf{R}$. Vogliamo risolvere l'equazione

$$b^n = x \tag{7}$$

con incognita b. Se $x = 0$, allora $b = 0$ soddisfa tale l'equazione.

Definizione di $x^{\frac{1}{n}}$ ossia della radice n-ma

Sia $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Fissiamo $x \in \mathbf{R}$. Vogliamo risolvere l'equazione

$$b^n = x \tag{7}$$

con incognita b. Se $x = 0$, allora $b = 0$ soddisfa tale l'equazione.
Se $x > 0$, si prova che l'insieme

$$\{y \in [0, +\infty) : y^n < x\}$$

é non vuoto e limitato superiormente.

Definizione di $x^{\frac{1}{n}}$ ossia della radice n-ma

Sia $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Fissiamo $x \in \mathbf{R}$. Vogliamo risolvere l'equazione

$$b^n = x \tag{7}$$

con incognita b. Se $x = 0$, allora $b = 0$ soddisfa tale l'equazione.
Se $x > 0$, si prova che l'insieme

$$\{y \in [0, +\infty) : y^n < x\}$$

é non vuoto e limitato superiormente. Pertanto esiste

$$b = \sup\{y \in [0, +\infty) : y^n < x\}.$$

Definizione di $x^{\frac{1}{n}}$ ossia della radice n-ma

Sia $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Fissiamo $x \in \mathbf{R}$. Vogliamo risolvere l'equazione

$$b^n = x \tag{7}$$

con incognita b. Se $x = 0$, allora $b = 0$ soddisfa tale l'equazione.
Se $x > 0$, si prova che l'insieme

$$\{y \in [0, +\infty) : y^n < x\}$$

é non vuoto e limitato superiormente. Pertanto esiste

$$b = \sup\{y \in [0, +\infty) : y^n < x\}.$$

Definiamo $\sqrt[n]{x}$ tale numero b. Tale b risolve l'equazione (7).

Definizione di $x^{\frac{1}{n}}$ ossia della radice n-ma

Sia $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Fissiamo $x \in \mathbf{R}$. Vogliamo risolvere l'equazione

$$b^n = x \tag{7}$$

con incognita b. Se $x = 0$, allora $b = 0$ soddisfa tale l'equazione.
Se $x > 0$, si prova che l'insieme

$$\{y \in [0, +\infty) : y^n < x\}$$

é non vuoto e limitato superiormente. Pertanto esiste

$$b = \sup\{y \in [0, +\infty) : y^n < x\}.$$

Definiamo $\sqrt[n]{x}$ tale numero b. Tale b risolve l'equazione (7).

- **Se n é pari**, é chiaro che l'equazione (7) é risolubile solo se $x \geq 0$. Quindi é ben definita la funzione $\sqrt[n]{\cdot} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.

Definizione di $x^{\frac{1}{n}}$ ossia della radice n-ma

Sia $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Fissiamo $x \in \mathbf{R}$. Vogliamo risolvere l'equazione

$$b^n = x \tag{7}$$

con incognita b. Se $x = 0$, allora $b = 0$ soddisfa tale l'equazione.
Se $x > 0$, si prova che l'insieme

$$\{y \in [0, +\infty) : y^n < x\}$$

é non vuoto e limitato superiormente. Pertanto esiste

$$b = \sup\{y \in [0, +\infty) : y^n < x\}.$$

Definiamo $\sqrt[n]{x}$ tale numero b. Tale b risolve l'equazione (7).

- **Se n é pari**, é chiaro che l'equazione (7) é risolubile solo se $x \geq 0$. Quindi é ben definita la funzione $\sqrt[n]{\cdot} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.
- **Se n é dispari** e $x < 0$, allora $-x > 0$ e la soluzione dell'equazione $b^n = (-x)$ é tale che

$$(-b)^n = -(b)^n = -(-x) = x.$$

Definizione di $x^{\frac{1}{n}}$ ossia della radice n-ma

Sia $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$. Fissiamo $x \in \mathbf{R}$. Vogliamo risolvere l'equazione

$$b^n = x \tag{7}$$

con incognita b. Se $x = 0$, allora $b = 0$ soddisfa tale l'equazione.
Se $x > 0$, si prova che l'insieme

$$\{y \in [0, +\infty) : y^n < x\}$$

é non vuoto e limitato superiormente. Pertanto esiste

$$b = \sup\{y \in [0, +\infty) : y^n < x\}.$$

Definiamo $\sqrt[n]{x}$ tale numero b. Tale b risolve l'equazione (7).

