LEZIONI DI MATEMATICA
PER IL CORSO DI LAUREA IN BIOLOGIA

FRANCESCA PRINARI

Contents

Preliminary version – October 27, 2019 – 14:52

1. L'insieme dei numeri reali.

1.1. Simboli. se A é un insieme, scriveremo

- $x \in A$ per dire che x **appartiene** ad A;
- $x \notin A$ per dire che x **non appartiene** ad A;
- $\forall x \in A$ per dire "per ogni $x \in A$";
- $\exists x \in A$ per dire "esiste $x \in A$";
- $\nexists x \in A$ per dire "non esiste $x \in A$";
- indicheremo con $\emptyset$ l'insieme vuoto;

Se A e B sono due insiemi

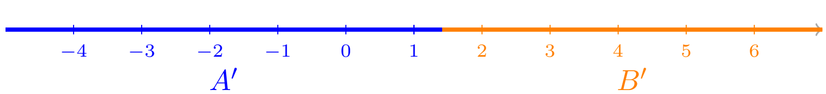
- scriveremo $A \subseteq B$ per dire che A é contenuto in B;
- indicheremo con $A \cap B$ l'insieme **intersezione** di A e B, ossia l'insieme costituito dai punti comuni ad A e B;
- indicheremo con $A \cup B$ l'insieme **unione** di A e B, ossia l'insieme costituito dai punti che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B;
- indicheremo con $A \times B$ l'insieme **prodotto cartesiano** di A e B, ossia l'insieme
$$A \times B := \{(a, b)\ a \in A, b \in B\}.$$
se $A = B$ indicheremo con $A^2 := A \times A$.

1.2. Notazioni. Indicheremo con
$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3 \cdots, \}$$
l'insieme dei numeri **naturali**;
$$\mathbb{Z} := \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$
l'insieme dei numeri **interi**;
$$\mathbb{Q} := \{\frac{n}{m};\, n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$$
l'insieme dei numeri **razionali**.

Se rappresentiamo su una retta tali insiemi (scegliendo un'origine 0 ed una unità di misura) si ha che $\mathbb{Q}$ non copre tutta la retta (sebbene sia "denso" sulla retta ossia é sempre possibile trovare un numero razionale tra due punti qualunque della retta).

1.3. I buchi lasciati da $\mathbb{Q}$!!!

Esempio 1.1. Sia
$$A := \{x \in \mathbb{Q} : x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\,, x^2 < 2\}$$
e
$$B = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\,, x^2 > 2\}.$$
Allora per ogni $a \in A$ e $b \in B$ vale che $a \leq b$. Infatti
$$A \subseteq A', \quad B \subseteq B'$$
dove A' e B' sono rappresentati da



Inoltre

$$A \cup B = \mathbb{Q} \text{ e } A \cap B = \emptyset.$$

I due insiemi sono tali da essere separati da un punto della retta che deve soddisfare $x^2 = 2$.

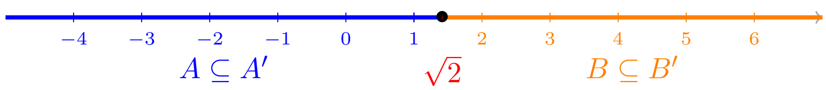
Si dimostra che tale punto non può appartenere a $\mathbb{Q}$: (non dimostrato in classe: se infatti $x = \frac{m}{n}$ con $m, n \in N$ e primi tra loro (ossia senza divisori comuni oltre ad 1), allora

$$m^2 = 2n^2 \implies m \text{ é pari} \implies m = 2k \implies m^2 = 4k^2$$

$$\implies 4k^2 = 2n^2 \implies n^2 = 2k^2 \implies n \text{ é pari}$$

Quindi m, n non sarebbero più primi tra di loro.)

Si definisce $\sqrt{2}$ questo punto e si dice che $\sqrt{2}$ appartiene all'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.



L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ é quell'ampliamento di $\mathbb{Q}$ che mette in corrispondenza (in modo unico) ogni punto della retta con un numero e viceversa.

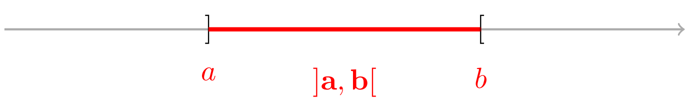
Si dice che $\mathbb{R}$ ha la proprietà del "continuo" (=non ha "buchi").

1.4. Intervalli limitati.

Definizione 1.2. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si definisce* **intervallo aperto** *di estremi a e b l'insieme*

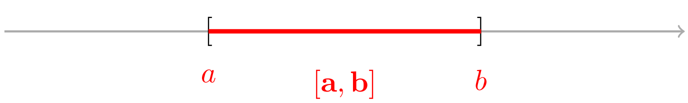
$$(a, b) =]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

Tale intervallo si indica anche come $]a, b[$.



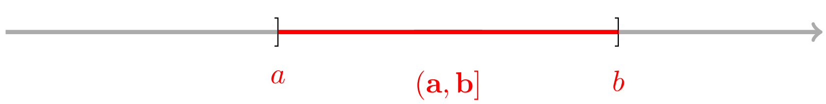
Definizione 1.3. *Si definisce* **intervallo chiuso** *di estremi a e b l'insieme*

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$



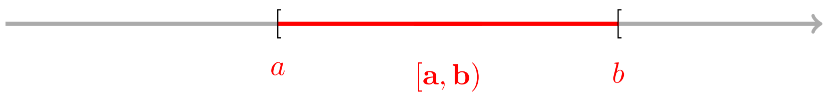
Si possono inoltre definire intervalli **aperti a sinistra e chiusi a destra**, ossia intervalli del tipo

$$]a, b] (= (a, b]) := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$



e intervalli **chiusi a sinistra e aperti a destra**, ossia intervalli del tipo

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$



Gli intervalli introdotti finora sono **limitati sia dall'alto che dal basso** nel senso che ci sono due valori reali (a e b) che limitano (rispettivamente) dal basso e dall'alto gli elementi x che stanno nell'intervallo.

1.5. **Massimo o estremo superiore?** Se consideriamo gli intervalli I del tipo (a, b) o $[a, b)$ si ha che

(1) b **limita dall'alto l'insieme** I ossia $x \leq b$ **per ogni** $x \in I$;
(2) b **é il piú piccolo** numero reale che ha questa proprietá.

Il punto b viene detto **l'estremo superiore** dell'insieme I e si scrive

$$b = \sup I.$$

Se consideriamo gli intervalli I del tipo $(a, b]$ o $[a, b]$ si ha che

- b **limita dall'alto l'insieme** I
- $b \in I$ ossia **appartiene ad** I. In particolare é il più piccolo numero reale che limita dall'alto I.

Si dice che b é il **massimo** dell'insieme I e si scrive

$$b = \max I.$$

Si osservi che il max é un sup. Invece il sup diventa max se appartiene all'insieme.

Esempio 1.4. Consideriamo I=età dei minorenni (espressa in anni)$\equiv [0, 18)$. Il numero 18 limita superiormente l'età dei minorenni ed é un sup ma non un max!

1.6. **Minimo o estremo inferiore?** Se consideriamo invece gli intervalli I del tipo (a, b) o $(a, b]$ si ha che

- a **limita dal basso l'insieme** I ossia $x \geq a$ $\forall x \in A$;
- a é il **più grande** numero reale che ha tale proprietà.

Si dice che a é **l'estremo inferiore** dell'intervallo I e si scrive

$$a = \inf I.$$

Se consideriamo gli intervalli I del tipo $[a, b]$ o $[a, b)$ si ha che

- a **limita dal basso l'insieme** I
- $a \in I$ ossia a **appartiene ad** I .

In tal caso si dice che a é il **minimo** dell'insieme I e si scrive

$$a = \min I.$$

Si osservi che i min sono sempre inf. Invece un inf é un min se appartiene all'insieme.

Quando $a = -\infty$ si ottengono degli intervalli che sono delle "semirette":

- **semiretta chiusa a destra**

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

che é un intervallo chiuso, limitato dall'alto e illimitato dal basso;

In tal caso $\max I = b, \quad$ e $\inf I := -\infty$.

- **semiretta aperta a destra**

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

che é un intervallo aperto, limitato dall'alto e illimitato dal basso;

In tal caso $\sup I := b, \quad \inf I := -\infty$.

Quando $b = +\infty$ si ottengono degli intervalli che sono un altro tipo di semirette:

- **semiretta aperta a sinistra**

$$(a, +\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

che é un intervallo aperto, illimitato dall'alto e limitato dal basso:

In tal caso $\inf I := a, \quad \sup I := +\infty$.

- **semiretta chiusa a sinistra**

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

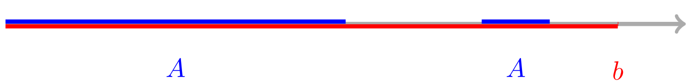
che é un intervallo chiuso, illimitato dall'alto e limitato dal basso.

In tal caso $\min I = a, \quad \sup I := +\infty$.

1.7. **Insiemi limitati.** Estendiamo ora a sottoinsiemi qualunque di $\mathbb{R}$ le definizioni date per gli intervalli.

Definizione 1.5. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Se esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che $A \subseteq (-\infty, b]$ diremo che A é* **limitato superiormente**. *Se A é limitato superiormente, chiameremo* **estremo superiore** *di A* **il più piccolo** *b che limita A dall'alto e lo indicheremo con $\sup A$.*

Quindi A é limitato superiormente se esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq b$ per ogni $x \in A$.



Definizione 1.6. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.Se esiste $M \in A$ tale che $x \leq M$ per ogni $x \in A$ diremo che*

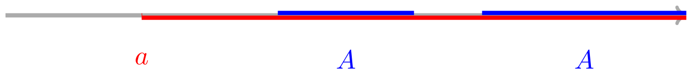
$$M = \max A.$$

Quindi

$$M = \max A \iff \begin{cases} x \leq M & \forall x \in A \\ M \in A \end{cases} \tag{1.1}$$

Definizione 1.7. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $A \subseteq [a, +\infty)$ diremo che A é* **limitato inferiormente**. *Se A é limitato inferiormente, chiameremo* **estremo inferiore** *di A* **il più grande** *a che limita A dal basso e lo indicheremo con* $\inf A$.

Quindi A é limitato inferiormente se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $x \geq a$ per ogni $x \in A$.

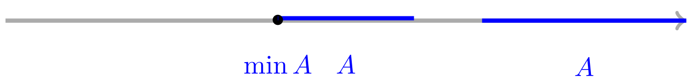


Definizione 1.8. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Se esiste $m \in A$ tale che $x \geq m$ per ogni $x \in A$ diremo che*

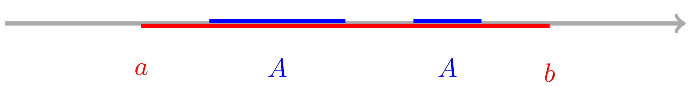
$$m = \min A.$$

Quindi

$$m = \min A \iff \begin{cases} x \geq m & \forall x \in A \\ m \in A \end{cases} \tag{1.2}$$



Definizione 1.9. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Se esistono $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $A \subseteq (a, b)$ diremo che A é un insieme* **limitato**.



