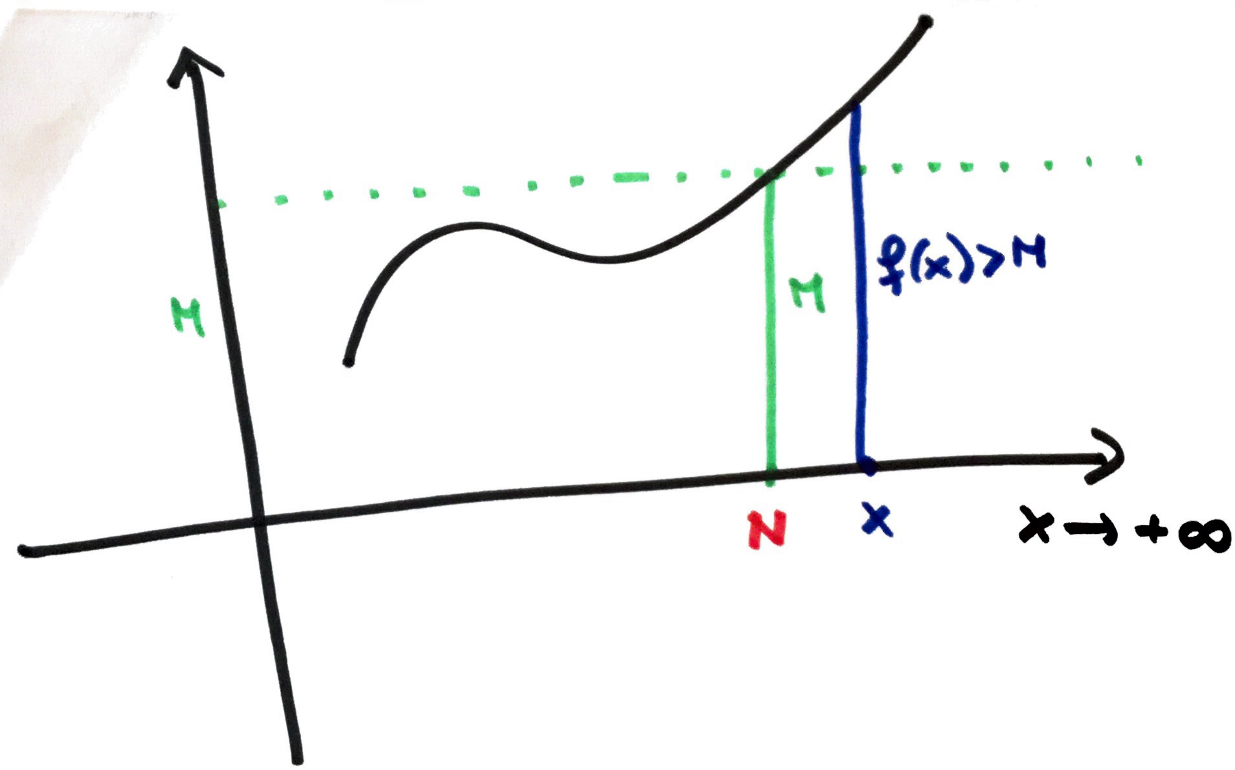
LIMITE DI FUNZIONE per $x \to +\infty$

Sia $f : (a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

DIREMO che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff$

per quanto grande fisso $M > 0$,
quando x diventa più grande di un certo N, $f(x)$ diventa $> M$

$\iff \forall M > 0 \; \exists N > 0$ tale che $\forall x > N$ vale che $f(x) \geq M$



LIMITI DI FUNZIONI per $x \to +\infty$, $x \to -\infty$

Sia $f: (a, +\infty) \to \mathbb{R}$

Diremo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\Longleftrightarrow$ per quanto grande fisso $M > 0$
da un certo $N > 0$ in poi
$f(x)$ diventa $> M$

$\Longleftrightarrow$ $\forall M > 0 \ \exists N > 0$ t.c. $\forall x > N \ f(x) > M$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\Longleftrightarrow$ per quanto grande fisso $M > 0$
da un certo $N > 0$ in poi
$f(x)$ diventa $< -M$

$\Longleftrightarrow$ $\forall M > 0 \ \exists N > 0$ t.c. $\forall x > N \ f(x) < -M$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\Longleftrightarrow$ per quanto grande fisso $M > 0$
per valori di x minori di un certo $-N$
$f(x)$ diventa $> M$