- **Se n é pari**, é chiaro che l'equazione (7) é risolubile solo se $x \geq 0$. Quindi é ben definita la funzione $\sqrt[n]{\cdot} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.
- **Se n é dispari** e $x < 0$, allora $-x > 0$ e la soluzione dell'equazione $b^n = (-x)$ é tale che

  $$(-b)^n = -(b)^n = -(-x) = x.$$

  Quindi la radice n-ma é ben definita anche per $x \leq 0$ e la funzione $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Pertanto

Pertanto

- **se** n **é pari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \geq 0$ ed é sempre ≥ 0.

Pertanto

- **se** n **é pari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \geq 0$ ed é sempre ≥ 0.
- **se** n **é dispari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ ed ha il segno di x.

Pertanto

- **se** n **é pari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \geq 0$ ed é sempre ≥ 0.
- **se** n **é dispari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ ed ha il segno di x.

Esempio

Pertanto

- **se** n **é pari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \geq 0$ ed é sempre ≥ 0.
- **se** n **é dispari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ ed ha il segno di x.

Esempio

1. $\sqrt[3]{27} = 3$;

Pertanto

- **se** n **é pari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \geq 0$ ed é sempre ≥ 0.
- **se** n **é dispari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ ed ha il segno di x.

Esempio

1. $\sqrt[3]{27} = 3$;
2. $\sqrt[3]{-27} = -3$;

Pertanto

- **se** n **é pari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \geq 0$ ed é sempre ≥ 0.
- **se** n **é dispari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ ed ha il segno di x.

Esempio

1. $\sqrt[3]{27} = 3$;
2. $\sqrt[3]{-27} = -3$;
3. $\sqrt[2]{4} = 2$;

Pertanto

- **se** n **é pari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \geq 0$ ed é sempre ≥ 0.
- **se** n **é dispari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ ed ha il segno di x.

Esempio

1. $\sqrt[3]{27} = 3$;
2. $\sqrt[3]{-27} = -3$;
3. $\sqrt[2]{4} = 2$;
4. $-\sqrt[2]{4} = -2$;

Pertanto

- **se** n **é pari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \geq 0$ ed é sempre ≥ 0.
- **se** n **é dispari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ ed ha il segno di x.

Esempio

1. $\sqrt[3]{27} = 3$;
2. $\sqrt[3]{-27} = -3$;
3. $\sqrt[2]{4} = 2$;
4. $-\sqrt[2]{4} = -2$;
5. $\sqrt[2]{-4}$ *non esiste;*

Pertanto

- **se** n **é pari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \geq 0$ ed é sempre ≥ 0.
- **se** n **é dispari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ ed ha il segno di x.

Esempio

1. $\sqrt[3]{27} = 3$;
2. $\sqrt[3]{-27} = -3$;
3. $\sqrt[2]{4} = 2$;
4. $-\sqrt[2]{4} = -2$;
5. $\sqrt[2]{-4}$ *non esiste;*
6. $\sqrt[3]{x}$ *esiste per ogni* $x \in \mathbf{R}$;

Pertanto

- **se** n **é pari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \geq 0$ ed é sempre ≥ 0.
- **se** n **é dispari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ ed ha il segno di x.

Esempio

1. $\sqrt[3]{27} = 3$;
2. $\sqrt[3]{-27} = -3$;
3. $\sqrt[2]{4} = 2$;
4. $-\sqrt[2]{4} = -2$;
5. $\sqrt[2]{-4}$ *non esiste;*
6. $\sqrt[3]{x}$ *esiste per ogni* $x \in \mathbf{R}$;
7. $\sqrt{x}$ *esiste per ogni* $x \geq 0$;

Pertanto

- **se** n **é pari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \geq 0$ ed é sempre ≥ 0.
- **se** n **é dispari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ ed ha il segno di x.