Se esiste $m \in A$ tale che $x \geq m$ per ogni $x \in A$ diremo che

$$m = \min A.$$

Se esiste $M \in A$ tale che $x \leq M$ per ogni $x \in A$ diremo che

$$M = \max A.$$

In generale un sottoinsieme A non é detto che abbia massimo o minimo; però, grazie **all'assioma di completezza** (che vale in $\mathbb{R}$)

- se un $A \subseteq \mathbb{R}$ é **limitato superiormente** allora A **ha estremo superiore in** $\mathbb{R}$, ossia esiste $b \in \mathbb{R}$ con proprietá di essere il **più piccolo numero reale che limita** A **dall'alto**;
- se un $A \subseteq \mathbb{R}$ é **limitato inferiormente**, allora A **ha estremo inferiore in** $\mathbb{R}$, ossia esiste $a \in \mathbb{R}$ con la proprietá di essere il **più grande numero reale che limita** A **dal basso**;

Nell'Esempio 1.1

$$\sup A = \sqrt{2} = \inf B.$$

2. Prime proprietá delle funzioni

Definizione 2.1. *Siano X e Y insiemi. Diremo che f é una* **funzione da X su Y** *se associa ad ogni elemento $x \in X$ uno ed un solo elemento $y = f(x) \in Y$. Scriveremo $f : X \to Y$.*

- *X viene chiamato* **dominio** *(o campo di esistenza) di f;*
- *x si dice* **variabile** *della funzione;*
- *$f(x)$ viene chiamata* **immagine** *di x (tramite f);*
- *l'insieme $f(X) := \{f(x) : \ x \in X\}$ si dice* **immagine** *di X tramite f.*

Esempi

(1) Siano

$$X = \{x : x \text{ studente di Unife}\}$$

$$Y = \{y : y \text{ indirizzo e-mail}\}$$

l'applicazione che ad ogni studente associa indirizzo mail non é una funzione da X su Y perché alcuni potrebbero averne più di uno.

Se però ci restringiamo a considerare

$$Y = \{y : \ y \text{ indirizzo mail @student.unife.it}\}$$

allora l'applicazione $f : X \to Y$

$$x \to f(x) = \textbf{ indirizzo@student.unife.it dello studente x}$$

é una funzione da X su Y.

(2) Siano

$$X := \{x : \ x \text{ studente di questo corso}\}$$

$$Y := \{y : \ y \text{ gruppo sanguigno}\} = \{A, B, AB, 0\}.$$

L'applicazione $f : X \to Y$

$$x \to f(x) := \textbf{il gruppo sanguigno di } x$$

é una funzione da X su Y;

(3) siano $X := \{x : \ x \text{ matricola di Unife}\}$ e $Y := \{y : \ y \text{ cittá}\}$. L'applicazione

$$x \to f(x) := \textbf{luogo di nascita di } x$$

é una funzione da X su Y;

(4) sia $X = Y = \mathbb{R}$. L'applicazione

$$x \to f(x) := x^2$$

é una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Definizione 2.2. *Siano X, Y, Z tre insiemi e siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due funzioni. Allora definiamo* **funzione composta** *$g \circ f : X \to Z$ la funzione definita da*

$$g \circ f(x) := g(f(x)).$$

Leggiamo $g \circ f$ come "g dopo f".

Esempio 2.3. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x) = x^2$$

e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = 2x + 1.$$

Allora $X = Y = Z = \mathbb{R}$ e ha senso fare sia

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 1$$

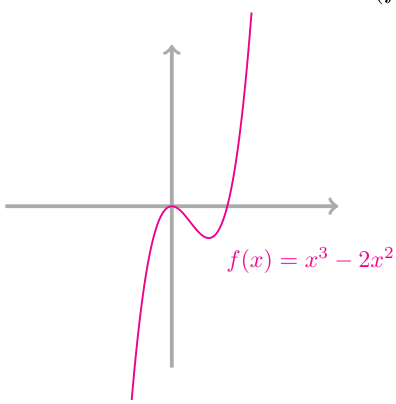
ma anche

$$f \circ g(x) = f(2x+1) = (2x+1)^2.$$

Si noti che $f \circ g \neq g \circ f$.

2.1. **Grafico di una funzione reale di variabile reale.** Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Si definisce **grafico** l'insieme

$$Gr(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in A\}.$$



2.2. **Estremo inferiore, estremo superiore di una funzione.**

Definizione 2.4. *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e sia* $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$. *Si dice che*

- f *é* **limitata superiormente o dall'alto su** A *se l'insieme* $f(A)$ *é limitato dall'alto ossia se esiste* $b \in \mathbb{R}$ *tali che*
$$f(x) \leq b \quad \forall x \in A.$$
In caso contrario, diremo che f *é* **illimitata superiormente** *e scriveremo* $\sup_A f = +\infty$*;*

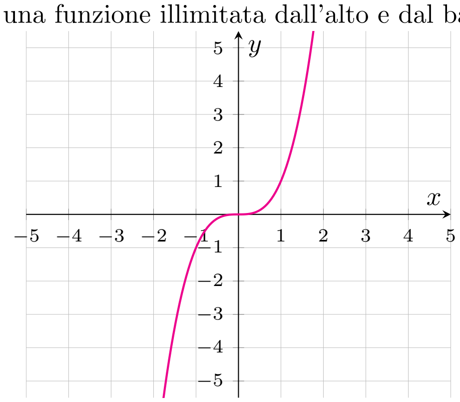
- f *é* **limitata inferiormente o dal basso su** A *se l'insieme* $f(A)$ *é limitato dal basso ossia se esiste* $a \in \mathbb{R}$ *tali che*
$$f(x) \geq b \quad \forall x \in A.$$
In caso contrario, diremo che f *é* **illimitata inferiormente su** A *e scriveremo* $\inf_A f = -\infty$*;*

Definizione 2.5. *Diremo che* f *é* **limitata su** A *se l'insieme* $f(A)$ *é limitato dall'alto e dal basso ossia se esistono* $a, b \in \mathbb{R}$ *tali che*

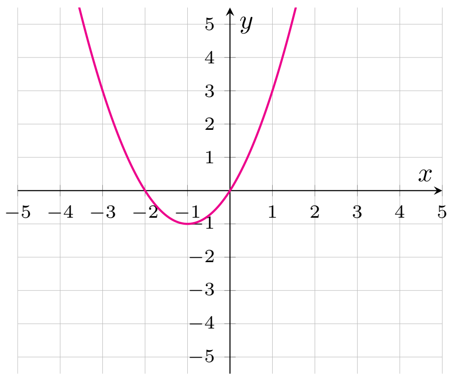
$$a \leq f(x) \leq b \quad \forall x \in A.$$

Esempi:

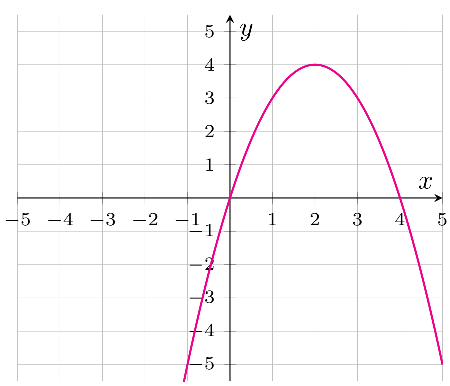
- di una funzione illimitata dall'alto e dal basso;



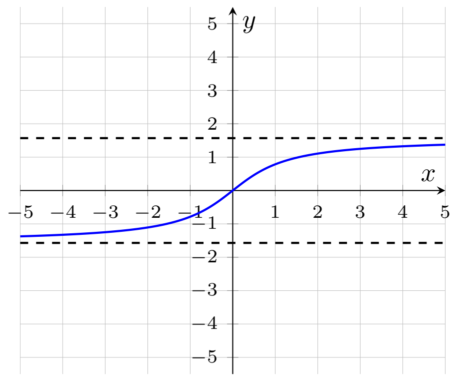
- di una funzione limitata dal basso ma non dall'alto;

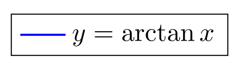


- di una funzione limitata dall'alto ma non dal basso;



- di una funzione limitata dall'alto e dal basso;





2.3. **Massimo e minimo.**

Definizione 2.6. *Sia* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- *Se esiste* $x_m \in A$ *tale che*
$$f(x) \geq f(x_m)\, \forall x \in X$$
allora x_m *si chiama* **punto di minimo assoluto** *e*
$$\min f := f(x_m);$$

- *se esiste* $x_M \in A$ *tale*
$$f(x) \leq f(x_M)\, \forall x \in X$$
allora x_M *si chiama* **punto di massimo assoluto** *e*
$$\max f := f(x_M).$$

- f é illimitata superiormente $\inf f = -\infty$ e $\sup f = +\infty$;
- $\min f = -1$ e $\sup f = +\infty$;
- $\inf f = -\infty$ e $\max f = 4$;
- $\inf f = -\pi/2$ e $\sup f = \pi/2$;

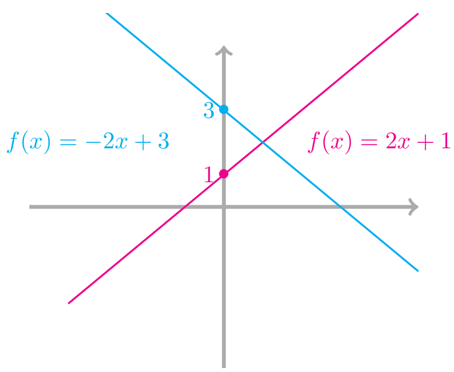
2.4. **Monotonia.**

Definizione 2.7. Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una funzione. Diremo che:

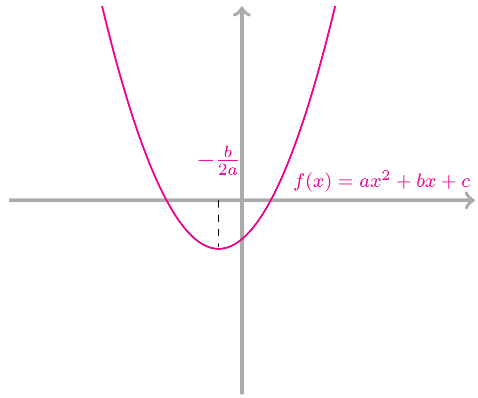
- f é **monotona crescente** se per ogni $x, y \in (a,b)$
$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y);$$
- f é **monotona strettamente crescente** se per ogni $x, y \in (a,b)$
$$x < y \Longrightarrow f(x) < f(y);$$
- f é **monotona decrescente** se per ogni $x, y \in (a,b)$
$$x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y);$$
- f é **monotona strettamente decrescente** se per ogni $x, y \in (a,b)$
$$x < y \Longrightarrow f(x) > f(y).$$

2.5. **Esempi di funzioni.**

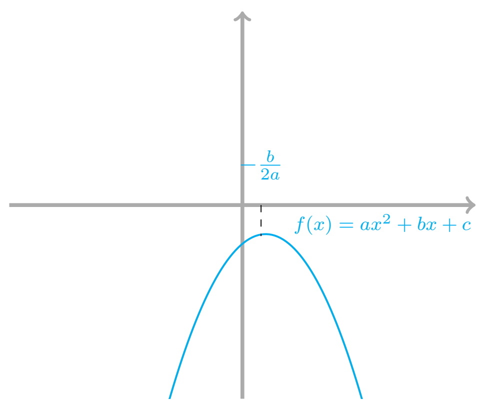
- **funzione lineare** del tipo $f(x) = ax + b$ con $a \in \mathbb{R}$ **fissato**: Tale funzione é definita su tutto $\mathbb{R}$. Tale funzione é illimitata dal basso e dall'alto. Inoltre
  - se $a > 0$ allora f é monotona strett. crescente su tutto $\mathbb{R}$;
  - se $a < 0$ allora f é monotona strett. decrescente su tutto $\mathbb{R}$.



