

$a, b \in \mathbb{R}$ INTERVALLI di $\mathbb{R}$

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- Le parentesi tonde vogliono dire "escluso a " e "escluso b "
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- la parentesi quadra "rivolta verso l'interno" vuol dire "incluso a "

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

↑ escluso ↑ incluso

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

↑ incluso ↑ incluso

(a, b) si dice APERTO

$[a, b]$ si dice CHIUSO

$[a, b)$ chiuso a sinistra
aperto a destra

$(a, b]$ aperto a sinistra
chiuso a destra

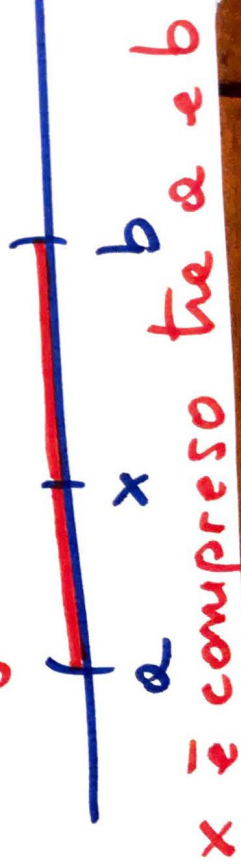
se $a, b \in \mathbb{R}$, gli intervalli visti:

sopra sono tutti **LIMITATI**

nel senso che a "limite dal basso" l'intervallo, mentre

a "limite dall'alto" l'intervallo

in tutti gli intervalli precedenti.



NEL CASO in cui l'intervallo I è
• $[a, b]$ o $[a, b]$

il valore a appartiene all'intervallo
 I ed $\bar{a}$ il più piccolo punto
dell'intervallo I

DIRÒ CHE $a = \min I$

(a è il minimo di I)

• nel caso $I = (a, b]$ o $[a, b]$
il valore b appartiene all'intervallo
 I ed $\bar{b}$ il più grande punto
di I .

DIRÒ CHE $b = \max I$

(b è il massimo di I)

Nel caso in cui $I = (a, b) \cup (a, b]$
il valore a non appartiene a I .
NON POSSO DIRE CHE $a \in \text{IL MINIMO}$
di I .

Dirò che $a = \inf I$
ossia dirò che $a \bar{\in}$ l'ESTREMO
INFERIORE di I .

Nel caso in cui $I = [a, b) \cup (a, b)$
il valore b non appartiene a I .
NON POSSO DIRE CHE $b \bar{\in}$ il MASSIMO
di I .

Dirò che $b = \sup I$ ossia dirò
che $b \bar{\in}$ l'ESTREMO SUPERIORE di I

INTERVALLI ILLIMITATI

Se $a = -\infty$ trovo gli intervalli del tipo

$$(-\infty, b) \text{ o } (-\infty, b]$$



aperto



chiuso

Questi intervalli sono illimitati a sinistra.

Se $b = +\infty$ trovo gli intervalli del tipo

$$(a, +\infty) \text{ o } [a, +\infty).$$



aperto



chiuso

Questi intervalli sono illimitati

a destra.

$$\sup I = b$$

Se considero $I = (-\infty, b)$



$$\inf I = -\infty$$

• $I = (-\infty, b]$



$$\max I = b$$

$$\inf I = -\infty$$

$$(8+8) = 16$$

OSSERVAZIONI FINALI

- (a, b) lo posso scrivere anche $\exists a, b \mid \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- $[a, b)$ lo posso scrivere anche $[a, b \mid$ oppure $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} =]a, +\infty[$
- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} = (-\infty, b[$
- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