Esempio

1. $\sqrt[3]{27} = 3$;
2. $\sqrt[3]{-27} = -3$;
3. $\sqrt[2]{4} = 2$;
4. $-\sqrt[2]{4} = -2$;
5. $\sqrt[2]{-4}$ *non esiste;*
6. $\sqrt[3]{x}$ *esiste per ogni* $x \in \mathbf{R}$;
7. $\sqrt{x}$ *esiste per ogni* $x \geq 0$;
8. $\sqrt[3]{-x}$ *esiste per ogni* $x \in \mathbf{R}$;

Pertanto

- **se** n **é pari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \geq 0$ ed é sempre ≥ 0.
- **se** n **é dispari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ ed ha il segno di x.

Esempio

1. $\sqrt[3]{27} = 3$;
2. $\sqrt[3]{-27} = -3$;
3. $\sqrt[2]{4} = 2$;
4. $-\sqrt[2]{4} = -2$;
5. $\sqrt[2]{-4}$ *non esiste;*
6. $\sqrt[3]{x}$ *esiste per ogni* $x \in \mathbf{R}$;
7. $\sqrt{x}$ *esiste per ogni* $x \geq 0$;
8. $\sqrt[3]{-x}$ *esiste per ogni* $x \in \mathbf{R}$;
9. $\sqrt{-x}$ *esiste per ogni* $-x \geq 0$ *ossia per* $x \leq 0$.

Se $n \in \mathbf{N}$ é **dispari**

$$\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$$

e $\forall a, x \in \mathbf{R}$ vale che

$$a\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n x}.$$

Esempio

Se $n \in \mathbf{N}$ é **dispari**

$$\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$$

e $\forall a, x \in \mathbf{R}$ vale che

$$a\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n x}.$$

Esempio

1. $-2\sqrt[3]{3} = -\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 3}$;

Se $n \in \mathbf{N}$ é **dispari**

$$\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$$

e $\forall a, x \in \mathbf{R}$ vale che

$$a\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n x}.$$

Esempio

1. $-2\sqrt[3]{3} = -\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 3}$;
2. $\sqrt[3]{x^3} = x$

Se $n \in \mathbf{N}$ é **dispari**

$$\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$$

e $\forall a, x \in \mathbf{R}$ vale che

$$a\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n x}.$$

Esempio

1. $-2\sqrt[3]{3} = -\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 3}$;
2. $\sqrt[3]{x^3} = x$
3. $\sqrt[3]{2x-1} = -\sqrt[3]{1-2x}$.

Questa proprietá non vale per le radici $\sqrt[n]{\cdot}$ con n pari dal momento che per ogni $x \neq 0$ o esiste $\sqrt[n]{x}$ o esiste $\sqrt[n]{-x}$.

Questa proprietá non vale per le radici $\sqrt[n]{\cdot}$ con n pari dal momento che per ogni $x \neq 0$ o esiste $\sqrt[n]{x}$ o esiste $\sqrt[n]{-x}$.
Se n é **pari** e $x \geq 0$ allora

$$a\sqrt[n]{x} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a \geq 0, \\ & \end{cases}$$

Questa proprietá non vale per le radici $\sqrt[n]{\cdot}$ con n pari dal momento che per ogni $x \neq 0$ o esiste $\sqrt[n]{x}$ o esiste $\sqrt[n]{-x}$.
Se n é **pari** e $x \geq 0$ allora

$$a\sqrt[n]{x} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a \geq 0, \\ -(-a)\sqrt[n]{x} = & \end{cases}$$

Questa proprietá non vale per le radici $\sqrt[n]{\cdot}$ con n pari dal momento che per ogni $x \neq 0$ o esiste $\sqrt[n]{x}$ o esiste $\sqrt[n]{-x}$.
Se n é **pari** e $x \geq 0$ allora

$$a\sqrt[n]{x} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a \geq 0, \\ -(-a)\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{(-a)^n x} = & \end{cases}$$