- **funzione quadratica** del tipo
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
con $a, b \in \mathbb{R}$ **fissati**. Tale funzione é definita su tutto $\mathbb{R}$.
  Inoltre
  - se $a > 0$ allora f é monotona strett. crescente su $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ e monotona strett. decrescente su $(-\infty, -\frac{b}{2a})$; ha minimo in $x_m = -\frac{b}{2a}$; é illimitata dall'alto. Il grafico é la parabola rivolta verso l'alto.



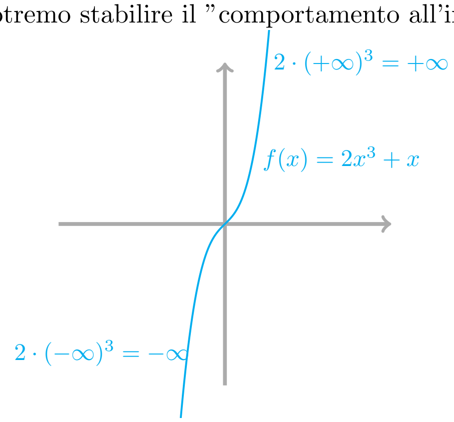
- se $a > 0$ allora f é monotona strett. decrescente su $(-\frac{b}{2a}, +\infty)$ e monotona strett. crescente su $(-\infty, -\frac{b}{2a})$; ha massimo in $x_M = -\frac{b}{2a}$; é illimitata dal basso. Il grafico é la parabola rivolta verso il basso.

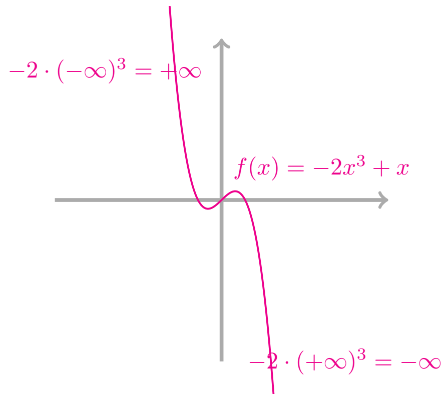


- **Polinomi**
  I polinomi sono funzioni del tipo

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

con $a_n, \cdots, a_0 \in \mathbb{R}$ **fissati**. n si dice **grado** del polinomio.
Le funzioni lineari e le funzioni quadratiche sono polinomi rispettivamente di grado 1 e 2. Tutti i polinomi sono definiti su tutto $\mathbb{R}$ e a seconda del segno del coefficiente del termine a_n potremo stabilire il "comportamento all'infinito" del grafico del polinomio:





- **Funzioni razionali** Sono polinomi o funzioni espresse come rapporto di polinomi.
  Le piú semplici sono le funzioni del tipo
$$f(x) = x^{-n} (= \frac{1}{x^n})$$
  con $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Esse sono definite per $x \neq 0$. La più generica funzione razionale sarà del tipo
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$
  dove P e Q sono polinomi. Il dominio di f é l'insieme
$$X := \{x \in \mathbb{R} : \ Q(x) \neq 0\}.$$
  Ricordiamo che se Q é un polinomio e $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $Q(x_0) = 0$ diremo x_0 **radice** o **zero** del polinomio Q. Il teorema fondamentale dell'algebra stabilisce che **n é il numero massimo di radici distinte che ammette un polinomio di grado n**.

Allo scopo di discutere la condizione $Q(x) \neq 0$ nella prossima sezione richiamiamo come si risolvono le equazioni algebriche di primo e secondo grado.

2.6. **Intermezzo: equazioni algebriche di primo e secondo grado.**

- **Equazioni di primo grado** Sono della forma
$$ax + b = 0 \tag{2.1}$$
  con $a \neq 0$.
  Ammettono un'unica soluzione data da
$$x = -\frac{b}{a}.$$
- **Equazioni di secondo grado** Sono della forma
$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{2.2}$$

Nella risoluzione di (2.2) occorre distinguere 3 casi:

(1) I caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$.
In questo caso l'equazione (2.2) ammette 2 radici reali e distinte $x_1 < x_2$ date da
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
e il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ si decompone come
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

(2) II caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac = 0}$. In questo caso l'equazione (2.2)ammette 2 radici reali e coincidenti x_1, x_2 date da

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$$

e il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ si decompone come

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

(3) III caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac < 0}$.

In questo caso l'equazione (2.2) non ammette soluzioni reali ossia é impossibile. Il trinomio $ax^2 + bx + c$ non puó essere fattorizzato. Puó essere peró scritto come somma di 2 quadrati: infatti

$$ax^2 + bx + c = (\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

dove $\frac{4ac-b^2}{4a} > 0$.

Osservazione 2.8. Consideriamo le equazioni del tipo $x^2 = k$.

(1) quelle con $k > 0$ cadono nella classe con $b = 0$ e $\Delta > 0$. Quindi ammettono le 2 soluzioni $x = \pm\sqrt{k}$. Inoltre il binomio $x^2 - k$ puó essere fattorizzato come

$$(x - \sqrt{k})(x + \sqrt{k}).$$

Per esempio l'equazione $x^2 - 4 = 0$ si puó scrivere come $x^2 = 4$ e si trova che ammette le 2 soluzioni $x = \pm 2$. Inoltre il binomio $x^2 - 4$ puó essere fattorizzato come

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2).$$

(2) quelle con $k < 0$ cadono nella classe delle equazioni con $\Delta < 0$. Quindi non ammettono soluzioni (reali) e il binomio $x^2 + (-k)$ non puó essere fattorizzato. Per esempio l'equazione $x^2 + 4 = 0$ si puó riscrivere come $x^2 = -4$ ed é impossibile. Il binomio $x^2 + 4$ non puó essere fattorizzato.

Osservazione 2.9. Se

$$Q(x) = Q_1(x) \cdot Q_2(x) \cdot Q_n(x)$$

ossia se Q é il prodotto di N polinomi, allora la condizione $Q(x) \neq 0$ é equivalente alle condizioni $Q_i(x) \neq 0$ per ogni $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Calcolare i domini delle seguenti funzioni razionali:

(1) $\frac{1}{x-1}$
(2) $\frac{1}{2-x}$
(3) $\frac{1}{x^2-5x+6}$
(4) $\frac{1}{x^2-6x+9}$
(5) $\frac{1}{x^2+6x+10}$
(6) $\frac{1}{4x^2-9}$
(7) $\frac{1}{4x^2+9}$
(8) $\frac{1}{x^2-2x}$
(9) $\frac{1}{x^2+2x}$
(10) $\frac{1}{(2x-3)(1-2x)}$
(11) $\frac{1}{(2-x)(1-x^2)}$
(12) $\frac{1}{x(x^2-5x+6)}$
(13) $\frac{1}{(x-1)(x^2-10x+25)}$
(14) $\frac{1}{x^2+4x+5}$

(15) $\frac{1}{(x^2-9)(x^2-4)}$
(16) $\frac{1}{x^2-2x}(x^2+2x)$
(17) $\frac{1}{(x^2+2x)(x^2-25)}$

3. **Limiti**

3.1. **Limiti a $+\infty$.**

Definizione 3.1. *Sia $f:(a,+\infty)$ (ossia f definita su una semiretta a destra). Diremo che*

(1) *il limite della funzione f per x che tende a $+\infty$ é $+\infty$ e scriveremo*
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
se **per ogni** $M>0$ **esiste** $N>0$ **tale che per ogni** $x>N$ **vale che** $f(x)>M$*;*
(2) *il limite della funzione f per x che tende a $+\infty$ é $-\infty$ e scriveremo*
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$
se **per ogni** $M>0$ **esiste** $N>0$ **tale che per ogni** $x>N$ **vale che** $f(x)<-M$*;*

Esempio 3.2.
$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$
mentre
$$\lim_{x\to+\infty} (-x)^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ é pari,} \\ -\infty & \text{se } n \text{ é dispari.} \end{cases}$$

3.2. **Limiti a $-\infty$.**

Definizione 3.3. *Sia $f:(-\infty,b)$ (ossia f definita su una semiretta a sinistra). Diremo che*

(1) *il limite della funzione f per x che tende a $-\infty$ é $+\infty$ e scriveremo*
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$
se **per ogni** $M>0$ **esiste** $N>0$ **tale che per ogni** $x<-N$ **vale che** $f(x)>M$*;*
(2) *il limite della funzione f per x che tende a $-\infty$ é $-\infty$ e scriveremo*
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
se **per ogni** $M>0$ **esiste** $N>0$ **tale che per ogni** $x<-N$ **vale che** $f(x)<-M$.

Esempio 3.4.
$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ é pari,} \\ -\infty & \text{se } n \text{ é dispari.} \end{cases}$$

3.3. **Algebra degli ∞.** Ricordiamo le seguenti operazioni tra ∞:

(1) $(+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$,
(2) $(-\infty)\cdot(+\infty) = (+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$,
(3) $(\pm\infty)^k = (\pm 1)^k\cdot\infty\ \forall k\in\mathbb{N}$;
(4) 1^∞ FORMA INDETERMINATA;
(5) $k\cdot(\pm\infty) = (\pm\cdot\mathit{segnok})\cdot\infty\ \forall k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,
(6) $0\cdot(\pm\infty)$ FORMA INDETERMINATA;
(7) $k+(\pm\infty) = \pm\infty\ \forall k\in\mathbb{R}$;
(8) $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$,
(9) $(-\infty)+(-\infty) = -\infty$.
(10) $(+\infty)+(-\infty)$ FORMA INDETERMINATA;

(11) $\frac{\infty}{\infty}$ FORMA INDETERMINATA.