$\Longleftrightarrow$ $\forall M > 0 \ \exists N > 0$ t.c. per ogni $x < -N$
$f(x) > M$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

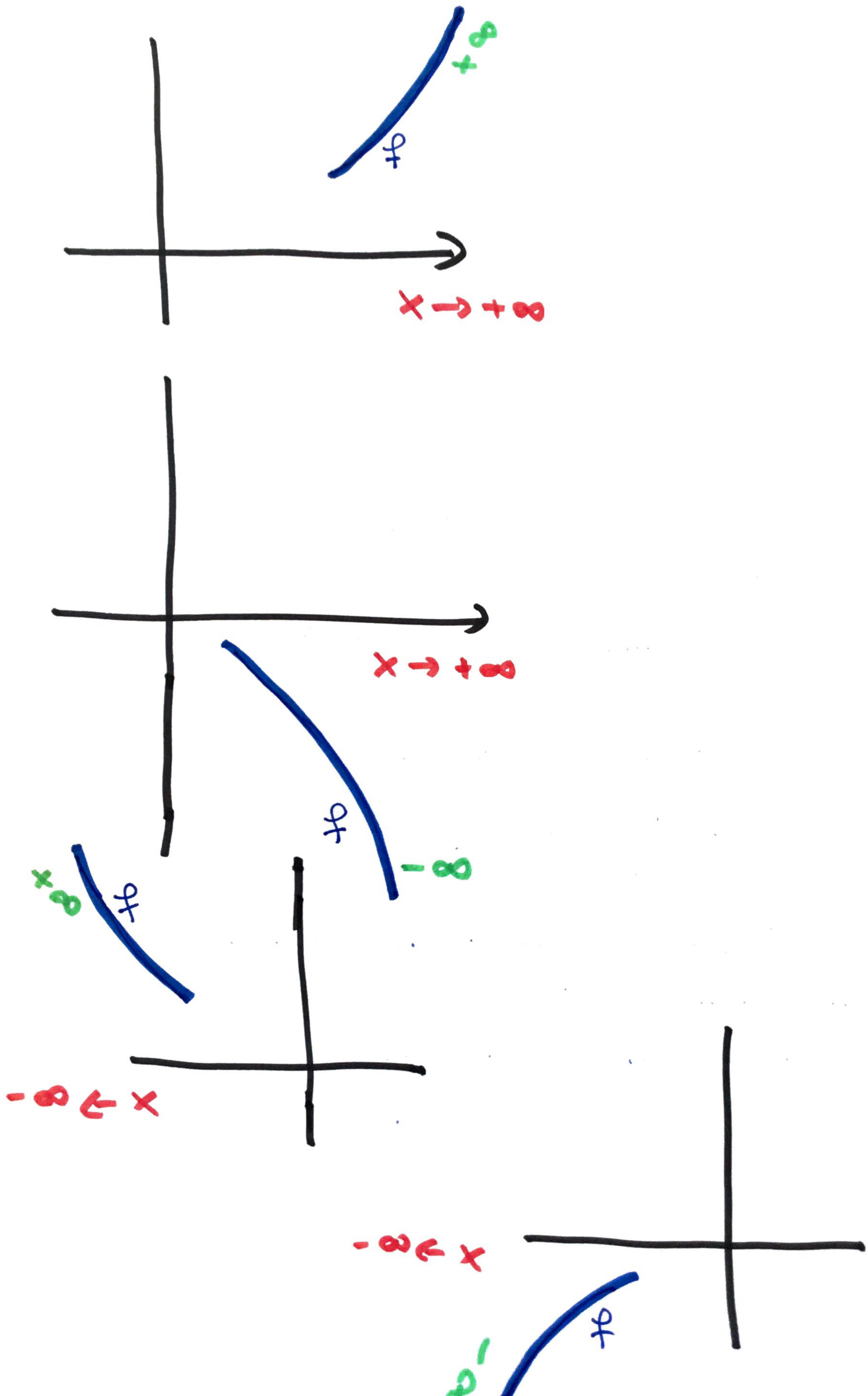
$\iff$ per quanto grande fisso $M > 0$ per valori di x minori di un certo $-N$ vale che $f(x)$ diventa $< -M$

$\iff \forall M > 0 \; \exists N > 0$ t.c. $\forall x < -N$
$f(x) < -N$

OSS Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ dirò che il $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$