Questa proprietá non vale per le radici $\sqrt[n]{\cdot}$ con n pari dal momento che per ogni $x \neq 0$ o esiste $\sqrt[n]{x}$ o esiste $\sqrt[n]{-x}$.
Se n é **pari** e $x \geq 0$ allora

$$a\sqrt[n]{x} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a \geq 0, \\ -(-a)\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{(-a)^n x} = -\sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Questa proprietá non vale per le radici $\sqrt[n]{\cdot}$ con n pari dal momento che per ogni $x \neq 0$ o esiste $\sqrt[n]{x}$ o esiste $\sqrt[n]{-x}$.
Se n é **pari** e $x \geq 0$ allora

$$a\sqrt[n]{x} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a \geq 0, \\ -(-a)\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{(-a)^n x} = -\sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

In particolare, segue che

$$\sqrt[n]{a^n x} = \begin{cases} a\sqrt[n]{x} & \text{se } a \geq 0, \\ & \end{cases}$$

Questa proprietá non vale per le radici $\sqrt[n]{\cdot}$ con n pari dal momento che per ogni $x \neq 0$ o esiste $\sqrt[n]{x}$ o esiste $\sqrt[n]{-x}$.
Se n é **pari** e $x \geq 0$ allora

$$a\sqrt[n]{x} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a \geq 0, \\ -(-a)\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{(-a)^n x} = -\sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

In particolare, segue che

$$\sqrt[n]{a^n x} = \begin{cases} a\sqrt[n]{x} & \text{se } a \geq 0, \\ -a\sqrt[n]{x} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$
$$= |a|\sqrt[n]{x} \quad \forall x \geq 0$$

Questa proprietá non vale per le radici $\sqrt[n]{\cdot}$ con n pari dal momento che per ogni $x \neq 0$ o esiste $\sqrt[n]{x}$ o esiste $\sqrt[n]{-x}$.
Se n é **pari** e $x \geq 0$ allora

$$a\sqrt[n]{x} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a \geq 0, \\ -(-a)\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{(-a)^n x} = -\sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

In particolare, segue che

$$\sqrt[n]{a^n x} = \begin{cases} a\sqrt[n]{x} & \text{se } a \geq 0, \\ -a\sqrt[n]{x} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$
$$= |a|\sqrt[n]{x} \quad \forall x \geq 0$$

da cui

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad \forall a \in \mathbf{R}.$$

Esempio

Questa proprietá non vale per le radici $\sqrt[n]{\cdot}$ con n pari dal momento che per ogni $x \neq 0$ o esiste $\sqrt[n]{x}$ o esiste $\sqrt[n]{-x}$.
Se n é **pari** e $x \geq 0$ allora

$$a\sqrt[n]{x} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a \geq 0, \\ -(-a)\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{(-a)^n x} = -\sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

In particolare, segue che

$$\sqrt[n]{a^n x} = \begin{cases} a\sqrt[n]{x} & \text{se } a \geq 0, \\ -a\sqrt[n]{x} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$
$$= |a|\sqrt[n]{x} \quad \forall x \geq 0$$

da cui

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad \forall a \in \mathbf{R}.$$

Esempio

1. $-3\sqrt[2]{2} = -\sqrt[2]{3^2 \cdot 2}$;

Questa proprietá non vale per le radici $\sqrt[n]{\cdot}$ con n pari dal momento che per ogni $x \neq 0$ o esiste $\sqrt[n]{x}$ o esiste $\sqrt[n]{-x}$.
Se n é **pari** e $x \geq 0$ allora

$$a\sqrt[n]{x} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a \geq 0, \\ -(-a)\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{(-a)^n x} = -\sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

In particolare, segue che

$$\sqrt[n]{a^n x} = \begin{cases} a\sqrt[n]{x} & \text{se } a \geq 0, \\ -a\sqrt[n]{x} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$
$$= |a|\sqrt[n]{x} \quad \forall x \geq 0$$

da cui

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad \forall a \in \mathbf{R}.$$

Esempio

1. $-3\sqrt[2]{2} = -\sqrt[2]{3^2 \cdot 2}$;
2. $\sqrt[2]{2(-3)^2} = 3\sqrt[2]{\cdot 2}$;

Questa proprietá non vale per le radici $\sqrt[n]{\cdot}$ con n pari dal momento che per ogni $x \neq 0$ o esiste $\sqrt[n]{x}$ o esiste $\sqrt[n]{-x}$.
Se n é **pari** e $x \geq 0$ allora

$$a\sqrt[n]{x} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a \geq 0, \\ -(-a)\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{(-a)^n x} = -\sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