INSIEMI LIMITATI

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è tale che $\exists b \in \mathbb{R}$ per

cui $A \subseteq (-\infty, b)$

diciamo che A è limitato superiormente

Se $\exists a \in \mathbb{R}$ tale che

$A \subseteq (a, +\infty)$

diciamo che A è limitato inferiormente

Se $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$A \subseteq (a, b)$

diciamo che A è LIMITATO

Se $\exists a \in A$ tale che

$$\forall x \in A \quad x \geq a$$

dirò che $\min A = a$

ossia dirò che a è il MINIMO
di A

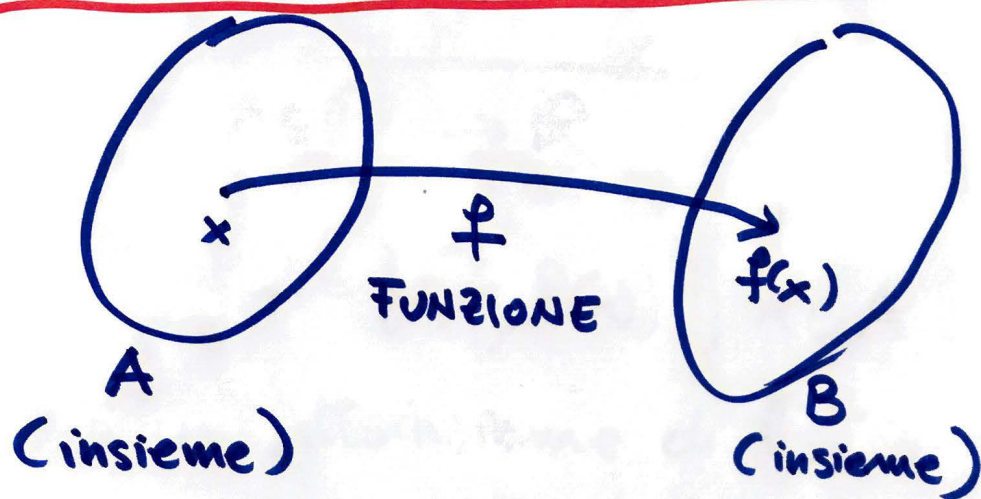
Se $\exists b \in A$ t.c.

$$\forall x \in A \quad x \leq b$$

dirò che $\max A = b$

ossia dirò che b è il MASSIMO
di A

RICAPITOLAZIONE SULLE FUNZIONI



f prende $x \in A$ e gli associa un UNICO $f(x) \in B$.

IMMAGINE di x tramite f

$A \equiv$ dominio di f

$f(A) \equiv$ INSIEME IMMAGINE di A tramite f

Se $B \subseteq \mathbb{R}$, allora $f(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Se $f(A)$ è limitato superiormente
chiamiamo $\sup f := \sup f(A)$

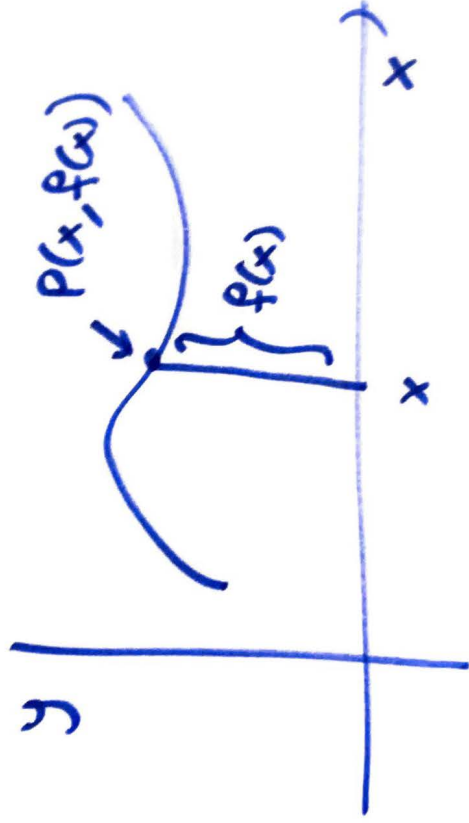
Se $f(A)$ è limitato inferiormente
chiamiamo $\inf f := \inf f(A)$

