RIASSUNTO SUGLI INTEGRALI INDEFINITI
PER IL CORSO DI LAUREA IN BIOLOGIA

FRANCESCA PRINARI

1. Proprieta' degli integrali.

Per ogni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrabili, vale che

(1) $\int \mathbf{f(x) + g(x) dx} = \int \mathbf{f(x) dx} + \int \mathbf{g(x) dx}$;

(2) $\int \mathbf{af(x) dx} = \mathbf{a} \int \mathbf{f(x) dx}$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Invece, in generale,

$$\int f(x) \cdot g(x) dx \neq \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$$

Applicando le proprieta' (1) e (2) si puo' scrivere

$$\int x + \log x dx = \int x dx + \int \log x dx$$

$$\int \frac{2}{x+1} dx = 2 \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$\int \frac{1}{2(x+1)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx.$$

Attenzione:

$$\int \frac{1}{2x+1} dx \neq \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx.$$

2. Integrali elementari

(1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ per ogni $n \in \mathbb{R}, n \neq -1$;

(2) $\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + c$

(3) $\int e^x dx = e^x + c$

(4) $\int \cos x dx = \sin x + c$

(5) $\int \sin x dx = -\cos x + c$

(6) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$

Le formule precedenti si estendono nel modo seguente:

(1) $\int \mathbf{f'(x)[f(x)]^n dx} = \frac{\mathbf{[f(x)]^{n+1}}}{\mathbf{n+1}} + \mathbf{c}$ per ogni $n \in \mathbb{R}, n \neq -1$;

Esempio 2.1. (a) $\int (2x+1)^3 dx = \frac{1}{2} \int 2(2x+1)^3 dx = \frac{1}{2} \frac{(2x+1)^4}{4} + c;$

(b) $\int \frac{1}{(3x+1)^2} dx = \frac{1}{3} \int 3 \cdot (3x+1)^{-2} dx = \frac{1}{3} \frac{(3x+1)^{-2+1}}{-2+1} + c;$

(c) $\int \sqrt{3x+1} dx = \frac{1}{3} \int 3(3x+1)^{1/2} dx = \frac{1}{3} \frac{(3x+1)^{1+1/2}}{1+1/2} + c = \frac{2}{9}(3x+1)^{3/2} + c;$

(d) $\int \frac{1}{\sqrt{3x+1}} dx = \frac{1}{3} \int 3(3x+1)^{-1/2} dx = \frac{1}{3} \frac{(3x+1)^{-1/2+1}}{-1/2+1} + c = \frac{2}{3}\sqrt{3x+1} + c$

(e) $\int \frac{e^x}{(4e^x+3)^3} dx = \frac{1}{4} \int 4e^x \cdot (4e^x+3)^{-3} dx = \frac{1}{4} \frac{(4e^x+3)^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{1}{16}(4e^x+3)^{-2} + c;$

(f) $\int \frac{\log x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \cdot \log x dx + c = \frac{\log^2 x}{2} + c;$

(g) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx = \frac{\arctan^2 x}{2} + c.$

(2) $\int \mathbf{\frac{f'(x)}{f(x)} dx} = \log |\mathbf{f(x)}| + \mathbf{c}$

Esempio 2.2. (a) $\int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \log|2x+1| + c;$

(b) $\int \frac{x}{2x^2+1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x}{2x^2+1} dx = \frac{1}{4} \log|2x^2+1| + c;$

(c) $\int \frac{1}{x \log x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\log x} dx = \log|\log x| + c;$

(d) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \log|e^x+1| + c;$

(e) $\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan x} dx = \int \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x} dx = \log|\arctan x| + c;$

(f) $\int \frac{x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \log|1+x^4| + c = \frac{1}{4}\log(1+x^4) + c.$