Teorema 3.5. *Supponiamo che per $x \to +\infty$ (o per $x \to -\infty$) due funzioni f e g abbiano limite rispettivamente ℓ_1 e ℓ_2;*

(1) *se la somma di tali limiti non é F.I., allora per $x \to \infty$ (o per $x \to -\infty$) il limite della somma $f + g$ é la somma $\ell_1 + \ell_2$;*
(2) *Se il prodotto di tali limiti non é F.I., allora per $x \to \infty$ (o per $x \to -\infty$) il limite del prodotto $f \cdot g$ é il prodotto $\ell_1 \cdot \ell_2$;*
(3) *Se il quoziente di tali limiti non é F.I. e $\ell_2 \neq 0$, allora per $x \to \infty$ (o per $x \to -\infty$) il limite del quoziente $\frac{f}{g}$ é il quoziente $\frac{\ell_1}{\ell_2}$.*

Osservazione 3.6. *Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ allora diremo che*

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Esempio 3.7.

$$\lim_{x\to+\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = segno(a_n) \cdot (\infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = segno(a_n) \cdot (-\infty)^n.$$

Infatti

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0 = x^n(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots \frac{a_0}{x^n}).$$

In particolare data una funzione del tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ dove P e Q sono polinomi, definito x_m il piú piccolo zero del polinomio Q e x_M il piú grande zero di Q vale che

$$(-\infty, x_m) \subseteq domf$$

e

$$(x_M, +\infty) \subseteq domf.$$

Quindi é possibile calcolare il limite di f per $x \to +\infty$ e il limite per $x \to -\infty$.

Il calcolo dei limiti per $x \to \pm\infty$ di $\frac{P(x)}{Q(x)}$ si presenta nella forma (indeterminata) $\frac{\infty}{\infty}$.

Nel calcolo del limite, si possono considerare a numeratore e a denominatore solo i termini di grado massimo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_n} \quad \text{se } n = m \\ segno(\frac{a_n}{b_m}) \cdot \infty \quad \text{se } n > m \\ 0 \quad \text{se } n < m \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n + ... + a_1 x + a_0}{b_m x^m + ... + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_n} \quad \text{se } n = m \\ segno(\frac{a_n}{b_m}) \cdot (-\infty)^{n-m} \quad \text{se } n > m \\ 0 \quad \text{se } n < m \end{cases}$$

Tenendo presente le precedenti uguaglianze si calcolino i seguenti limiti:

(1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{4x-5}$ (Ris.$\frac{1}{2}$)

(2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+4x-5}{x^2+2x-3}$ (Ris.1)

(3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x-2}{3x^2-7x+2}$ (Ris.$\frac{1}{3}$)

(4) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x-6}{2x^2-3x-9}$ (Ris.$\frac{1}{2}$)

(5) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+3x^2-20}{x^3+2x^2-4x-8}$ (Ris.1)

(6) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+3x^2-20}{2x^2-4x-8}$ (Ris. $+\infty$)

(7) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2-20}{2x^2-4x-8}$ (Ris. $-\infty$)

(8) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+3x^2-20}{2x^2-4x-8}$ (Ris. $+\infty$)

(9) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2-20}{4x-8}$ (Ris. $+\infty$)

(10) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2-20}{2x^4-4x-8}$ (Ris.0)

(11) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+3x^2-20}{-4x^5-8}$ (Ris.0)

(12) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-20}{2x^5-4x-8}$ (Ris.0)

(13) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{1+2x^2}{1+x^2}}$ (Ris.$\sqrt{2}$)

4. **Intermezzo su funzione valore assoluto e disequazioni**

4.1. **Disequazioni e segno di una funzione.** Lo studio del segno di una funzione conduce alla risoluzione di una disequazione: stabilire se una funzione f é positiva significa studiare quando

$$f(x) \geq 0.$$

Nello studio di una disequazione sono lecite tutte quelle le operazioni che lasciano invariato l'insieme delle soluzioni. Due disequazioni si dicono **equivalenti** se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Nella risoluzione delle disequazioni si applicano i seguenti principi:

(1) **Addizionando o sottraendo** ad entrambi i membri di una disequazione uno stesso numero reale si ottiene una disequazione equivalente a quella data;
(2) **Moltiplicando o dividendo** entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero reale **strettamente positivo** si ottiene una disequazione equivalente a quella data.

Se invece si moltiplicano o si dividono entrambi i membri di una disequazione per uno stesso numero reale **strettamente negativo**, al fine di ottenere una disequazione equivalente a quella data, é necessario **cambiare il verso** della disequazione.

Osservazione 4.1. Nota bene: Siano $a, b > 0$. Allora

$$a < b \Longleftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$a > b \Longleftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

Invece

$$a < 0 < b \Longrightarrow \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$$

$$a > 0 > b \Longrightarrow \frac{1}{a} > 0 > \frac{1}{b}$$

4.2. **Disequazioni di primo grado.** Sono della forma

$$ax + b \geq 0 \quad (\text{ o } \quad ax + b \leq 0) \tag{4.1}$$

con $a \neq 0$.
Se $a > 0$ allora la (4.1) é equivalente a

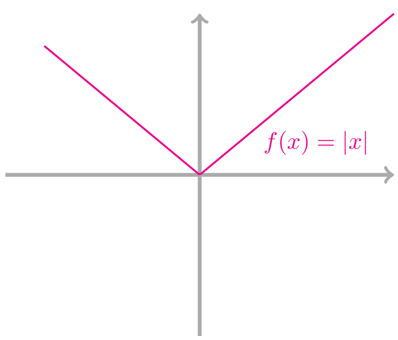
$$x \geq -\frac{b}{a} \quad (\text{ o } \quad x \leq -\frac{b}{a}).$$

Se $a < 0$ allora la (4.1) é equivalente a

$$x \leq -\frac{b}{a} \quad (\text{ o } \quad x \geq -\frac{b}{a}).$$

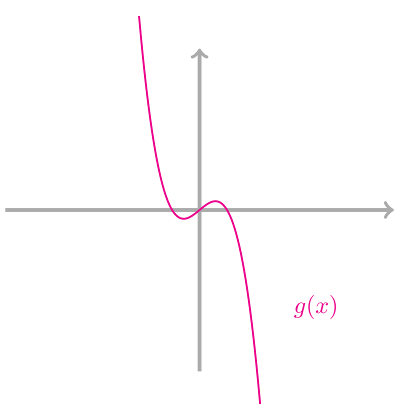
4.3. **Funzione valore assoluto.** Per ogni $x \in \mathbb{R}$ definiamo

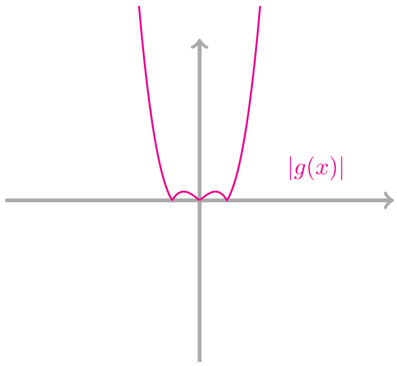
$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$



In particolare se $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ allora la funzione $|g| : A \to [0, +\infty)$ é la composizione $f \circ g$ con $f(x) = |x|$.

$$|g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{se } g(x) \geq 0, \\ -g(x) & \text{se } g(x) \leq 0. \end{cases}$$





La funzione valore assoluto soddisfa le seguenti proprietá:

(1) $|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

(2) $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

(3) $|xy| = |x||y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. In particolare $|x|^2 = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Inoltre

$$|x| = a \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \pm a & \text{se } a > 0, \\ x = 0 & \text{se } a = 0 \\ \text{impossibile} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

$$|x| \leq a \Longleftrightarrow \begin{cases} -a \leq x \leq a \text{ (ossia sull'}\textbf{intervallo interno)} & \text{se } a \geq 0, \\ \text{mai} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

$$|x| \geq a \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq a \;\vee\; x \leq -a \text{ (ossia sugli }\textbf{intervalli esterni)} & \text{se } a \geq 0, \\ \text{sempre} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Esempio 4.2. (1) $|x-2| = 3 \Longleftrightarrow x - 2 = \pm 3 \Longleftrightarrow x = 2+3 = 5 \vee x = 2-3 = -1$;

(2) $|x-2| < 3 \Longleftrightarrow -3 < x-2 < 3 \Longleftrightarrow -3+2 < x < 3+2 \Longleftrightarrow -1 < x < 5$;

(3) $|x-2| < -1$ *Mai;*

(4) $|x-2| \geq 0$ *sempre;*

(5) $|2x-1| > 5 \Longleftrightarrow 2x-1 < -5 \vee 2x-1 > 5 \Longleftrightarrow x < -2 \vee x > 3$;

(6) $|2x-1| > 0 \Longleftrightarrow |2x-1| \neq 0 \Longleftrightarrow 2x-1 \neq 0 \Longleftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$.

Il dominio delle funzioni del tipo

$$f(x) = \frac{1}{|Q(x)|}$$

dove Q é un polinomio, é l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R} : |Q(x)| \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}.$$

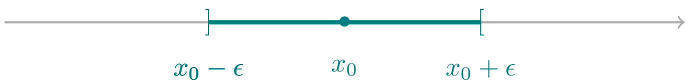
(1) Il dominio di $f(x) = \frac{1}{|x+2|}$ é $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

(2) Il dominio di $f(x) = \frac{1}{|x|+2}$ allora il suo dominio é tutto $\mathbb{R}$!!!

(3) Il dominio di $f(x) = \frac{1}{|x|-2}$ é $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

5. **Ancora limiti.**

Definizione 5.1 (**Intorni.**). *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Chiamiamo* **intorno (centrato)** *di x_0 e raggio $\epsilon > 0$ un insieme del tipo $I_\epsilon(x_0) := (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$:*



Usando il valore assoluto vale che

$$x \in I_\epsilon(x_0) \iff x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon \iff |x - x_0| < \epsilon.$$

Definizione 5.2 (**Limite $\ell \in \mathbb{R}$ per $x \to \pm\infty$).**

(1) *Sia $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Diremo che il limite della funzione f per x che tende a $+\infty$ é ℓ e scriveremo*

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $N > 0$ **tale che per ogni** $x > N$ **vale che** $f(x) \in I_\epsilon(\ell)$. *In tal caso la retta $y = \ell$ si dice* **asintoto orizzontale (a destra)** *della funzione f.*

(2) *Sia $f : (-\infty, b) \to \mathbb{R}$ (ossia f definita su una semiretta a sinistra). Diremo che il limite della funzione f per x che tende a $-\infty$ é l e scriveremo*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$$

se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $N > 0$ **tale che per ogni** $x < -N$ **vale che** $f(x) \in I_\epsilon(\ell)$. *In tal caso la retta $y = \ell$ si dice* **asintoto orizzontale (a sinistra)** *della funzione f.*

Esempio 5.3. *Per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Definizione 5.4 (**Limite $= +\infty$ per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$.**). *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$.*

(1) *Sia $f : (x_0, b) \to \mathbb{R}$ (ossia f definita a destra di un punto x_0). Diremo che per x che tende a x_0^+ il limite della funzione f é $+\infty$ e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

se **per ogni** $M > 0$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x_0 < x < x_0 + \delta$ **vale che** $f(x) > M$;

(2) *Sia $f : (a, x_0) \to \mathbb{R}$ (ossia f definita a sinistra di un punto x_0). Diremo che il limite per x che tende a x_0^- della funzione f é $+\infty$ e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$

se **per ogni** $M > 0$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x_0 - \delta < x < x_0$ **vale che** $f(x) > M$.