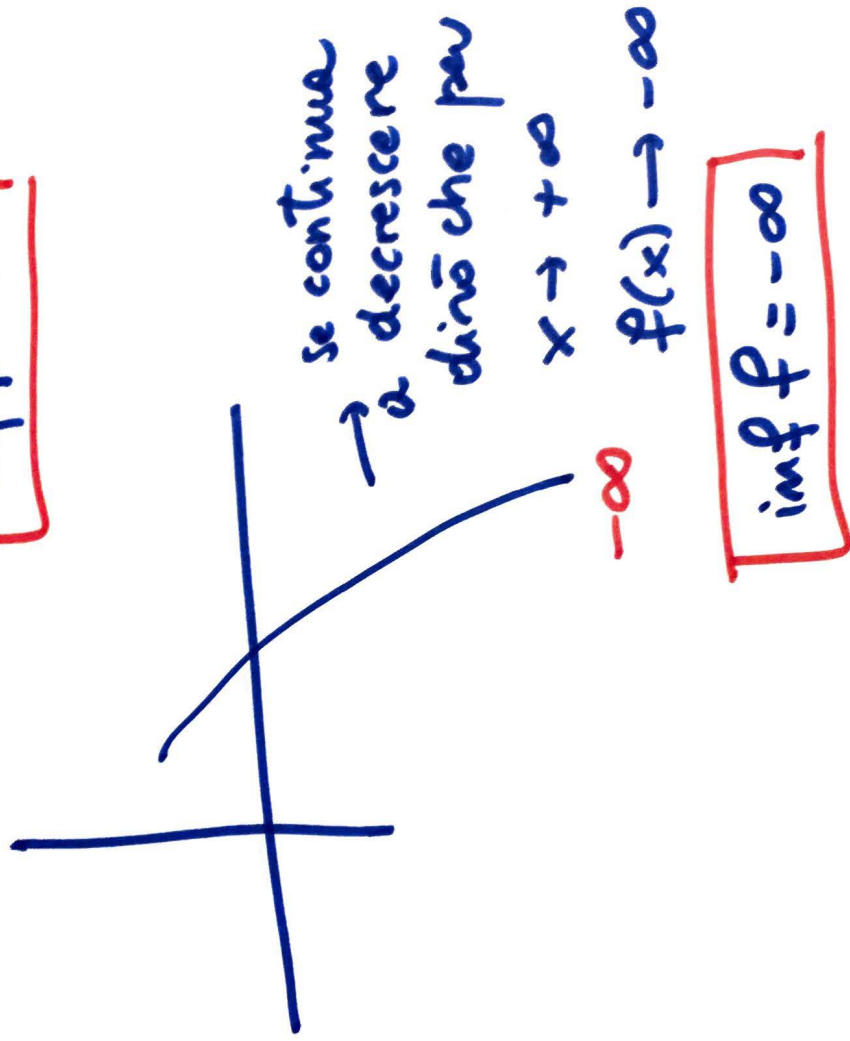
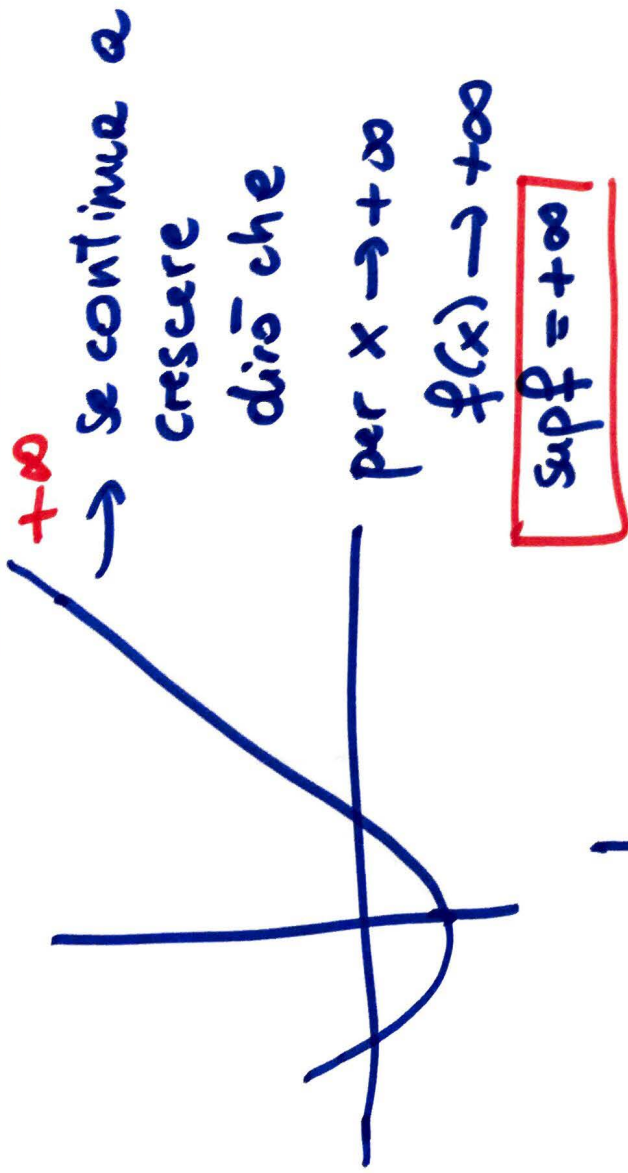
GRAFICO