(3) $\int \mathbf{f'(x) e^{f(x)} dx} = \mathbf{e^{f(x)}} + \mathbf{c}$

Esempio 2.3. (a) $\int e^{-x} dx = (-1) \int (-1) e^{-x} dx = -e^{-x} + c$

(b) $\int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

(c) $\int a^x dx = \int e^{x \log a} dx = \frac{1}{\log a} \int \log a \cdot e^{x \log a} dx = \frac{e^{x \log a}}{\log a} + c = \frac{a^x}{\log a} + c$

(d) $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int 3e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} + c.$

(4) $\int \mathbf{f'(x)} \cos \mathbf{f(x) dx} = \sin \mathbf{f(x)} + \mathbf{c}$

(5) $\int \mathbf{f'(x)} \sin \mathbf{f(x) dx} = -\cos \mathbf{f(x)}$

(6) $\int \frac{\mathbf{f'(x)}}{\mathbf{1+[f(x)]^2}}\mathbf{dx} = \arctan \mathbf{f(x)} + \mathbf{c}$

Esempio 2.4. (a) $\int \frac{1}{1+9x^2}dx = \int \frac{1}{1+(3x)^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{1+(3x)^2}dx = \frac{1}{3}\arctan 3x + c;$

(b) $\int \frac{1}{4+x^2}dx = \int \frac{1}{4(1+\frac{x^2}{4})}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(\frac{x}{2})^2}dx = \frac{2}{4}\int \frac{\frac{1}{2}}{1+(\frac{x}{2})^2}dx = \frac{1}{2}\arctan \frac{x}{2};$

(c) $\int \frac{x}{x^4+1}dx = \int \frac{x}{(x^2)^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(x^2)^2+1}dx = \frac{1}{2}\arctan x^2 + c;$

(d) $\int \frac{1}{1+(3x+1)^2}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3}{1+(3x+1)^2}dx = \frac{1}{3}\arctan(3x+1) + c.$

2.1. **Esercizi proposti.**

(1) $\int (5x+2)^3 dx;$

(2) $\int \frac{1}{(5x+1)^2}dx;$

(3) $\int \sqrt{4x+1}dx;$

(4) $\int \frac{1}{\sqrt{2x+5}}dx$

(5) $\int \frac{e^x}{(6e^x+1)^4}dx$

(6) $\int \frac{\log^2 x}{x}dx;$

(7) $\int \frac{\arctan^3 x}{1+x^2}dx.$

(8) $\int \frac{1}{3x+2}dx;$

(9) $\int \frac{x}{4x^2+1}dx;$

(10) $\int \frac{1}{x\log^2 x}dx;$

(11) $\int \frac{e^x}{2e^x-1}dx;$

(12) $\int \frac{1}{(1+x^2)\arctan^2 x}dx;$

(13) $\int \frac{x^4}{x^5+1}dx.$

(14) $\int \frac{1}{e^x}dx$

(15) $\int e^{-2x}dx$

(16) $\int e^{-2x+3}dx$

(17) $\int e^{-x+1}dx$

(18) $\int \frac{1}{1+16x^2}dx$;

(19) $\int \frac{1}{9+x^2}dx$;

(20) $\int \frac{1}{1+(5x+2)^2}dx$.

3. Integrali delle funzioni razionali fratte

Distinguiamo i seguenti casi:

(1)
$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ax+b}}\mathbf{dx} = \frac{\log|\mathbf{ax+b}|}{\mathbf{a}};$$

(2)
$$\int \frac{\mathbf{Ax+B}}{\mathbf{ax+b}}\mathbf{dx}$$

in questo caso occorre dividere numeratore per il denominatore. Se $Q, R \in \mathbb{R}$ sono, rispettivamente, quoziente e resto della divisione, allora

$$\int \frac{Ax+B}{ax+b}dx = \int Q + \frac{R}{ax+b}dx = Qx + R\int \frac{1}{ax+b}dx = Qx + \frac{R}{a}\int \frac{a}{ax+b}dx$$
$$= Qx + \frac{R}{a}\log|ax+b| + c$$

Esempio 3.1. $\int \frac{2x+3}{5x+1}dx = \int \frac{2}{5} + \frac{\frac{13}{5}}{5x+1}dx = \frac{2}{5}x + \frac{13}{25}\log|5x+1| + c$.