In particolare, segue che

$$\sqrt[n]{a^n x} = \begin{cases} a\sqrt[n]{x} & \text{se } a \geq 0, \\ -a\sqrt[n]{x} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$
$$= |a|\sqrt[n]{x} \quad \forall x \geq 0$$

da cui

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad \forall a \in \mathbf{R}.$$

Esempio

1. $-3\sqrt[2]{2} = -\sqrt[2]{3^2 \cdot 2}$;
2. $\sqrt[2]{2(-3)^2} = 3\sqrt[2]{\cdot 2}$;
3. $\sqrt{x^2} = |x|$

Questa proprietá non vale per le radici $\sqrt[n]{\cdot}$ con n pari dal momento che per ogni $x \neq 0$ o esiste $\sqrt[n]{x}$ o esiste $\sqrt[n]{-x}$.
Se n é **pari** e $x \geq 0$ allora

$$a\sqrt[n]{x} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a \geq 0, \\ -(-a)\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{(-a)^n x} = -\sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

In particolare, segue che

$$\sqrt[n]{a^n x} = \begin{cases} a\sqrt[n]{x} & \text{se } a \geq 0, \\ -a\sqrt[n]{x} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$
$$= |a|\sqrt[n]{x} \quad \forall x \geq 0$$

da cui

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad \forall a \in \mathbf{R}.$$

Esempio

1. $-3\sqrt[2]{2} = -\sqrt[2]{3^2 \cdot 2}$;
2. $\sqrt[2]{2(-3)^2} = 3\sqrt[2]{\cdot 2}$;
3. $\sqrt{x^2} = |x|$
4. $\sqrt{x^4} = |x|^2 = x^2$

Siano $m, n \in \mathbf{N}$, $n \neq 0$.

Siano $m, n \in \mathbf{N}$, $n \neq 0$.

1. se n é dispari, allora $\sqrt[n]{x^m}$ é ben definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ perché la radice n-ma di ordine dispari é sempre ben definita;

Siano $m, n \in \mathbf{N}$, $n \neq 0$.

1. se n é dispari, allora $\sqrt[n]{x^m}$ é ben definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ perché la radice n-ma di ordine dispari é sempre ben definita;
2. se $n, m > 0$ sono pari, allora $\sqrt[n]{x^m}$ é definita per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Siano $m, n \in \mathbf{N}$, $n \neq 0$.

1. se n é dispari, allora $\sqrt[n]{x^m}$ é ben definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ perché la radice n-ma di ordine dispari é sempre ben definita;
2. se $n, m > 0$ sono pari, allora $\sqrt[n]{x^m}$ é definita per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Attenzione alle semplificazioni tra gli esponenti!!! Infatti la funzione $\sqrt[4]{x^2}$ é sempre definita, mentre,

Siano $m, n \in \mathbf{N}$, $n \neq 0$.

1. se n é dispari, allora $\sqrt[n]{x^m}$ é ben definita per ogni $x \in \mathbf{R}$ perché la radice n-ma di ordine dispari é sempre ben definita;
2. se $n, m > 0$ sono pari, allora $\sqrt[n]{x^m}$ é definita per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Attenzione alle semplificazioni tra gli esponenti!!! Infatti la funzione $\sqrt[4]{x^2}$ é sempre definita, mentre, se semplificaste il 2 con il 4, otterreste la funzione $\sqrt{x}$ che é una funzione definita solo per ogni $x \geq 0$. Quindi la giusta semplificazione é $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{|x|}$.

Potenze con esponente razionale

Siano $m, n \in \mathbf{N}$, $n \neq 0$.
Sia $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$ e sia $q = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$ con $n \neq 0$.

Potenze con esponente razionale

Siano $m, n \in \mathbf{N}$, $n \neq 0$.
Sia $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$ e sia $q = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$ con $n \neq 0$.
Se $q > 0$ allora per ogni $x \geq 0$ definiamo

$$x^q (= x^{m/n}) := \sqrt[n]{x^m};$$

Potenze con esponente razionale

Siano $m, n \in \mathbf{N}$, $n \neq 0$.
Sia $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$ e sia $q = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$ con $n \neq 0$.
Se $q > 0$ allora per ogni $x \geq 0$ definiamo

$$x^q (= x^{m/n}) := \sqrt[n]{x^m};$$

se $q < 0$ possiamo dare tale definizione solo per ogni $x > 0$.