Esempio 5.5. *Per ogni $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1-x} = +\infty$$

Definizione 5.6 (**Limite $= -\infty$ per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$).** *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$.*

(1) *Sia $f : (x_0, b) \to \mathbb{R}$. Diremo che per x che tende a x_0^+ il limite della funzione f é $-\infty$ e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

se **per ogni** $M > 0$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x_0 < x < x_0 + \delta$ **vale che** $f(x) < -M$;

(2) *Sia* $f:(a,x_0)\to\mathbb{R}$. *Diremo che per* x *che tende a* x_0^- *il limite della funzione* f *é* $-\infty$ *e scriveremo*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$

se **per ogni** $M>0$ **esiste** $\delta>0$ **tale che per ogni** $x_0-\delta<x<x_0$ **vale che** $f(x)<-M$.

Definizione 5.7. (1) *Sia* $f:(a,x_0)\to\mathbb{R}$. *Se*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty,$$

la retta $x=x_0$ *si dice* **asintoto verticale** *della funzione* f.

(2) *Sia* $f:(x_0,b)\to\mathbb{R}$. *Se*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty,$$

la retta $x=x_0$ *si dice* **asintoto verticale** *della funzione* f.

Esempio 5.8. *Per ogni* $n\in\mathbb{N}, n\geq 1$ *abbiamo visto che*

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty.$$

Invece

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$$

In generale per ogni $n\geq 1$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n} = +\infty$$

mentre

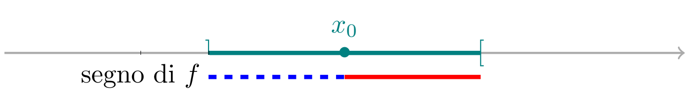
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ é pari,} \\ -\infty & \text{se } n \text{ é dispari.}\end{cases}$$

5.1. **Limiti della forma $\frac{1}{0}$.** Se una funzione f definita a destra o a sinistra di x_0 é tale che $f(x_0)=0$, allora

$$\lim_{x\to x_0^\pm}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0}.$$

Per calcolare tale limite, si studia il segno del denominatore f a destra o a sinistra di x_0.

Se

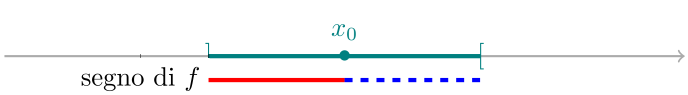


allora

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

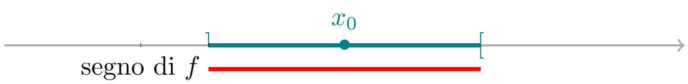
Se



allora

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$
$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{0^+}=+\infty.$$

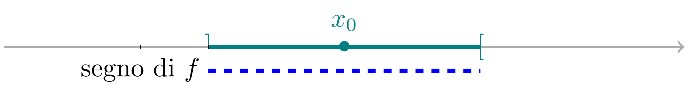
Se



allora

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{0^+}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{1}{f(x)}=+\infty;$$

se



allora

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{0^-}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{1}{f(x)}=-\infty.$$

Quindi la regola generale é

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{f(x)}=\begin{cases}+\infty & \text{se } f(x)>0 \text{ su } (x_0,x_0+\delta)\\ -\infty & \text{se } f(x)<0 \text{ su } (x_0,x_0+\delta).\end{cases}$$

e

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{1}{f(x)}=\begin{cases}+\infty & \text{se } f(x)>0 \quad \text{su } (x_0-\delta,x_0)\\ -\infty & \text{se } f(x)<0 \text{ su } (x_0-\delta,x_0).\end{cases}$$

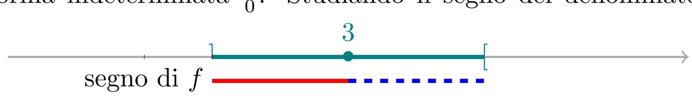
Esempio 5.9. Supponiamo di voler studiare il segno della funzione $f(x)=3-x$.

$$f(x)\geq 0 \iff 3-x\geq 0 \iff -x\geq -3 \iff x\leq 3.$$

Studiamo ora i limiti

(1) $\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{f(x)}$
(2) $\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{f(x)}$

Essi si presentano nella forma indeterminata $\frac{1}{0}$. Studiando il segno del denominatore si ha che $3-x>0 \iff x<3$. Quindi



Pertanto

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{3-x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

mentre

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{1}{3-x}=\frac{1}{0^+}=+\infty.$$

Esempio 5.10. Sia $f(x)=3-x$. Studiamo i limiti

(1) $\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{|3-x|}$
(2) $\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{(3-x)^2}$.

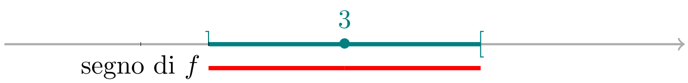
Studiando il segno del denominatore si ha che,

$$(3-x)^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

e

$$|3-x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

ossia



Quindi

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{|3-x|} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{(3-x)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

5.2. **Le disequazioni di secondo grado.** Sono della forma

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad (\text{ o } \quad ax^2 + bx + c \leq 0) \tag{5.1}$$

con $a > 0$ (infatti se $a < 0$ basta moltiplicare tutto per -1 e invertire il verso della disequazione). Occorre distinguere 3 casi:

(1) I caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$.
(2) I caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac = 0}$.
(3) I caso: $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac < 0}$.

- $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$.
  In questo caso esistono $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ si decompone come
  $$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$
  Allora se $a > 0$ il segno di p é determinato dal *prodotto dei segni* di $(x - x_1)$ e di $(x - x_2)$. Ossia
  - p é positivo se $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ **hanno lo stesso segno**;
  - p é negativo se $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ sono discordi.

  Allo scopo di studiare la (5.1)
  (1) si studia quando $(x-x_1)$ e $(x-x_2)$ sono positivi (rispettivamente per $x \geq x_1$ e $x \geq x_2$);

  (2) si rappresentano sulla retta reale i due valori x_1, x_2, e per ciascun insieme $x \geq x_1$ e $x \geq x_2$ si disegna una semiretta (tratteggiando le semirette opposte ad indicare che negli intervalli $x \leq x_1$e $x \leq x_2$ i fattori $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ sono negativi);

  (3) su ogni intervallo $x \leq x_1$, $x_1 \leq x \leq x_2$, $x \geq x_2$ si moltiplicano i segni di $(x-x_1)$, $(x-x_2)$ ottenendo cosí il segno di $p(x)$.

  Si ottiene cosí il seguente risultato generale:

  se $a > 0$ e $\Delta > 0$ il trinomio $p(x)$ é positivo negli intervalli $x \leq x_1$ e $x \geq x_2$, ossia negli intervalli esterni all'intervallo delle radici, mentre il trinomio é negativo nell'intervallo interno alle radici (x_1, x_2).

  Scriveremo
  $$ax^2 + bx + c \geq 0 \iff x \leq x_1 \ \vee \ x \geq x_2,$$
  mentre
  $$ax^2 + bx + c \leq 0 \iff x_1 \leq x \leq x_2.$$

Esempio 5.11. $\forall k > 0$

$$x^2 - k^2 = (x-k)(x+k) \leq 0 \iff -k \leq x \leq k$$

$$x^2 - k^2 \geq 0 \iff x \leq -k \vee x \geq k.$$

Esempio 5.12.

$$-5x^2 + 6x + 8 < 0 \iff 5x^2 - 6x - 8 > 0.$$

Poiché $\Delta = 196$ si possono calcolare $x_1 = -\frac{4}{5}$ e $x_2 = 2$.
Quindi

$$5x^2 - 6x - 8 = 5(x + \frac{4}{5})(x-2) > 0 \iff x < -\frac{4}{5} \vee x > 2.$$

Esempio 5.13. Sia $f(x) = 4 - x^2$. Studiamo i limiti

(1) $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{f(x)}$
(2) $\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{f(x)}$
(3) $\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{f(x)}$
(4) $\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{f(x)}$.

Si presentano tutti nella forma indeterminata $\frac{1}{0}$. Studiando il segno del denominatore si ha che

$$4 - x^2 > 0 \iff -2 < x < 2$$

ossia

Quindi

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{1}{4 - x^2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{1}{4 - x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

e

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{4 - x^2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{4 - x^2} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

- $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac = 0}$. In questo caso esiste $x_1 \in \mathbb{R}$ tale che il trinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ si decompone come

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Quindi **se** $a > 0$ **e** $\Delta = 0$ **il trinomio é sempre positivo e si annulla solo nel punto** $x = x_1$**.** Ossia se $a > 0$ vale che

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &\geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ ax^2 + bx + c &\leq 0 \iff x = x_1 \\ ax^2 + bx + c &> 0 \iff \forall x \neq x_1 \\ ax^2 + bx + c &< 0 \text{ per nessun valore di } x. \end{aligned}$$

Esempio 5.14. Poiché $9x^2 - 6x + 1 = (x + \frac{1}{3})^2$ allora

$$\begin{aligned} 9x^2 - 6x + 1 &\geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ 9x^2 - 6x + 1 &\leq 0 \iff x = \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 6x + 1 &> 0 \iff \forall x \neq \frac{1}{3} \\ 9x^2 - 6x + 1 &< 0 \text{ per nessun valore di } x. \end{aligned}$$

In particolare

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}^+} \frac{1}{9x^2 - 6x + 1} = \lim_{x \to -\frac{1}{3}^-} \frac{1}{9x^2 - 6x + 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

- $\mathbf{\Delta = b^2 - 4ac < 0}$.
  In questo caso l'equazione $ax^2+bx+c = 0$ non ammette radici reali e **se** $a > 0$ **il trinomio é sempre strettamente positivo.** Quindi, in particolare, se $a > 0$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &> 0 \ \forall x \in \mathbb{R}; \\ ax^2 + bx + c &\leq 0 \ \text{ per nessun valore di } x; \\ ax^2 + bx + c &\geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}; \\ ax^2 + bx + c &< 0 \text{ per nessun valore di } x. \end{aligned}$$

Esempio 5.15. $\forall a \neq 0$

$$\begin{aligned} x^2 + a^2 &\geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \\ x^2 + a^2 &\leq 0 \text{ per nessun valore di } x. \end{aligned}$$

Definizione 5.16 (Limite $\ell \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0^+$ e per $x \to x_0^-$.). *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$.*

(1) *Sia $f : (x_0, b)$. Diremo che per x che tende a x_0^+ il limite della funzione f é $\ell \in \mathbb{R}$ e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x_0 < x < x_0 + \delta$ **vale che** $|f(x) - \ell| < \epsilon$ *(ossia $f(x) \in I_\epsilon(\ell)$);*

(2) *Sia $f : (a, x_0)$. Diremo che per x che tende a x_0^- il limite della funzione f é $\ell \in \mathbb{R}$ e scriveremo*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$$

se **per ogni** $\epsilon > 0$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x_0 - \delta < x < x_0$ **vale che** $|f(x) - \ell| < \epsilon$ *(ossia $f(x) \in I_\epsilon(\ell)$).*

Definizione 5.17. (Limite per $x \to x_0$). *Sia $a < x_0 < b$ ed $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, eventualmente non definita in x_0, e sia $\ell \in [-\infty, \infty]$. Se*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

allora diremo che per x che tende a x_0 il limite della funzione f é ℓ e scriveremo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

(1) Se $\ell \in \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff$$

$\forall \epsilon > \mathbf{0}$ **esiste** $\delta > 0$ **tale che per ogni** $x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ **vale che** $f(x) \in I_\epsilon(\ell)$.