(3)
$$\int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ax^2+bx+c}}\mathbf{dx}$$

occorre distinguere i seguenti casi

- $\Delta > 0$: in questo caso esistono due radici x_1, x_2 reali e distinte tali che il trinomio ax^2+bx+c si fattorizza come $a(x-x_1)(x-x_2)$. In qesto caso si cercano $A, B \in \mathbb{R}$ tali che
$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$$
e l'integrale si calcola nel modo seguente:
$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = A\log|x-x_1| + B\log|x-x_2| + c.$$

- $\Delta = 0$: in questo caso esistono due radici $x_1 = x_2$ reali e coincidenti tali che il trinomio $ax^2 + bx + c$ si fattorizza come $a(x - x_1)^2$. Quindi l'integrale si puo' riscrivere come
$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}dx = \int \frac{1}{a(x - x_1)^2} = -\frac{1}{a}(x - x_1)^{-2+1} + c.$$

- $\Delta < 0$: in questo caso
  - si puo' usare la formula
$$\frac{1}{ax^2 + bx + c} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan \frac{2ax + b}{\sqrt{-\Delta}} + c;$$
  - oppure cercare di scrivere il denominatore come
$$ax^2 + bx + c = C(1 + (AX + B)^2)$$
  e calcolare l'integrale nel modo seguente:
$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}dx = \frac{1}{C} \int \frac{1}{1 + (AX + B)^2}dx = \frac{1}{AC} \arctan(AX + B) + c$$

(4)
$$\int \frac{\mathbf{Ax + B}}{\mathbf{ax^2 + bx + c}}\mathbf{dx}$$

In questo caso si cerca di scrivere l'integrale nel modo seguente:
$$\int \frac{\mathbf{Ax + B}}{\mathbf{ax^2 + bx + c}}\mathbf{dx} = \mathbf{M} \int \frac{\mathbf{2ax + b}}{\mathbf{ax^2 + bx + c}}\mathbf{dx} + \mathbf{N} \int \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ax^2 + bx + c}}\mathbf{dx}$$

(e applicare la formula $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx = \log|ax^2 + bx + c| + c$ per calcolare il primo integrale).

Esempio 3.2. $\int \frac{x+3}{5x^2+x+1}dx$. *Poiche' la derivata di* $5x^2 + x + 1$ *é* $10x + 1$*,*
(a) *prima moltiplichiamo e dividiamo l'integrale per* 10
(b) *poi aggiungiamo e sottraiamo* 1
ossia
$$\int \frac{x + 3}{5x^2 + x + 1}dx = \frac{1}{10} \int \frac{10(x + 3)}{5x^2 + x + 1}dx = \frac{1}{10} \int \frac{10x + 1 - 1 + 30}{5x^2 + x + 1}dx$$
$$= \frac{1}{10} \int \frac{10x + 1 + 29}{5x^2 + x + 1}dx = \frac{1}{10} \int \frac{10x + 1}{5x^2 + x + 1}dx + \frac{29}{10} \int \frac{1}{5x^2 + x + 1}dx$$
$$= \frac{1}{10} \log|5x^2 + x + 1| + \frac{29}{5\sqrt{19}} \arctan \frac{10x + 1}{\sqrt{19}}.$$

Esempio 3.3. $\int \frac{3x+2}{x^2+5x+6}dx$. *Poiche' la derivata di* $x^2 + 5x + 6$ *é* $2x + 5$*,*
(a) *prima mettiamo in evidenza il* 3 *a numeratore;*
(b) *poi moltiplichiamo e dividiamo l'integrale per* 2
(c) *infine aggiungiamo e sottraiamo* 5

ossia

$$\int \frac{3x+2}{x^2+5x+6}dx = 3\int \frac{x+\frac{2}{3}}{x^2+5x+6}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2(x+\frac{2}{3})}{x^2+5x+6}dx$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+5-5+\frac{4}{3}}{x^2+5x+6}dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+5}{x^2+5x+6}dx + \frac{3}{2}\int \frac{-5+\frac{4}{3}}{x^2+5x+6}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\log|x^2+5x+6| - \frac{11}{2}\int \frac{1}{x^2+5x+6}dx =$$

$$= \frac{3}{2}\log|x^2+5x+6| - \frac{11}{2}\left[\int \frac{1}{x+2}dx - \int \frac{1}{x+3}dx\right] =$$

$$= \frac{3}{2}\log|x^2+5x+6| - \frac{11}{2}\log|x+2| + \frac{11}{2}\log|x+3| + c.$$