Potenze con esponente razionale

Siano $m, n \in \mathbf{N}$, $n \neq 0$.
Sia $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$ e sia $q = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$ con $n \neq 0$.
Se $q > 0$ allora per ogni $x \geq 0$ definiamo

$$x^q (= x^{m/n}) := \sqrt[n]{x^m};$$

se $q < 0$ possiamo dare tale definizione solo per ogni $x > 0$.
Le proprietá delle potenze espresse nel caso di esponenti $h, k \in \mathbf{Z}$ si estendono nel caso di esponente $h, k \in \mathbf{Q}$.

Limiti con radici

Le forme indeterminate in cui compaiono radici quadrate e cubiche si affrontano ricorrendo alle note formule:

$$(\sqrt{x} - y)(\sqrt{x} + y) = x - y^2$$

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$$

(che discendono dal prodotto notevole $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$) e

Limiti con radici

Le forme indeterminate in cui compaiono radici quadrate e cubiche si affrontano ricorrendo alle note formule:

$$(\sqrt{x} - y)(\sqrt{x} + y) = x - y^2$$
$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = x - y$$

(che discendono dal prodotto notevole $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$) e

$$(\sqrt[3]{x} - y)(\sqrt[3]{x^2} + y^2 + \sqrt[3]{x}y) = x - y^3$$

(che discende dalla formula di scomposizione

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + b^2 + ab).$$

)

1. Il limite

$$\lim_{x \to a} \frac{x - a}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

1. Il limite

$$\lim_{x \to a} \frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Moltiplicando numeratore e denominatore per $(\sqrt{x}+\sqrt{a})$ si ottiene

$$\lim_{x \to a} \frac{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)} = \lim_{x \to a} (\sqrt{x}+\sqrt{a})$$

$$= 2\sqrt{a}.$$

1. Il limite

$$\lim_{x \to a} \frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Moltiplicando numeratore e denominatore per $(\sqrt{x}+\sqrt{a})$ si ottiene

$$\lim_{x \to a} \frac{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)} = \lim_{x \to a} (\sqrt{x}+\sqrt{a})$$

$$= 2\sqrt{a}.$$

2. Il limite

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

1. Il limite

$$\lim_{x\to a} \frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$

si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Moltiplicando numeratore e denominatore per $(\sqrt{x}+\sqrt{a})$ si ottiene

$$\lim_{x\to a} \frac{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)} = \lim_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})$$

$$= 2\sqrt{a}.$$

2. Il limite

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Moltiplicando numeratore e denominatore per $(\sqrt{x+1}+2)$ si ottiene

$$\lim_{x\to 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+1-4)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{4}.$$

3. Il limite

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

si presenta nella forma indeterminata $\infty - \infty$.

4. Il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x$$

si presenta nella forma indeterminata $\infty-\infty$. Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{x^2+x+1}+x$ si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}.$$

5. Il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x$$

si presenta nella forma indeterminata $\infty-\infty$. Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{x^2+x+1}+x$ si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}.$$

Dividendo ora per $\frac{1}{x}$ otteniamo

6. Il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x$$

si presenta nella forma indeterminata $\infty-\infty$. Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{x^2+x+1}+x$ si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}.$$

Dividendo ora per $\frac{1}{x}$ otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}+1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}$$

7. Il limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

si presenta nella forma indeterminata $\frac{1}{\infty-\infty}$. Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{x^2+x+1}-x$ si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{x^2+x+1-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{x+1}.$$

7. Il limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$

si presenta nella forma indeterminata $\frac{1}{\infty-\infty}$. Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{x^2+x+1}-x$ si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{x^2+x+1-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{x+1}.$$