(2) Invece

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff$$

$\forall$M $>$ 0 esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ vale che $f(x) > M$.

(3) Invece

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff$$

$\forall$M $>$ 0 esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ vale che $f(x) < -M$.

Definizione 5.18. *Sia $a < x_0 < b$ ed $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, eventualmente non definita in x_0, e sia $\ell \in [-\infty, \infty]$. Se*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

allora diremo che per x che tende a x_0 il limite della funzione f é ℓ e scriveremo

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell.$$

Osservazione 5.19. (1) *Se $\ell \in \mathbb{R}$, allora*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff$$

$\forall\epsilon >$ 0 esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ vale che $f(x) \in I_\epsilon(\ell)$.

(2) *Invece*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff$$

$\forall$M $>$ 0 esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ vale che $f(x) > M$.

(3) *Invece*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff$$

$\forall$M $>$ 0 esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ vale che $f(x) < -M$.

Teorema 5.20. (Limite di una somma, di un prodotto, di un quoziente.) *Supponiamo che per $x \to x_0^+$ (rispettivamente, per $x \to x_0^-$ o per $x \to x_0$) due funzioni f e g abbiano limite rispettivamente ℓ_1 e ℓ_2;*

(1) *se la somma di tali limiti non é F.I., allora per $x \to x_0^+$ (rispettivamente, per $x \to x_0^-$ o per $x \to x_0$) il limite della somma $f + g$ é la somma $\ell_1 + \ell_2$;*
(2) *Se il prodotto di tali limiti non é F.I., allora per $x \to x_0^+$ (rispettivamente, per $x \to x_0^-$ o per $x \to x_0$) il limite del prodotto $f \cdot g$ é il prodotto $\ell_1 \cdot \ell_2$;*
(3) *Se il quoziente di tali limiti non é F.I. e $\ell_2 \neq 0$, allora per $x \to x_0^+$ (rispettivamente, per $x \to x_0^-$ o per $x \to x_0$) il limite del quoziente $\frac{f}{g}$ é il quoziente $\frac{\ell_1}{\ell_2}$.*

Definizione 5.21. (Continuitá) *Sia $a < x_0 < b$ ed $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Se*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

allora diremo che f é continua in x_0.

Definizione 5.22. *Sia $a < x_0 < b$ ed $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Se f é continua in tutti i punti di (a, b) diremo che f é continua su (a, b).*

Le funzioni lineari, quadratiche, polinomiali, potenza, il valore assoluto, le funzioni razionali e le radici sono funzioni continue nel loro dominio. Quindi per calcolare il limite di una di queste funzioni per $x \to x_0$, basta calcolare il valore della funzione nel punto x_0.

(1) calcolare

$$\lim_{x\to 2^-} |x-3| + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2} = |2-3| + \frac{\sqrt{5}}{0^-} = 1 - \infty = -\infty;$$

(2) calcolare

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{2}{0^+} - \frac{2}{0^+} = +\infty - \infty = F.I.$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2}{0^+} = +\infty.$$

Proposizione 5.23. *(***Limite della forma $\frac{a}{0}$ con $a \neq 0$).**

Siano f, g due funzioni continue definite su (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0) = 0$ e $g(x_0) \neq 0$ ed $\epsilon > 0$. Allora

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} g(x_0)\cdot(+\infty) & se\ f(x) > 0\ su\ (x_0, x_0+\epsilon) \\ \\ g(x_0)\cdot(-\infty) & se\ f(x) < 0\ su\ (x_0, x_0+\epsilon). \end{cases}$$

e

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} g(x_0)\cdot(+\infty) & se\ f(x) > 0 \quad se\ \ su\ (x_0-\epsilon, x_0) \\ \\ g(x_0)\cdot(-\infty) & se\ f(x) < 0\ su\ (x_0-\epsilon, x_0). \end{cases}$$

Quindi per calcolare il limite $\lim_{x\to x_0^\pm} \frac{g(x)}{f(x)}$ nel caso in cui $f(x_0) = 0$ e $g(x_0) \neq 0$

- si studia il segno del denominatore in un intorno del punto x_0;
- se il segno a destra e il segno a sinistra sono diversi, si calcolano il limite destro e il limite sinistro;
- il limite destro (rispettivamente, sinistro) si ottiene moltiplicando $+\infty$ per il segno di $g(x_0)$ e per il segno del denominatore a destra (rispettivamente, il segno a sinistra);
- se il denominatore mantiene lo stesso segno in un intorno di x_0, allora esiste il limite e lo si calcola moltiplicando $+\infty$ per il segno di $g(x_0)$ e per il segno del denominatore.

Esempio 5.24. Il limite

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-2}{4-x^2} = \frac{6}{0}.$$

Studiando il segno del denominatore si ha che $4 - x^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < x < 2$. Quindi il denominatore in un intervallo a destra di 2 é negativo. Pertanto

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^3-2}{4-x^2} = 6\cdot(-\infty) = -\infty.$$

Inoltre poiché il denominatore in un intervallo a sinistra di 2 é positivo si ha che

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3-2}{4-x^2} = 6\cdot(+\infty) = (+\infty).$$

Analogamente si ha che

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{x^3-2}{4-x^2} = -10\cdot(+\infty) = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^3-2}{4-x^2} = -10\cdot(-\infty) = +\infty.$$

Se invece nel calcolo del limite di un rapporto si ottiene la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ (ossia se $f(x_0) = g(x_0) = 0$), allora si deve provare a dividere per $(x - x_0)$ sia il numeratore che il denominatore. In alcuni casi si semplifica, in altri casi si useranno i limiti notevoli.

(1) calcolare
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}=\frac{0}{2}=0$$
(2) calcolare
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

Calcolare i seguenti limiti nella forma indeterminata $\frac{a}{0}$ attraverso lo studio del segno del denominatore:

(1) $\lim_{x\to 2^+}\frac{1-x}{x-2}$ (Ris. $-\infty$)
(2) $\lim_{x\to 2^-}\frac{1-x}{x-2}$ (Ris. $+\infty$)
(3) $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1}{x-1}$ (Ris. $-\infty$)
(4) $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{x-1}$ (Ris. $+\infty$)

Teorema 5.25. Limite della funzione composta *Sia $f:(a,b)\to(c,d)$ e $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ e siano $x_0\in(a,b)$ e $y_0\in(c,d)$ (eventualmente uguali a $\pm\infty$). Se*

(1) *esiste il* $\lim_{x\to x_0} f(x)=y_0$
(2) *esiste il* $\lim_{x\to y_0} g(y)=\ell\in[-\infty,+\infty]$

allora esiste
$$\lim_{x\to x_0} g\circ f(x)=\ell.$$

Esempio 5.26. Dal teorema sul limite di una funzione composta e dalla continuità della funzione $\sqrt{\cdot}$ segue che
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{4x^2-4}{x^2+3}}=\sqrt{4}=2.$$

Teorema 5.27 (Permanenza del segno). (1) *Supponiamo che* $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\ell\in[-\infty,\infty]$, $\ell\neq 0$.
  (a) *Se $\ell>0$ allora esiste $\delta>0$ tale che $f(x)>0$ su $(x_0,x_0+\delta)$;*
  (b) *Se $\ell<0$ allora esiste $\delta>0$ tale che $f(x)<0$ su $(x_0,x_0+\delta)$.*

(2) *Supponiamo che* $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\ell\in[-\infty,\infty]$, $\ell\neq 0$.
  (a) *Se $\ell>0$ allora esiste $\delta>0$ tale che $f(x)>0$ su $(x_0,x_0-\delta)$;*
  (b) *Se $\ell<0$ allora esiste $\delta>0$ tale che $f(x)<0$ su $(x_0,x_0-\delta)$.*

(3) *Supponiamo che* $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell\in[-\infty,\infty]$, $\ell\neq 0$.
  (a) *Se $\ell>0$ allora esiste $N>0$ tale che $f(x)>0$ su $(N,+\infty)$;*
  (b) *Se $\ell<0$ allora esiste $N>0$ tale che $f(x)<0$ su $(N,+\infty)$.*

(4) *Supponiamo che* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell\in[-\infty,\infty]$, $\ell\neq 0$.
  (a) *Se $\ell>0$ allora esiste $N>0$ tale che $f(x)>0$ su $(-\infty,-N)$;*
  (b) *Se $\ell<0$ allora esiste $N>0$ tale che $f(x)<0$ su $(-\infty,-N)$.*

6. Potenze

6.1. Potenze con esponente intero. Ricordiamo le proprietá delle potenze. Sia $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. Si definisce

$$a^n = a \cdots a \quad (n \text{ volte}).$$

Se $a \neq 0$ definiamo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Si pone

$$a^0 = 1.$$

Proprietá delle potenze. Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ (eventualmente non nulli) e per ogni $h, k \in \mathbb{Z}$ valgono le seguenti proprietá:

(1) $a^h \cdot a^k = a^{h+k}$
(2) $a^h : a^k = a^{h-k}$
(3) $(a^h)^k = a^{hk}$
(4) $a^h \cdot b^h = (ab)^h$
(5) $a^h : b^h = (\frac{a}{b})^h$.

Esempio 6.1. Non dovete avere dubbi riguardo i seguenti esempi:

(1) $a^2 \cdot a^2 = a^4$ mentre $a^2 + a^2 = 2a^2$
(2) $(a^3)^2 = a^{3\cdot 2} = a^6$ mentre $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2} = a^5$
(3) $(\frac{a}{b})^{-3} = (\frac{b}{a})^3$
(4) $a^2 \cdot a^{-2} = a^{2-2} = a^0 = 1$

Vogliamo ora generalizzare la definizione di potenza in modo che l'esponente $h \in \mathbb{R}$ ed in modo che le proprietá sopra siano ancora soddisfatte.