(5)

$$\int \frac{\mathbf{p_n(x)}}{\mathbf{ax^2+bx+c}}\mathbf{dx}$$

dove p_n é un polinomio di grado $n \geq 2$. In questo caso occorre dividere il numeratore per il denominatore. Se $Q(x)$ é il polinomio quoziente e $R(x)$ é il polinomio resto (con grado di R minore o uguale a 1) allora

$$\int \frac{\mathbf{p_n(x)}}{\mathbf{ax^2+bx+c}}\mathbf{dx} = \int \mathbf{Q(x)} + \frac{\mathbf{R(x)}}{\mathbf{ax^2+bx+c}}\mathbf{dx}$$

dove il secondo integrale rientra nei casi gia' affrontati.

3.1. **Esercizi proposti.**

(1) $\int \frac{1}{4x+1}dx$

(2) $\int \frac{1}{4x+3}dx$

(3) $\int \frac{1}{-2x+3}dx$

(4) $\int \frac{3x+1}{4x-5}dx$

(5) $\int \frac{2x+3}{-2x+3}dx$

(6) $\int \frac{1}{25x^2+1}dx$

(7) $\int \frac{1}{25x^2-1}dx$

(8) $\int \frac{1}{x^2+25}dx$

(9) $\int \frac{1}{x^2-25}dx$

(10) $\int \frac{1}{25x^2+16}dx$

(11) $\int \frac{1}{25x^2-16}dx$

(12) $\int \frac{1}{16x^2+25} dx$

(13) $\int \frac{1}{16x^2-25} dx$

(14) $\int \frac{1}{2x^2+3} dx$

(15) $\int \frac{1}{5x^2+3} dx$

(16) $\int \frac{1}{9x^2+1} dx$

(17) $\int \frac{1}{9x^2-1} dx$

(18) $\int \frac{1}{x^2+16} dx$

(19) $\int \frac{1}{x^2-16} dx$

(20) $\int \frac{1}{9x^2+4} dx$

(21) $\int \frac{1}{9x^2-4} dx$

(22) $\int \frac{1}{9x^2+25} dx$

(23) $\int \frac{1}{9x^2-25} dx$

(24) $\int \frac{1}{4x^2+12x+9} dx$

(25) $\int \frac{1}{4x^2+12x+10} dx$

(26) $\int \frac{1}{x^2+7x+12} dx$

(27) $\int \frac{1}{x^2+3x-10} dx$

(28) $\int \frac{1}{x^2+4x+5} dx$

(29) $\int \frac{1}{x^2+6x+10} dx$

(30) $\int \frac{1}{25x^2+16} dx$

(31) $\int \frac{1}{25x^2-16} dx$

(32) $\int \frac{3x+1}{4x^2+12x+9} dx$

(33) $\int \frac{3x+5}{4x^2+12x+10} dx$

(34) $\int \frac{4x+3}{x^2+7x+12} dx$

(35) $\int \frac{5x^2+1}{x^2+3x-10}dx$

(36) $\int \frac{3x+5}{x^2+4x+5}dx$

(37) $\int \frac{3x^2+4x+1}{x^2+6x+10}dx$

(38) $\int \frac{2x+3}{25x^2+16}dx$

(39) $\int \frac{3x^2+4}{25x^2-16}dx$

(40) $\int \frac{x^3+4x}{x^2+7x+6}dx$

(41) $\int \frac{2x^4+5x^3+x+1}{x^2+7x+8}dx.$

(42) $\int \frac{3x^2+4x+1}{x^2+6x+10}dx$

(43) $\int \frac{2x^3+1}{25x^2+10x+2}dx$

(44) $\int \frac{3x^2+4}{9x^2+6x+1}dx$

(45) $\int \frac{x^3+4x}{x^2+10x+29}dx.$

4. Integrazione per parti

Se f, g sono due funzioni derivabili con derivate continue sull'intervallo I vale la seguente formula che