Dividendo ora per $\frac{1}{x}$ otteniamo

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{x}}{1+\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}{1+\frac{1}{x}} = -2$$

dove si é utilizzato il fatto che quando $x<0$ si ha che

$$\frac{\sqrt{\cdot}}{x} = -\sqrt{\frac{\cdot}{x^2}}.$$

Esponenziale

Sia $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ e sia $r \in \mathbf{R}$. Se $a > 1$ definiamo

$$a^x := \sup\{a^q : q \in \mathbf{Q}, q < x\}$$

Esponenziale

Sia $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ e sia $r \in \mathbf{R}$. Se $a > 1$ definiamo

$$a^x := \sup\{a^q : q \in \mathbf{Q}, q < x\}$$

Se $0 < a < 1$ definiamo

$$a^x := \inf\{a^q : q \in \mathbf{Q}, q < x\}.$$

Se $a = 1$ poniamo $a^x = 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. La funzione $x \to a^x \in (0, +\infty)$ si dice **esponenziale di base** a.
Essa ha come dominio tutto $\mathbf{R}$, é una funzione continua e gode delle proprietà viste per le potenze, ossia

1. $a^0 = 1$
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
3. $a^x : a^y = a^{x-y}$
4. $(a^x)^y = a^{xy}$
5. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
6. $a^x : b^x = (\frac{a}{b})^x$.

Esempio

Non dovete avere dubbi riguardo i seguenti esempi:

1. $(a^x)^2 = a^{2x} \neq a^{x^2}$
2. $a^x + a^x = 2a^x \neq a^{2x}$
3. $a^x + a^{-x} = a^x + \frac{1}{a^x} = \frac{a^x \cdot a^x + 1}{a^x} = \frac{a^{2x}+1}{a^x}$

Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1, \\ & \end{cases}$$

Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1, \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1, \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a < 1, \\ \end{cases}$$

Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1, \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a < 1, \\ 0 & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1, \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a < 1, \\ 0 & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

Ovviamente

$$\lim_{x\to-\infty} a^{-x} = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1, \\ & \end{cases}$$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1, \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a < 1, \\ 0 & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

Ovviamente

$$\lim_{x\to-\infty} a^{-x} = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1, \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

L'esponenziale di base e=**numero di Nepero** é la funzione esponenziale più nota.

L'esponenziale di base e=**numero di Nepero** é la funzione esponenziale più nota.
Quando $a > 1$ e $n, m > 0$ qualsiasi, allora

L'esponenziale di base e=**numero di Nepero** é la funzione esponenziale più nota.
Quando $a > 1$ e $n, m > 0$ qualsiasi, allora

- per $x \to +\infty$ la potenza $(a^x)^m = a^{mx}$ dell'esponenziale di base a va a $+\infty$ più velocemente della potenza x^n ossia

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^{mx}}{x^n} = +\infty$$

L'esponenziale di base e=**numero di Nepero** é la funzione esponenziale più nota.
Quando $a > 1$ e $n, m > 0$ qualsiasi, allora

- per $x \to +\infty$ la potenza $(a^x)^m = a^{mx}$ dell'esponenziale di base a va a $+\infty$ più velocemente della potenza x^n ossia

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^{mx}}{x^n} = +\infty$$

(equivalentemente

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^{mx}} = 0.)$$

L'esponenziale di base e=**numero di Nepero** é la funzione esponenziale più nota.
Quando $a > 1$ e $n, m > 0$ qualsiasi, allora

- per $x \to +\infty$ la potenza $(a^x)^m = a^{mx}$ dell'esponenziale di base a va a $+\infty$ più velocemente della potenza x^n ossia

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^{mx}}{x^n} = +\infty$$

(equivalentemente

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^{mx}} = 0.)$$

- per $x \to -\infty$ la potenza $(a^x)^m = a^{mx}$ dell'esponenziale di base a va a 0 più velocemente della potenza di $(\frac{1}{x})^n$ ossia

$$\lim_{x \to -\infty} x^n a^{mx} = 0$$

L'esponenziale di base e=**numero di Nepero** é la funzione esponenziale più nota.
Quando $a > 1$ e $n, m > 0$ qualsiasi, allora

- per $x \to +\infty$ la potenza $(a^x)^m = a^{mx}$ dell'esponenziale di base a va a $+\infty$ più velocemente della potenza x^n ossia