Se $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty$ dirò che il $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$

(quando verranno trattati i limiti per $x \to \pm\infty$ in cui il limite è un numero reale, verrà chiarita questa definizione)



+∞
f
x → +∞
x → +∞
f
-∞
+∞
f
-∞ ← x
-∞ ← x
f
-∞

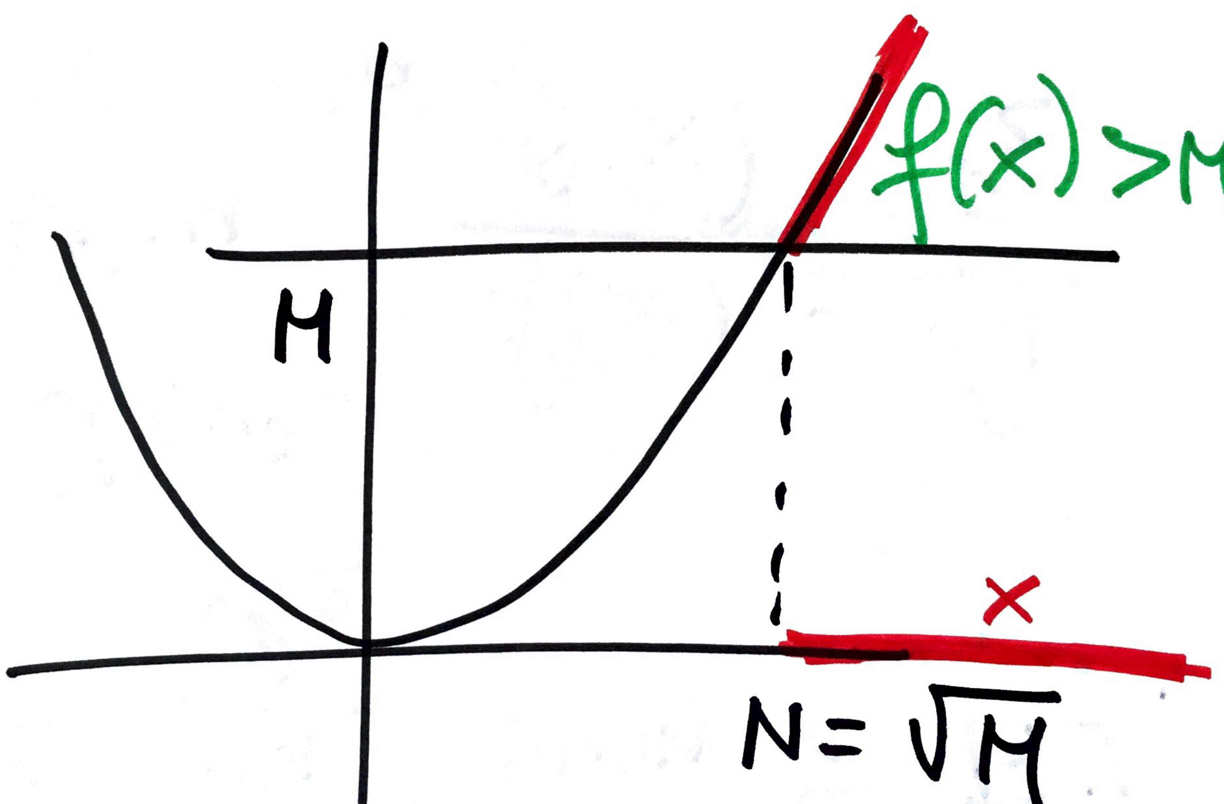
- In base alla definizione data, proviamo che
$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty :$$

Sia $M > 0$. Vogliamo che $x^2 > M$.

Ora $x^2 > M \iff x > \sqrt{M}$ o $x < -\sqrt{M}$.

Siccome ci interessa $N > 0$, scelgo $N = \sqrt{M}$.

Ottengo che per $x > N$ vale $x^2 > M$.



OSS Il limite di un rapporto di polinomi:

del tipo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

o del tipo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

si presenta nella forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$.