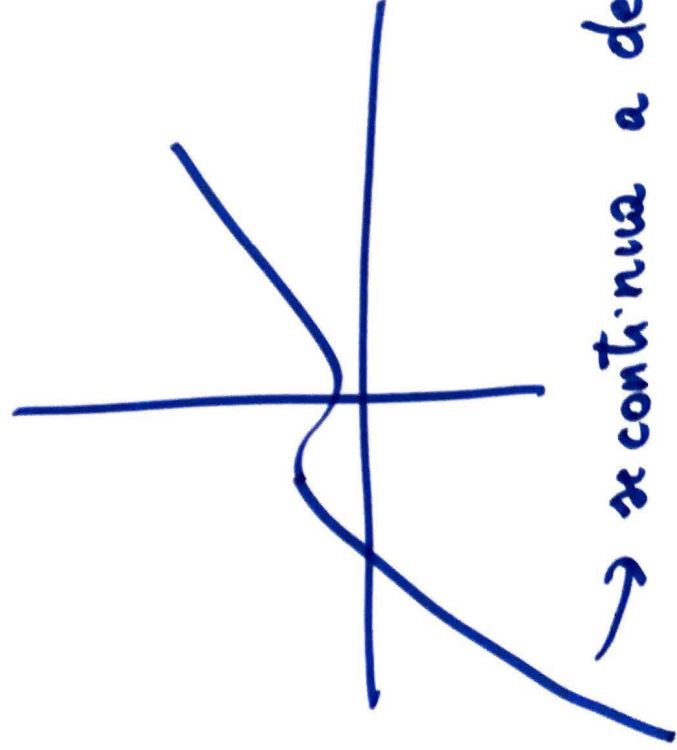
$$\text{Se } f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{il Graf } f := \{ (x, f(x)) \mid x \in A \}$$

è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$

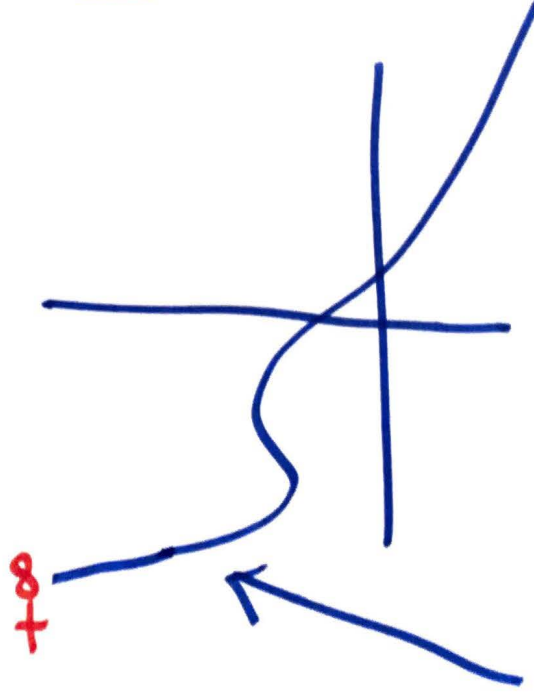






$$\boxed{\inf f = -\infty}$$

→ se continua a decrescere, dirò
che per $x \rightarrow -\infty$ $f(x) \rightarrow -\infty$