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^{mx}}{x^n} = +\infty$$

(equivalentemente

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^{mx}} = 0.)$$

- per $x \to -\infty$ la potenza $(a^x)^m = a^{mx}$ dell'esponenziale di base a va a 0 più velocemente della potenza di $(\frac{1}{x})^n$ ossia

$$\lim_{x \to -\infty} x^n a^{mx} = 0$$

(equivalentemente

$$\lim_{x \to +\infty} x^n a^{-mx} = 0.)$$

Logaritmi

Sia $a > 0, a \neq 1$ e $b > 0$. Si definisce logaritmo in base a di b (e si scrive $\log_a b$) l'unico numero reale x tale che $a^x = b$. Ossia

$$x = \log_a b \Longleftrightarrow a^x = b.$$

Dalla sua definizione e dalle proprietá delle potenze con esponente reale segue che per ogni $b, c > 0$ e per ogni $r \in \mathbf{R}$:

1. $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$
2. $\log_a b^r = r \log_a b$
3. $\log_a (b/c) = \log_a b - \log_a c$
4. $\log_a 1 = 0$
5. $\log_a a = 1$

Osservazione

Si ricordi che **non esiste il logaritmo di** 0.

Esempio

1. $\log_a^2 x = (\log_a x)^2 = (\log_a x) \cdot (\log_a x)$;
2. $\log_a x^3 = 3 \log x$ per ogni $x > 0$;
3. $\log_a x^2 = \log_a (x \cdot x) = 2 \log x$ per ogni $x > 0$.
4. $\log_a \frac{1}{x} \neq \frac{1}{\log_a x}$. Invece $\log_a \frac{1}{x} = \log_a (x)^{-1} = -\log_a x$
5. $\frac{\log_a x}{b} \neq \log_a(\frac{x}{b})$. Quindi $\frac{\log 3}{2} \neq \log \frac{3}{2}$ e $\frac{\log(2x^3)}{4x} \neq \frac{\log(x^2)}{2}$!!!

Osservazione

1. Si osservi che in generale se n é dispari

$$\log_a x^n = n \log_a x \quad \text{per ogni } x > 0.$$

Invece se n é pari la funzione $f(x) = \log_a x^n$ é diversa dalla funzione $g(x) = n \log_a x$. Infatti la prima é definita per ogni $x \neq 0$ mentre la seconda é definita per ogni $x > 0$. Se n é pari la giusta relazione é la seguente:

$$\log_a x^n = n \log_a |x| \quad \text{per ogni } x \neq 0.$$

2. In generale ogni numero reale $b \in \mathbf{R}$ puó essere scritto come

$$b = \log_a a^b.$$

Inoltre ogni numero reale $b > 0$ puó essere scritto anche come

$$b = a^{\log_a b}.$$

Esempio

Riflettete sulle seguenti uguaglianze:

1. $e^{\log x} = x$;
2. $e^{-2\log x} = e^{\log(x^{-2})} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$;
3. $e^{x+3\log x} = e^x \cdot e^{\log x^3} = x^3 e^x$;
4. $e^{-x+\log(2x+1)} = e^{-x} \cdot e^{\log(2x+1)} = (2x+1)e^{-x}$.

Limiti notevoli

I seguenti limiti stabiliscono una scala tra le funzioni che tendono a $+\infty$: per $x \to +\infty$

1. se $\alpha, \beta > 0$ allora
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log|x|)^\alpha}{|x|^\beta} = 0;$$
2. se $\alpha, \beta > 0$ e $a > 1$ allora
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|x|^\alpha}{a^{\beta x}} = 0;$$

(in particolare segue che se $\alpha, \beta > 0$ e $a > 1$ allora $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log|x|)^\alpha}{a^{\beta x}} = 0$).
Inoltre

1. se $\alpha, \beta > 0$ allora
$$\lim_{x\to 0} (\log|x|)^\alpha |x|^\beta = 0$$
2. se $a > 1$ allora $\forall\beta > 0$ e $\forall\alpha$
$$\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha a^{\beta x} = 0;$$
3. se $a > 1$ allora $\forall\beta > 0$ e $\forall\alpha$ allora
$$\lim_{x\to-\infty} (\log|x|)^\alpha a^{\beta x} = 0$$