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

In particolare se $[a, b] \subset I$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

La funzione f nelle formule precedenti si chiama *fattore finito* ed e' quello che viene derivato mentre g si chiama *fattore differenziale* ed e' quello che viene integrato.

Nell'integrazione per parti occorre quindi identificare la funzione che va integrata e quella che viene derivata. Si ricorre all'integrazione per parti nel caso di integrali del seguente tipo:

(1)
$$\int P_n(x)\log x dx, \qquad \int P_n(x)\arctan x dx$$

dove P_n é un polinomio di grado n. In questi due casi si sceglie il polinomio P_n come funzione da integrare e si deriva il $\log x$ (ottenendo $\frac{1}{x}$) o l'$\arctan x$ (ottenendo $\frac{1}{1+x^2}$). Dopo di che resta da integrare una funzione razionale fratta.

Questo tipo di integrazione per parti si applica anche nel caso degli integrali del tipo

$$\int P_n(x)\log^m x dx$$

(dove $m \in \mathbb{N}$) e agli integrali del tipo

$$\int P_n(x)\log Q(x)dx, \quad \int P_n(x)\arctan Q(x)dx$$

dove P_n é un polinomio di grado n e Q é una funzionale razionale fratta.

Esempio 4.1. (a) $\int \log x dx = \int 1 \cdot \log x dx = x \cdot \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$
$= x\log x - \int dx = x\log x - x + c;$

(b) $\int \arctan x dx = \int 1 \cdot \arctan x dx = x \cdot \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$
$= x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + c;$

(c) $\int x\log^2 x dx = \int x \cdot \log^2 x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \log^2 x - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2\log x \frac{1}{x} dx$
$= \frac{x^2}{2}\log^2 x - \int x \cdot \log x dx == \frac{x^2}{2}\log^2 x - \frac{x^2}{2}\log x + \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$
$= \frac{x^2}{2}\log^2 x - \frac{x^2}{2}\log x + \frac{x^2}{4} + c;$

(d) $\int x\log\frac{x-1}{x+1} dx = \frac{x^2}{2}\log\frac{x-1}{x+1} - \int \frac{x^2}{2}\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} dx$
$= \frac{x^2}{2}\log\frac{x-1}{x+1} - \int \frac{x^2}{x^2-1} dx = \frac{x^2}{2}\log\frac{x-1}{x+1} - x - \int \frac{1}{x^2-1} dx$
$\frac{x^2}{2}\log\frac{x-1}{x+1} - x - (\frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1} dx)$
$= \frac{x^2}{2}\log\frac{x-1}{x+1} - x - \frac{1}{2}\log|x-1| + \frac{1}{2}\log|x+1| + c;$

(e) $\int \log(x^2+4) dx = x \cdot \log(x^2+4) - \int x \cdot \frac{2x}{x^2+4} dx$
$= x \cdot \log(x^2+4) - 2\int \frac{x^2}{x^2+4} dx = x \cdot \log(x^2+4) - 2\int 1 - \frac{4}{x^2+4} dx$
$= x\log(x^2+4) - 2x + 2\int \frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1} dx = x\log(x^2+4) - 2x + 4\arctan\frac{x}{2} + c;$

(f) $\int x\arctan\frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2}\arctan\frac{1}{x} - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} \cdot (-\frac{1}{x^2}) dx$
$= \frac{x^2}{2}\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} dx = \frac{x^2}{2}\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$
$= \frac{x^2}{2}\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\int 1 - \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2}\arctan\frac{1}{x} + \frac{1}{2}(x - \arctan x) + c.$