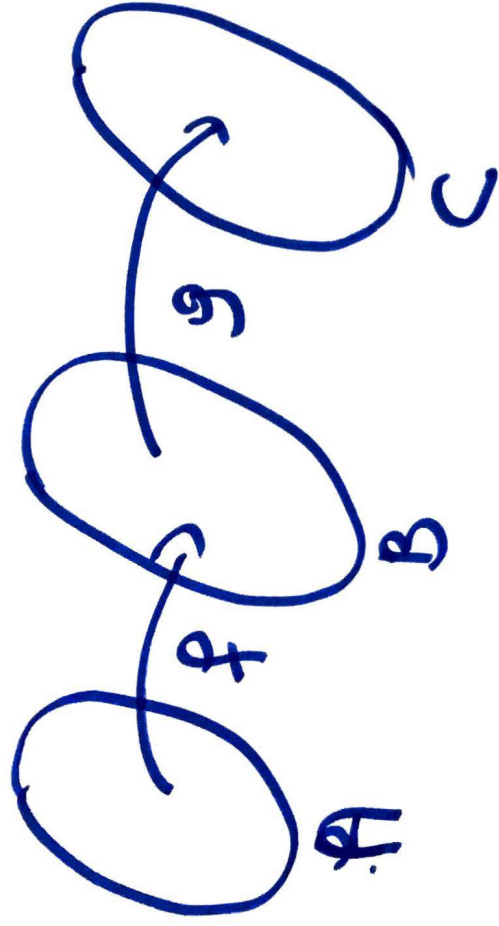


$$\boxed{\sup f = +\infty}$$

Se continua a crescere, dirò che

per $x \rightarrow -\infty$ $f(x) \rightarrow +\infty$

FUNZIONE COMPOSTA



Quando $f(A) \subseteq B$

(ossia $f: A \rightarrow B$)

e $g: B \rightarrow C$

allora possiamo definire

$$g \circ f: A \rightarrow C$$

$\uparrow$
"dopo"

Prima applico f e poi g

POLINOMI

$$p(x) = \underbrace{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0}_{\text{il termine di grado } + \text{ alto}}$$

il termine di grado + alto

COMANDA per $x \rightarrow +\infty$

per $x \rightarrow -\infty$

$k = \text{grado di } p$

Per $x \rightarrow +\infty$

$$p(x) \rightarrow a_k \cdot (+\infty)$$

per $x \rightarrow -\infty$

$$p(x) \rightarrow a_k \cdot (-\infty)^k$$

$+\infty$

$-\infty$

$$p(x) = 3x^2$$

Il dominio di un polinomio

$$\bar{x} \in \mathbb{R}$$

ALGEBRA degli ∞

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$k \cdot (+\infty) = (\text{segno di } k) \cdot \infty$$

$$k \cdot (-\infty) = (\text{segno di } k) \cdot (-\infty)$$

ossia vale la regola del
"prodotto dei segni."

$$\begin{array}{l} + \cdot + = + \\ - \cdot - = + \\ + \cdot - = - \end{array}$$

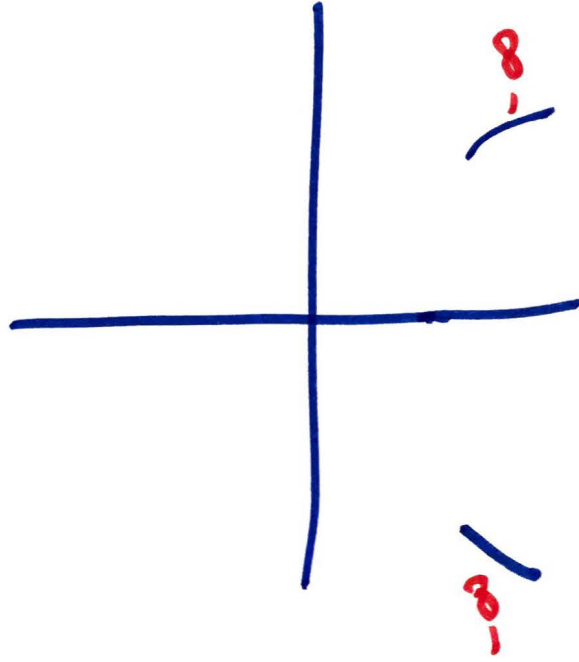
$$k + \infty = +\infty \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