Infatti abbiamo visto che un polinomio per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$, tende a $\pm\infty$

LIMITI per $x \to +\infty$ di RAPPORTI DI POLINOMI

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$

  $Q(x) = b_N x^N + b_{N-1} x^{N-1} + \dots + b_1 x + b_0$

Metto in evidenza x^k al numeratore e x^N al denominatore:

trovo $\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^k \left(a_k + \cancel{\frac{a_{k-1}}{x}}^{\,0} + \dots + \cancel{\frac{a_0}{x^k}}^{\,0}\right)}{x^N \left(b_N + \cancel{\frac{b_{N-1}}{x}}^{\,0} + \dots + \cancel{\frac{b_0}{x^N}}^{\,0}\right)}$

Poiché $x \to +\infty$ si ha che $\frac{1}{x} \to 0$. Anche tutti gli altri termini del tipo $\frac{1}{x^h}$.

Allora $\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{a_k x^k}{b_N x^N} =$

$$= \begin{cases} \frac{a_k}{b_k} & \text{se } K = N \\ 0 & \text{se } N > K \\ \left(\frac{a_k}{b_N}\right) \cdot (+\infty) & \text{se } K > N \end{cases}$$

$\boxed{\text{ossia } \textbf{TRASCURO} \text{ LE POTENZE PIÙ BASSE}}$

ossia nell'ultimo caso $K > N$ il segno del limite dipende dal segno di $\frac{a_k}{b_N}$

ES

$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^5 + x}{-3x^2 + x} = \left(-\frac{5}{3}\right)(+\infty) = -\infty$

vince il numeratore che ha grado 5

$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + x^3}{-2x^4 + x} = 0$ (vince il denominatore che ha grado 0)

$\lim_{x \to +\infty} \frac{-x^2 + x - 5}{x^2 - 25x + 16} = -1$ (stesso grado)

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 \cancel{- x}}{\cancel{3x^4} - x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{-x^5} = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^3} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

  posso trascurare $-x$ rispetto a x^2
  e $3x^4$ rispetto a $-x^5$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{3x^4} - 5x^6}{\cancel{x^3} - 2x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^6}{-2x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{2} x^2 = +\infty$$

  posso trascurare $3x^4$ rispetto a $-5x^6$
  x^3 " " $-2x^4$

- tralascio
  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^7 \cancel{- x^4}}{\cancel{x^5} - 5x^7} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^7}{-5x^7} = -\frac{3}{5}$$

  trascuro

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x^5}{x^7 + 320x^2} = 0$$ in quanto x^7 al denominatore vince tutte le altre potenze

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^7 \cancel{- 5x^2}}{\cancel{-2x^4} + x^6} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^7}{x^6} = -3(+\infty) = -\infty$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^5 \cancel{- x^4}}{3x^5 \cancel{- 2x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5x^5}{3x^5} = \frac{5}{3}$$

LIMITI per $x \to -\infty$ di RAPPORTO DI POLINOMI

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$ con $P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$Q(x) = b_N x^N + b_{N-1} x^{N-1} + \dots + b_1 x + b_0$

Mettendo in evidenza x^k al numeratore e x^N al den. trovo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^k\left(a_k + \cancel{\frac{a_{k-1}}{x}}^{\,0} + \cancel{\dots}^{\,0}\right)}{x^N\left(b_N + \cancel{\frac{b_{N-1}}{x}}_{\,0} + \cancel{\dots}_{\,0}\right)}$$

Come prima, i termini del tipo $\frac{1}{x^n} \to 0$

Allora $$\lim_{x \to -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_k x^k}{b_N x^N} =$$

$$= \begin{cases} \frac{a_k}{b_k} & \text{se } k = N \\ 0 & \text{se } N > k \\ \left(\frac{a_k}{b_N}\right) \cdot \frac{(-\infty)^k}{(-\infty)^N} = \frac{a_k}{b_N} (-\infty)^{k-N} & \text{se } k > N \end{cases}$$

ossia l'∞ assume il segno di $\frac{a_k}{b_N}$ moltiplicato per il segno di $(-\infty)^{k-N}$. Le potenze + basse vengono trascurate.