6.2. Definizione di $x^{\frac{1}{n}}$ ossia della radice n-ma. Sia $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Fissiamo $x \in \mathbb{R}$. Vogliamo risolvere l'equazione

$$b^n = x \tag{6.1}$$

con incognita b. Se $x = 0$, allora $b = 0$ soddisfa tale l'equazione.

Se $x > 0$, si prova che l'insieme

$$\{y \in [0, +\infty) : y^n < x\}$$

é non vuoto e limitato superiormente. Pertanto esiste

$$b = \sup\{y \in [0, +\infty) : y^n < x\}.$$

Definiamo $\sqrt[n]{x}$ tale numero b. Tale b risolve l'equazione (6.1).

- **Se** n **é pari**, é chiaro che l'equazione (6.1) é risolubile solo se $x \geq 0$. Quindi é ben definita la funzione $\sqrt[n]{\cdot} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.
- **Se** n **é dispari** e $x < 0$, allora $-x > 0$ e la soluzione dell'equazione $b^n = (-x)$ é tale che
$$(-b)^n = -(b)^n = -(-x) = x.$$
Quindi la radice n-ma é ben definita anche per $x \leq 0$ e la funzione $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Pertanto

- **se** n **é pari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \geq 0$ ed é sempre ≥ 0.
- **se** n **é dispari** $\sqrt[n]{x}$ é definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ha il segno di x.

Esempio 6.2. (1) $\sqrt[3]{27} = 3$;
(2) $\sqrt[3]{-27} = -3$;

(3) $\sqrt[2]{4} = 2$;
(4) $-\sqrt[2]{4} = -2$;
(5) $\sqrt[2]{-4}$ *non esiste;*
(6) $\sqrt[3]{x}$ *esiste per ogni* $x \in \mathbb{R}$*;*
(7) $\sqrt{x}$ *esiste per ogni* $x \geq 0$*;*
(8) $\sqrt[3]{-x}$ *esiste per ogni* $x \in \mathbb{R}$*;*
(9) $\sqrt{-x}$ *esiste per ogni* $-x \geq 0$ *ossia per* $x \leq 0$*.*

Se $n \in \mathbb{N}$ é **dispari**

$$\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$$

e $\forall a, x \in \mathbb{R}$ vale che

$$a\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a^n x}.$$

Esempio 6.3. (1) $-2\sqrt[3]{3} = -\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 3}$*;*
(2) $\sqrt[3]{x^3} = x$
(3) $\sqrt[3]{2x-1} = -\sqrt[3]{1-2x}$.

Questa proprietá non vale per le radici $\sqrt[n]{\cdot}$ con n pari dal momento che per ogni $x \neq 0$ o esiste $\sqrt[n]{x}$ o esiste $\sqrt[n]{-x}$.

Se n é **pari** e $x \geq 0$ allora

$$a\sqrt[n]{x} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a \geq 0, \\ \\ -(-a)\sqrt[n]{x} = -\sqrt[n]{(-a)^n x} = -\sqrt[n]{a^n x} & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

In particolare, segue che

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a^n x} &= \begin{cases} a\sqrt[n]{x} & \text{se } a \geq 0, \\ \\ -a\sqrt[n]{x} & \text{se } a < 0. \end{cases} \\ &= |a|\sqrt[n]{x} \quad \forall x \geq 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\sqrt[n]{a^n} = |a| \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Esempio 6.4. (1) $-3\sqrt[2]{2} = -\sqrt[2]{3^2 \cdot 2}$;
(2) $\sqrt[2]{2(-3)^2} = 3\sqrt[2]{\cdot 2}$;
(3) $\sqrt{x^2} = |x|$
(4) $\sqrt{x^4} = |x|^2 = x^2$

Siano $m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.

(1) se n é dispari, allora $\sqrt[n]{x^m}$ é ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ perché la radice n-ma di ordine dispari é sempre ben definita;
(2) se $n, m > 0$ sono pari, allora $\sqrt[n]{x^m}$ é definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Attenzione alle semplificazioni tra gli esponenti!!! Infatti la funzione $\sqrt[4]{x^2}$ é sempre definita, mentre, se semplificaste il 2 con il 4, otterreste la funzione $\sqrt{x}$ che é una funzione definita solo per ogni $x \geq 0$. Quindi la giusta semplificazione é $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{|x|}$.

Esempio 6.5. (1) $-2\sqrt[3]{3} = -\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{-2^3 \cdot 3}$;
(2) $-3\sqrt[2]{2} = -\sqrt[2]{3^2 \cdot 2}$;
(3) $\sqrt[2]{2(-3)^2} = 3\sqrt[2]{\cdot 2}$;
(4) $\sqrt{x^2} = |x|$

6.3. **Limiti con radici.** Le forme indeterminate in cui compaiono radici quadrate e cubiche si affrontano ricorrendo alle note formule:

$$(\sqrt{x}-y)(\sqrt{x}+y)=x-y^2$$
$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=x-y$$

(che discendono dal prodotto notevole $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$) e

$$(\sqrt[3]{x}-y)(\sqrt[3]{x^2}+y^2+\sqrt[3]{x}y)=x-y^3$$

(che discende dalla formula di scomposizione

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+b^2+ab).)$$

(1) Il limite
$$\lim_{x\to a}\frac{x-a}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}$$
si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Moltiplicando numeratore e denominatore per $(\sqrt{x}+\sqrt{a})$ si ottiene
$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)}=\lim_{x\to a}(\sqrt{x}+\sqrt{a})$$
$$=2\sqrt{a}.$$

(2) Il limite
$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$
si presenta nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Moltiplicando numeratore e denominatore per $(\sqrt{x+1}+2)$ si ottiene
$$\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+1-4)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=\frac{1}{4}.$$

(3) Il limite
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x$$
si presenta nella forma indeterminata $\infty-\infty$. Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{x^2+x+1}+x$ si ottiene
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}.$$
Dividendo ora per $\frac{1}{x}$ otteniamo
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}+1}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}$$

(4) Il limite
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$
si presenta nella forma indeterminata $\frac{1}{\infty-\infty}$. Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{x^2+x+1}-x$ si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{x^2+x+1-x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{x+1}.$$

Dividendo ora per $\frac{1}{x}$ otteniamo

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{x}}{1+\frac{1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1}{1+\frac{1}{x}}=-2$$

dove si é utilizzato il fatto che quando $x<0$ si ha che

$$\frac{\sqrt{\cdot}}{x}=-\sqrt{\frac{\cdot}{x^2}}.$$

Calcolare i seguenti limiti con radici:

(1) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2+2x+1}-2x$ (Ris.$\frac{1}{2}$)

(2) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x+3}-x$ (Ris.2)

(3) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+4x+3}+x$ (Ris. -2)

(4) $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{9x^2+2x+5}-3x$ (Ris.$\frac{1}{3}$)

(5) $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{9x^2+2x+5}+3x$ (Ris. $-\frac{1}{3}$)

(6) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5-x}}{3x}$ (Ris.$\frac{1}{3\sqrt{5}}$)

(7) $\lim_{x\to0}\frac{x+2-\sqrt{x^2-x+4}}{3x}$ (Ris.0)

(8) $\lim_{x\to0^+}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+x}$ (Ris. $-\infty$)

(9) $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+5}-3}$ (Ris.$\frac{\sqrt{3}}{4}$)

(10) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{2}}$ (Ris.$\frac{\sqrt{2}}{2}$)

6.4. **Potenze con esponente razionale.** Siano $m,n\in\mathbb{N}$, $n\neq0$.
Sia $x\in\mathbb{R}$, $x>0$ e sia $q=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ con $n\neq0$.
Se $q>0$ allora per ogni $x\geq0$ definiamo

$$x^q(=x^{m/n}):=\sqrt[n]{x^m};$$

se $q<0$ possiamo dare tale definizione solo per ogni $x>0$.

Le proprietá delle potenze espresse nel caso di esponenti $h,k\in\mathbb{Z}$ si estendono nel caso di esponente $p,q\in\mathbb{Q}$. Le proprietá delle potenze espresse nel caso di esponente intero si estendono nel caso di esponente razionale: per ogni $a,b\geq0$ (eventualmente non nulli) e per ogni $p,q\in\mathbb{Q}$ valgono le seguenti proprietá:

(1) $a^p\cdot a^q=a^{p+q}$
(2) $a^p:a^q=a^{p-q}$
(3) $(a^p)^q=a^{pq}$
(4) $a^p\cdot b^p=(ab)^p$
(5) Se $b\neq0$ allora $a^p:b^p=(\frac{a}{b})^p$

Osservazione 6.6. Le operazioni con le radici risultano più semplici se si scrivono le radici come potenze con esponente frazionario. Così si ottiene facilmente che per ogni $a, b \geq 0$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = (a^{1/m})^{1/n} = a^{1/m \cdot 1/n} = a^{1/mn} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = a^{1/n} \cdot b^{1/n} = (ab)^{1/n} = \sqrt[n]{ab}.$$

$$\sqrt[n]{a^{mn}} = (a^{mn})^{1/n} = a^{mn \cdot \frac{1}{n}} = a^m$$

$$\sqrt[n]{a^{mn+q}} = (a^{mn+q})^{1/n} = a^{(mn+q)\cdot\frac{1}{n}} = a^{mn\cdot\frac{1}{n}} \cdot a^{\frac{q}{n}} = a^m \sqrt[n]{a^q}$$

7. Esponenziale

Sia $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$ e sia $r \in \mathbb{R}$. Se $a > 1$ definiamo

$$a^x := \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x\}$$

Se $0 < a < 1$ definiamo

$$a^x := \inf\{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x\}.$$

Se $a = 1$ poniamo $a^x = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. La funzione $x \to a^x \in (0, +\infty)$ si dice **esponenziale di base** a.

Essa ha come dominio tutto $\mathbb{R}$, é una funzione continua e gode delle proprietà viste per le potenze, ossia

(1) $a^0 = 1$
(2) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
(3) $a^x : a^y = a^{x-y}$
(4) $(a^x)^y = a^{xy}$
(5) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
(6) $a^x : b^x = (\frac{a}{b})^x$.

Esempio 7.1. Non dovete avere dubbi riguardo i seguenti esempi:

(1) $(a^x)^2 = a^{2x} \neq a^{x^2}$
(2) $a^x + a^x = 2a^x \neq a^{2x}$
(3) $a^x + a^{-x} = a^x + \frac{1}{a^x} = \frac{a^x \cdot a^x + 1}{a^x} = \frac{a^{2x}+1}{a^x}$

Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1, \\ 0 & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < a < 1, \\ 0 & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

Ovviamente

$$\lim_{x\to-\infty} a^{-x} = \begin{cases} 0 & \text{se } a > 1, \\ +\infty & \text{se } 0 < a < 1. \end{cases}$$

L'esponenziale di base **e=numero di Nepero** é la funzione esponenziale più nota.