(2)

$$\int P_n(x)e^{\alpha x} dx$$

dove P_n é un polinomio di grado n e $\alpha \in \mathbb{R}$. In questo caso si integra invece $e^{\alpha x}$ (ottenendo $\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$) e si deriva il polinomio P_n ottenendo un polinomio P_{n-1} di grado $n-1$. Si ottiene cosi'

$$\int P_n(x)e^{\alpha x} dx = P_n(x)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} - \int P_{n-1}(x)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$$

e si riapplica l'integrazione per parti sull'integrale $\int P_{n-1}(x)\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$ procedendo come prima: ad ogni passo si abbassa il grado del polinomio fino a ottenere un polinomio di grado 1.

Esempio 4.2. (a) $\int xe^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$
(b) $\int x^2 e^{-2x} dx = x^2\frac{e^{-2x}}{-2} - \int 2x\frac{e^{-2x}}{-2} dx = -x^2\frac{e^{-2x}}{2} + \int xe^{-2x} dx$
$= -x^2\frac{e^{-2x}}{2} - x\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x} dx == -x^2\frac{e^{-2x}}{2} - x\frac{e^{-2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{-2x}$

(3)
$$\int P_n(x)\cos x dx, \quad \int P_n(x)\sin x dx$$
dove P_n é un polinomio di grado n. In questo caso si sceglie il polinomio P_n come funzione da integrare, ottenendo un polinomio P_{n+1} di grado $n+1$, e si deriva la funzione trigonometrica $\cos x$ o $\sin x$.

Esempio 4.3. $\int x\sin x dx = -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + c$

4.1. **Esercizi proposti.**

(1) $\int x^2 \log x dx$

(2) $\int x \log^3 x dx$

(3) $\int x \log(x^2 - 4x + 5)dx$

(4) $\int x \log(4x^2 - 9)dx$

(5) $\sqrt{x} \log x dx$

(6) $\int x^2 e^{2x} dx$

(7) $\int (2x-1)e^{-x} dx$

(8) $\int xe^{3x} dx$

(9) $\int x \arctan(2x)dx$

(10) $\int x^3 \arctan(2x)dx$

(11) $\int x \cos x dx$

(12) $\int x \sin 3x dx$

(13) $\int x^2 \sin x dx$

5. Integrazione per sostituzione

Dato un integrale
$$\int f(x)dx$$
con f continua, quando si effettua la sostituzione $x = g(t)$ con g derivabile con derivata continua, occorre calcolare il differenziale $dx = g'(t)dt$ e sostituire nell'integrale x con $g(t)$ e dx con $g'(t)dt$: l'integrale diventa cosi'
$$\int f(g(t))g'(t)dt.$$

Dopo aver calcolato l'integrale rispetto alla nuova incognita t, si ritorna "indietro" tramite la trasformazione $t = g^{-1}(x)$.

Di fatti, applicheremo l'integrazione per sostituzione per trasformare alcuni integrali in cui compaiono radici, esponenziali o logaritmi in integrali di funzioni razionali fratte.

Esempio 5.1. (1) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-4}dx$: tramite la sostituzione $e^x = t$ otteniamo $x = \log t$ e $dx = \frac{1}{t}dt$. Otteniamo

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-4}dx = \int \frac{t^2-1}{t(t-4)}dt = \int 1 + \frac{4t-1}{t(t-4)}dt =$$

$$= t + \int \frac{1}{4t} + \frac{15}{4(t-4)}dt = t + \frac{1}{4}\log|t| - \frac{15}{4}\log|t-4| + c$$

$$= t + \int \frac{1}{4t} + \frac{15}{4(t-4)}dt = e^x + \frac{1}{4}x + \frac{15}{4}\log|e^x-4| + c;$$