ES • $\lim_{x \to -\infty} x^n = (-\infty)^n$

• quindi $\lim_{x \to -\infty} x^2 = (-\infty)^2 = +\infty$

- $\lim_{x \to -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$

- Quindi $\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\infty & n \text{ è dispari} \end{cases}$

- $\lim_{x \to -\infty} -5\,x^2 = -5 \cdot (-\infty)^2 = -\infty$

- $\lim_{x \to -\infty} -5x^3 = -5 \cdot (-\infty)^3 = +\infty$

- $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3x^7 + 5x^2 - 3}{x^\alpha + 2} = \begin{cases} 3 & \text{se } \alpha = 7 \\ 3 \cdot \dfrac{(-\infty)^7}{(-\infty)} = +\infty & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } \alpha = 8 \end{cases}$

- $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 - x^2 + 5}{x - 3x^2} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^4}{-3x^2} = \dfrac{(-\infty)^2}{-3} = \dfrac{+\infty}{-3} = -\infty$

- $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{5x^5 \cancel{+x}}{-3x^2 \cancel{+2}} = \lim_{x \to -\infty} -\dfrac{5}{3}(x)^{5-2} = -\dfrac{5}{3}(-\infty)^3 = +\infty$

FUNZIONE VALORE ASSOLUTO

Se $x \in \mathbb{R}$, definiamo

↳ non è il numero senza segno!

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

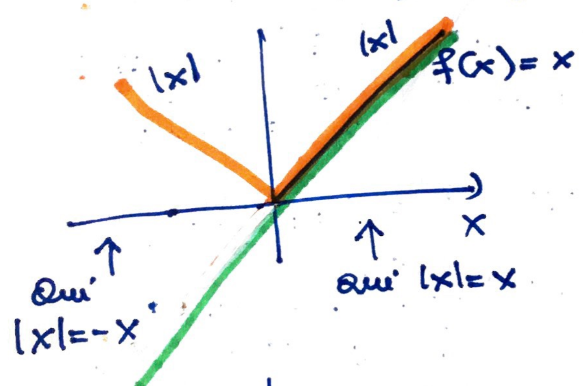
Si osservi che se $x \leq 0$ $\quad |x| = -x \geq 0$

ossia il valore assoluto rende un numero negativo maggiore o uguale a 0.

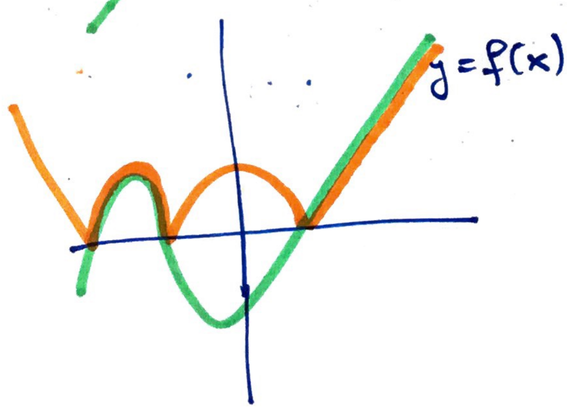
In particolare

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Disegno in — il grafico di f ed in — il grafico di $|f|$



Il valore assoluto $|f|$ ribalta il grafico di f rispetto l'asse delle x lascia invariati i rami "positivi" e ribalta quelli "negativi"



— $y = f(x)$

— $y = |f(x)|$

OSS

- $|x| = |-x|$
- $|x|^2 = x^2$
- $|x+y| \leq |x| + |y|$
- $|-3| = 3 = |3|$
- $|-5| = 5 = |5|$

EQUAZIONI CON $| \ |$

- $\boxed{|x| = k}$

- se $k < 0$ IMPOSSIB. perché $|x| \geq 0$ mentre $k < 0$
- se $k = 0$ $|x| = 0 \iff x = 0$
- se $k > 0$ $|x| = k \iff x = k$ oppure $x = -k$ ossia $\iff x = \pm k$

$\boxed{|f(x)| = k}$

- se $k < 0$ IMPOSSIB.
- se $k = 0$ $|f(x)| = 0 \iff f(x) = 0$
- se $k > 0$ $|f(x)| = k \iff f(x) = k$ oppure $f(x) = -k$ $\iff f(x) = \pm k$

ESEMPI

- $|1 - x| = 0 \iff 1 - x = 0 \iff x = 1$
- $|2x| = 0 \iff 2x = 0 \iff x = 0$
- $|x| = 3 \iff x = \pm 3$
- $|2x - 3| = 0 \iff 2x - 3 = 0 \iff x = \frac{3}{2}$
- $|2x - 3| = -5$ IMPOSSIBILE
- $|5x + 2| = 3 \iff 5x + 2 = \pm 3 \iff \begin{cases} 5x + 2 = 3 \\ 5x + 2 = -3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 5x = 1 \\ 5x = -5 \end{cases} \iff x = \frac{1}{5}$ oppure $x = -1$