$$k - \infty = -\infty \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

(non sono moltiplicati ma

$\underbrace{\text{sommati}}_{(1 \text{ volta})}$

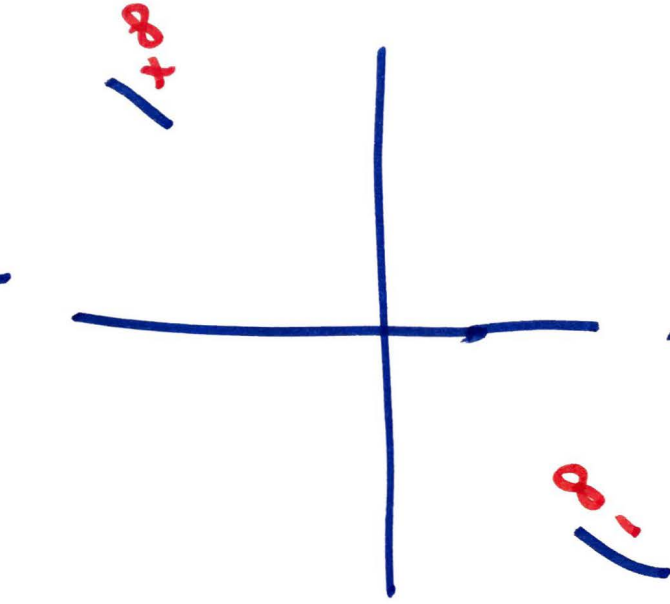
$$\text{oss } \overbrace{(\infty) \cdots (\infty)}^{\text{sommati}} = \overbrace{(-\infty) \cdots (-\infty)}^{\text{sommati}} = \begin{matrix} +\infty \\ +\infty \end{matrix} \quad \forall k \in \mathbb{A}$$



$$p(x) = -2x^2$$

$$p(+\infty) = -2 \cdot (+\infty) = -\infty$$

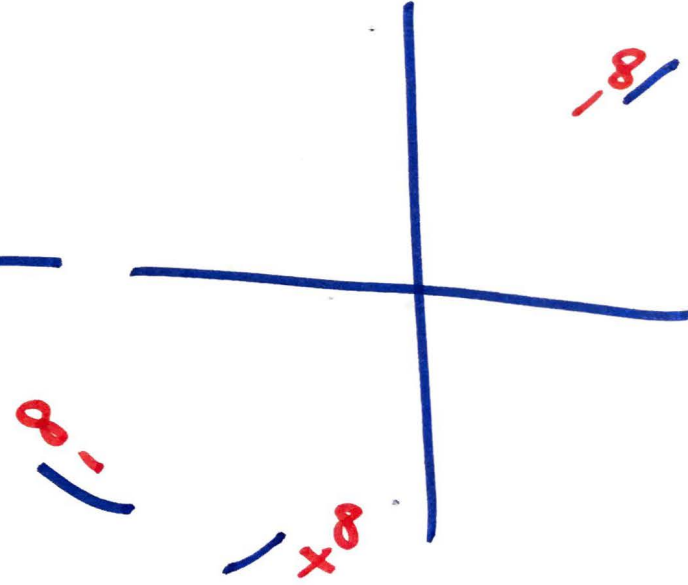
$$p(-\infty) = -2(-\infty)^2 = -\infty$$



$$p(x) = 3x^5$$

$$p(+\infty) = +\infty$$

$$p(-\infty) = 3(-\infty)^5 = -\infty$$



$$p(x) = -4x^3$$

$$p(+\infty) = -\infty$$

$$p(-\infty) = -4(-\infty)^3 = -4(-\infty) = +\infty$$

$$f(x) = \frac{1}{2x-1}$$

$$2x-1 \neq 0$$

$$2x-1 = 0$$

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty)$$