(2) $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{x+2\sqrt{x+1}+2}dx$: tramite la sostituzione $\sqrt{x+1} = t$ otteniamo $x+1 = t^2$ e $dx = 2tdt$. Otteniamo

$$\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{x+2\sqrt{x+1}+2}dx = \int \frac{t+2}{t^2-1+2t+2}2tdt = 2\int \frac{t^2+2t}{t^2+2t+1}dt$$

$$= \int 1 - \frac{1}{(t+1)^2}dt = t + \frac{1}{t+1} + c = \sqrt{x+1} + \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} + c$$

(3) $\int \frac{\log x - 2}{x(4\log x^2 - 9)}dx$: tramite la sostituzione $\log x = t$ otteniamo $x = e^t$ e $dx = e^t dt$. Otteniamo

$$\int \frac{\log x - 2}{x(4\log^2 x - 9)}dx = \int \frac{t-2}{e^t(4t^2-9)}e^t dt = \frac{1}{8}\int \frac{8t-16}{4t^2-9}dt$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{8t-9}{4t^2-9}dt - \frac{7}{8}\int \frac{1}{4t^2-9}dt = \frac{1}{8}\log|4t^2-9| - \frac{7}{48}\int \frac{1}{2t-3} - \frac{1}{2t+3}dt$$

$$= \frac{1}{8}\log|4t^2-9| - \frac{7}{48}\log|\frac{2t-3}{2t+3}| + c = \frac{1}{8}\log|4\log^2 x - 9| - \frac{7}{48}\log|\frac{2\log x - 3}{2\log x + 3}| + c;$$

(4) $\int \sqrt{2e^x-1}dx$: tramite la sostituzione $e^x = t$ otteniamo $x = \log t$ e $dx = \frac{1}{t}dt$. Da cui

$$\int \sqrt{2e^x-1}dx = \int \frac{\sqrt{2t-1}}{t}dt.$$

Ora tramite la sostituzione $\sqrt{2t-1} = z$ otteniamo $2t-1 = z^2$ e $dt = zdz$. Cosi'

$$\int \sqrt{2e^x-1}dx = \int \frac{\sqrt{2t-1}}{t}dt = \int \frac{z}{z^2+1}zdz = \int 1 - \frac{1}{1+z^2}dz = z - \arctan z + c$$

$$= \sqrt{2t-1} - \arctan\sqrt{2t-1} + c = \sqrt{2e^x-1} - \arctan\sqrt{2e^x-1} + c;$$

(5) $\int \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}-1}dx$: tramite la sostituzione $\sqrt[4]{x}=t$ otteniamo $x=t^4$ da cui $dx=4t^3dt$. Cosi'

$$\int \frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt{x}-1}dx = 4\int \frac{t-1}{t^2-1}t^3dt = 4\int \frac{t^3}{t+1}dt =$$

$$= 4\int t^2-t+1-\frac{1}{t+1}dt = 4(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\log|t+1|+c) = 4(\frac{\sqrt[4]{x^3}}{3}-\frac{\sqrt[4]{x^2}}{2}+\sqrt[4]{x}-\log|\sqrt[4]{x}+1|+c).$$

5.1. **Esercizi proposti.**

(1) $\int \frac{e^{2x}+e^x}{e^x+3}dx$

(2) $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}dx$

(3) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+5e^x+6}dx$

(4) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+5e^x+6}dx$

(5) $\int \frac{e^{2x}}{e^{4x}+4e^{2x}+4}dx$

(6) $\int \frac{3\log x+2}{x(\log x^2+4)}dx$

(7) $\int \frac{\sqrt{4\log x-9}}{x}dx$

(8) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{\sqrt[2]{x}-9}dx$

(9) $\int \frac{\sqrt[6]{x}+1}{\sqrt[3]{x}-9}dx$

(10) $\int \frac{\sqrt{2x+3}}{x-3}dx$

(11) $\int \arctan\sqrt{x}dx$

(12) $\int \frac{1}{x^2}\arctan\frac{2}{\sqrt{x}}dx$

(13) $\int e^x\log(e^{2x}-1)dx$

(Francesca Prinari) Dipartimento di Matematica, Universitá di Ferrara
Email address, Francesca Prinari: francesca.prinari@unife.it