DISEQUAZIONI CON $|\cdot|$

$|x| \leq k$

- se $k<0$ IMPOSSIBILE
- se $k \geq 0$

$|x| \leq k \iff -k \leq x \leq k$

ossia nell'intervallo interno $[-k, k]$

$|x| \geq k$

- se $k \leq 0$ SEMPRE SODDISFATTA
- se $k > 0$

$|x| \geq k \iff x \geq k$ oppure $x \leq -k$

ossia negli intervalli esterni $(-\infty, -k] \cup [k, +\infty)$

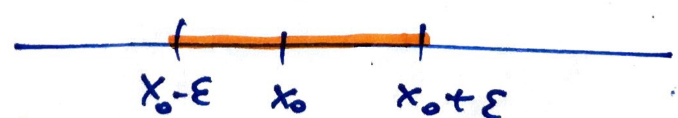
In particolare

$|f(x)| \leq k$
- se $k<0$ IMPOSSIB.
- se $k \geq 0$ $\iff -k \leq f(x) \leq k$

$|f(x)| \geq k$
- se $k \leq 0$ SEMPRE
- se $k>0$ $\iff f(x) \geq k$ oppure $f(x) \leq -k$

INTORNO di un punto x_0

Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, definiamo intorno di centro x_0 e raggio ε l'insieme $I_\varepsilon(x_0) := (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) = \{x \mid |x-x_0|<\varepsilon\}$



Serve ad esprimere il concetto di vicinanza al punto x_0

ESEMPIO $|x| \leq a \iff x \in$

ESEMPI

- $|3x-2| \leq 2 \iff -2 \leq 3x-2 \leq 2$ (intervallo INTERNO)

$$\iff \begin{cases} 3x-2 \leq 2 \\ 3x-2 \geq -2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x \leq 4 \\ 3x \geq 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \leq \frac{4}{3} \\ x \geq 0 \end{cases}$$ CONTEMPORANEAMENTE

Chiamo $S_1 = \{x \leq \frac{4}{3}\}$

$S_2 = \{x \geq 0\}$.

Fare il sistema $\begin{cases} x \leq \frac{4}{3} \\ x \geq 0 \end{cases}$ significa

intersecare l'insieme S_1 con S_2 ossia $S_1 \cap S_2$

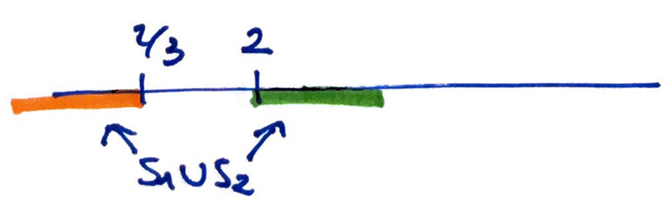
$S_1 \cap S_2 = [0, \frac{4}{3}]$

Quindi $|3x-2| \leq 2 \iff 0 \leq x \leq \frac{4}{3}$

- $|3x-4| \geq 2 \iff 3x-4 \geq 2$ oppure $3x-4 \leq -2$ (INTERV. ESTERNI)

$\iff x \geq \frac{6}{3} = 2$ oppure $x \leq \frac{2}{3}$

STAVOLTA, posto $S_1 = \{x \geq 2\}$ e $S_2 = \{x \leq \frac{2}{3}\}$
devo fare l'UNIONE $S_1 \cup S_2 =]-\infty, \frac{2}{3}] \cup [2, +\infty)$



- $\lim_{x \to +\infty} \frac{|x|}{x+1}$

Osserviamo che $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Siccome $x \to +\infty$, allora x "diventa" positivo da un certo punto in poi

Allora $\lim_{x \to +\infty} \frac{|x|}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

- ANALOGAMENTE $|x| = -x$ se x diventa negativo. Poiché $x \to -\infty$ allora $\lim_{x \to -\infty} \frac{|x|}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x+1} = -1$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{|x-1| + 3}{-x+1} =$

$|x-1| = x-1$ se $x-1 \geq 0$ ossia se $x \geq 1$

Quindi per $x \to +\infty$ $|x-1| = x-1$ mentre

per $x \to -\infty$ $|x-1| = 1-x$

Quindi $\lim_{x \to +\infty} \frac{|x-1|+3}{-x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1+3}{-x+1} = -1$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{|x-1|+3}{-x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1-x+3}{-x+1} = 1$

EQUAZIONI

- $ax=b \iff x=\frac{b}{a}$ se $a\neq 0$

- $ax^2+bx+c=0$

  Trovo $\boxed{\Delta = b^2-4ac}$

- se $\Delta<0$ l'eq. è IMPOSSIBILE
- se $\Delta=0$ l'eq. ha 2 soluzioni coincidenti

  $x_0=\frac{-b}{2a}$ (da contare come "doppia")

- se $\Delta>0$ l'eq. ha 2 sol. reali e distinte

  $$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

SCOMPOSIZIONE

se $\Delta=0$ $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$

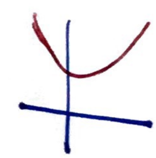
se $\Delta>0$ $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

INTERPRETAZIONE GEOMETRICA

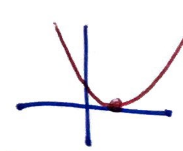
$y=ax^2+bx+c$ è una parabola di vertice

$$V=\left(-\frac{b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

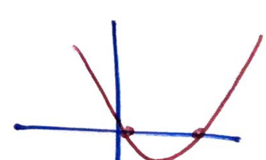
se $\Delta<0$, la parabola non interseca l'asse x



se $\Delta=0$, la parabola è tangente all'asse x nel vertice



se $\Delta>0$, la parabola interseca l'asse x nei due punti di ascisse x_1 e x_2



CASI PARTICOLARI

- $x^2 = k^2 \iff x = \pm k$
- $x^2 - k^2 = (x-k)(x+k)$
- $x^2 + k^2$ non si scompone perché $\Delta < 0$

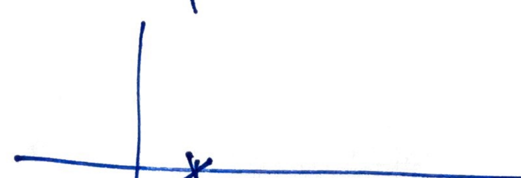
APPLICAZIONE AI DOMINI

- $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$

DOMINIO: $2x - 1 \neq 0$ ossia $x \neq \frac{1}{2}$

Quindi il dominio di f è $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

che possiamo scrivere anche come $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$



$\frac{1}{2}$ lo escludiamo!

- $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ → x^2+1 è SEMPRE > 0 in quanto somma di quadrati e di 1 $(\Delta < 0)$ quindi $x^2+1 \neq 0$ sempre! DOMINIO $\equiv \mathbb{R}$

- $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

DOMINIO: $x^2 - 1 \neq 0$ ossia $x^2 \neq 1$ ossia $x \neq \pm 1$

Dominio $\equiv \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

oppure $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

- $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4x+4}$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 = 16 - 16 = 0$

$\Rightarrow (x^2 - 4x + 4) = (x-2)^2 = 0 \iff x = 2$

DOMINIO $x^2 - 4x + 4 \neq 0 \iff x \neq 2$

ossia il DOMINIO è $\mathbb{R} - \{2\}$

- $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$

$x^2+4 \neq 0$ sempre perché $\Delta = -4 < 0$

$\Rightarrow$ Il DOM. di f è $\mathbb{R}$

- $f(x) = \dfrac{1}{9x^2-4}$

$9x^2-4 \neq 0 \iff 9x^2 \neq 4 \iff x^2 \neq \frac{4}{9} \iff x \neq \pm\frac{2}{3}$

IL DOM. di f è $\mathbb{R} - \{\pm\frac{2}{3}\}$

OSS Se $f(x) = \dfrac{1}{P(x)}$ con P polinomio

e $P(x) \neq 0$ sempre, allora dom $f = \mathbb{R}$

- $f(x) = \dfrac{3x+1}{(x^2+1)(x^2-1)}$

DOMINIO: $(x^2+1)(x^2-1) \neq 0 \iff \begin{cases} x^2+1 \neq 0 \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases} \iff x^2-1 \neq 0 \iff x \neq \pm 1$

perché $x^2+1 \neq 0$ sempre!

IL DOM. di $f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

- $f(x) = \dfrac{1}{x^2-6x+5}$ DOMINIO: $x^2-6x+5 \neq 0$

$\Delta = 36-20 = 16$

Quindi $x^2-6x+5 \neq 0 \iff x_{1/2} \neq \dfrac{6 \pm \sqrt{16}}{2} < {5 \atop 1}$

dom $f = \mathbb{R} - \{1, 5\} = (-\infty, 1) \cup (1, 5) \cup (5, +\infty)$