Calcolare i seguenti limiti:

(1) $\lim_{x\to2^+} e^{\frac{1-x}{x-2}}$ (Ris.0)
(2) $\lim_{x\to2^-} e^{\frac{1-x}{x-2}}$ (Ris. $+\infty$)

(3) $\lim_{x\to -1^-} \frac{e^x}{x^2-1}$ (Ris. $+\infty$)
(4) $\lim_{x\to -1^+} \frac{e^x}{x^2-1}$ (Ris. $-\infty$)
(5) $\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x}{x^2-1}$ (Ris. $+\infty$)
(6) $\lim_{x\to 1^-} \frac{e^x}{x^2-1}$ (Ris. $-\infty$)
(7) $\lim_{x\to 1} \frac{e^x}{x^2-2x+1}$ (Ris. $+\infty$)

Quando $a > 1$ e $n, m > 0$ qualsiasi, allora

- per $x \to +\infty$ la potenza $(a^x)^m = a^{mx}$ dell'esponenziale di base a va a $+\infty$ più velocemente della potenza x^n ossia
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^{mx}}{x^n} = +\infty$$
(equivalentemente
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{a^{mx}} = 0.)$$
- per $x \to -\infty$ la potenza $(a^x)^m = a^{mx}$ dell'esponenziale di base a va a 0 più velocemente della potenza di $(\frac{1}{x})^n$ ossia
$$\lim_{x\to-\infty} x^n a^{mx} = 0$$
(equivalentemente
$$\lim_{x\to+\infty} x^n a^{-mx} = 0.)$$

8. **Logaritmi**

Sia $a > 0, a \neq 1$ e $b > 0$. Si definisce logaritmo in base a di b (e si scrive $\log_a b$) l'unico numero reale x tale che $a^x = b$. Ossia
$$x = \log_a b \Longleftrightarrow a^x = b.$$
Dalla sua definizione e dalle proprietá delle potenze con esponente reale segue che per ogni $b, c > 0$ e per ogni $r \in \mathbb{R}$:

(1) $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$
(2) $\log_a b^r = r \log_a b$
(3) $\log_a (b/c) = \log_a b - \log_a c$
(4) $\log_a 1 = 0$
(5) $\log_a a = 1$

Osservazione 8.1. Si ricordi che **non esiste il logaritmo di** 0.

Esempio 8.2. (1) $\log_a^2 x = (\log_a x)^2 = (\log_a x) \cdot (\log_a x)$;
(2) $\log_a x^3 = 3 \log x$ per ogni $x > 0$;
(3) $\log_a x^2 = \log_a(x \cdot x) = 2 \log x$ per ogni $x > 0$.

(4) $\log_a \frac{1}{x} \neq \frac{1}{\log_a x}$. Invece $\log_a \frac{1}{x} = \log_a (x)^{-1} = -\log_a x$
(5) $\frac{\log_a x}{b} \neq \log_a(\frac{x}{b})$. Quindi $\frac{\log 3}{2} \neq \log \frac{3}{2}$ e $\frac{\log(2x^3)}{4x} \neq \frac{\log(x^2)}{2}$!!!

Osservazione 8.3. (1) Si osservi che in generale se n é dispari
$$\log_a x^n = n \log_a x \quad \text{per ogni } x > 0.$$
Invece se n é pari la funzione $f(x) = \log_a x^n$ é diversa dalla funzione $g(x) = n \log_a x$. Infatti la prima é definita per ogni $x \neq 0$ mentre la seconda é definita per ogni $x > 0$. Se n é pari la giusta relazione é la seguente:
$$\log_a x^n = n \log_a |x| \quad \text{per ogni } x \neq 0.$$

(2) In generale ogni numero reale $b \in \mathbb{R}$ puó essere scritto come
$$b = \log_a a^b.$$
Inoltre ogni numero reale $b > 0$ puó essere scritto anche come
$$b = a^{\log_a b}.$$

Esempio 8.4. Riflettete sulle seguenti uguaglianze*:*

(1) $e^{\log x} = x$;

(2) $e^{-2\log x} = e^{\log(x^{-2})} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$;

(3) $e^{x+3\log x} = e^x \cdot e^{\log x^3} = x^3 e^x$;

(4) $e^{-x+\log(2x+1)} = e^{-x} \cdot e^{\log(2x+1)} = (2x+1)e^{-x}$.

I seguenti limiti stabiliscono una scala tra le funzioni che tendono a $+\infty$: per $x \to +\infty$

(1) se $\alpha, \beta > 0$ allora
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log|x|)^\alpha}{|x|^\beta} = 0;$$
(2) se $\alpha, \beta > 0$ e $a > 1$ allora
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{|x|^\alpha}{a^{\beta x}} = 0;$$
(in particolare segue che se $\alpha, \beta > 0$ e $a > 1$ allora $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\log|x|)^\alpha}{a^{\beta x}} = 0$). Inoltre

(1) se $\alpha, \beta > 0$ allora
$$\lim_{x\to 0} (\log|x|)^\alpha |x|^\beta = 0$$
(2) se $a > 1$ allora $\forall \beta > 0$ e $\forall \alpha$
$$\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha a^{\beta x} = 0;$$
(3) se $a > 1$ allora $\forall \beta > 0$ e $\forall \alpha$ allora
$$\lim_{x\to-\infty} (\log|x|)^\alpha a^{\beta x} = 0$$

9. **Dominio di una funzione**

Nello studio del dominio di una funzione si tenga presente che

(1) i polinomi, la funzione esponenziale e^x, le funzioni $\sin x, \cos x$, il valore assoluto $|x|$, le radici $\sqrt[n]{x}$ con $n \in \mathbb{N}$ dispari sono definite per ogni $x \in \mathbb{R}$;
(2) la funzione $f(x) = \log x$ é definita per ogni $x > 0$;
(3) le radici $\sqrt[n]{x}$ con $n \in \mathbb{N}$ pari sono definite per ogni $x \geq 0$;
(4) la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ é definita per ogni $x \neq 0$.

In particolare se con $dom f(x)$ indichiamo il dominio di una fissata funzione f allora

(1) $dom \sqrt[3]{f(x)} = dom\ e^{f(x)} = dom|f(x)| = dom f(x)$;

(2) $dom \cos f(x) = dom \sin f(x) = dom f(x)$;

(3) $dom \log f(x) = \{x \in \mathbb{R} :\ x \in dom f(x) \ \wedge\ f(x) > 0\}$;

(4) $dom \sqrt{f(x)} = \{x \in \mathbb{R} :\ x \in dom f(x) \ \wedge\ f(x) \geq 0\}$;

(5) $dom \frac{1}{f(x)} = \{x \in \mathbb{R} :\ x \in dom f(x) \ \wedge f(x) \neq 0\}$;

(6) $dom \log |f(x)| = \{x \in \mathbb{R} :\ x \in dom f(x) \ \wedge f(x) \neq 0\}$;

(7) $dom \sqrt{|f(x)|} = dom f(x)$.

- Determinare il dominio delle seguenti funzioni:
  (1) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ $(x \neq 1)$
  (2) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ $(x \neq \pm 1)$
  (3) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$ $(x \geq -1, x \neq 1)$
  (4) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$ $(x > -1, x \neq 1)$
  (5) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$ $(x > 1)$
  (6) $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^2-1}$ $(x > -1, x \neq 1)$
  (7) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ $(x > 1, x < -1)$
  (8) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ $(\mathbb{R})$
  (9) $f(x) = \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x^2+1}}$ $(x > -1)$
  (10) $f(x) = \frac{\log(x+1)}{\sqrt{x^2-1}}$ $(x > 1)$
  (11) $f(x) = \frac{\log(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}$ $(x > 1, x < -1)$
  (12) $f(x) = \frac{\log(|x^2-1|)}{\sqrt{x^2+1}}$

$(x \neq \pm 1)$

(13) $f(x) = \frac{\log(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}$ $(\mathbb{R})$

(14) $f(x) = \sqrt{\log x}$ $(x \geq 1)$

(15) $f(x) = \log(\sqrt{x})$ $(x > 0)$

(16) $f(x) = \log(1 - \sqrt{x})$ $(0 \leq x < 1)$

(17) $f(x) = \log(2 - \sqrt{e^x})$ $(x < \log 4)$

(18) $f(x) = \log(|x^2 - 1|)$ $(x \neq \pm 1)$

(19) $f(x) = \sqrt{(}|x^2 - 1|)$ $\mathbb{R})$

(20) $f(x) = \log(|x^2 - 4|)$ $(x \neq \pm 2)$

(21) $f(x) = \sqrt{(}|x^2 - 4|)$ $(\mathbb{R})$

(22) $f(x) = \log(|x^2 - 1| + 1)$ $(\mathbb{R})$

(23) $f(x) = \log(\sqrt{x^2 - 1})$ $(x > 1,\ x < -1)$

(24) $f(x) = \sqrt{\log x^2 - 2}$ $(x \leq -e,\ x \geq e)$

(25) $f(x) = \sqrt{2 \log x - 2}$ $(x \geq e)$

(26) $f(x) = \sqrt{\log^2 x - 2}$ $(x \geq e^{\sqrt{2}},\ 0 < x \leq e^{-\sqrt{2}})$

(27) $f(x) = \frac{x-1}{e^x - 3}$ $(x \neq \log 3)$

(28) $f(x) = \frac{x-1}{e^{x^2} - 3}$ $(x \neq \pm\sqrt{\log 3})$

(29) $f(x) = \frac{x-1}{|e^x - 3| - 1}$ $(x \neq \log 4, x \neq \log 2)$

(30) $f(x) = \frac{x-1}{e^{2x} - 3}$ $(x \neq (\log 3)/2)$

(31) $f(x) = \frac{x-1}{e^{2x} + 3}$ $(\mathbb{R})$

(32) $f(x) = \frac{1}{3e^{x^2} - 4}$ $(x \neq \pm\sqrt{\log \frac{4}{3}})$

(33) $f(x) = \frac{1}{4e^{x^2} - 3}$ $(\mathbb{R})$

(34) $f(x) = \frac{1}{4e^{|x|} - 3}$ $(\mathbb{R})$

(35) $f(x) = \frac{1}{e^{2x} - 5e^x + 6}$ $(x \neq \log 3, x \neq \log 2)$

(36) $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{e^{2x}-3}}$ $(x > (\log 3)/2)$

(37) $f(x) = \frac{\sqrt{e^{2x}-3}}{2x-1}$ $(x \geq (\log 3)/2, x \neq 1/2)$

(38) $f(x) = \frac{\log(e^{2x}-3)}{2x-1}$ $(x > (\log 3)/2, x \neq 1/2)$

(39) $f(x) = \frac{\sqrt{e^{2x}+3}}{2x-1}$ $(x \neq 1/2)$

(40) $f(x) = \frac{1}{\log(|2x-1|)}$ $(x \neq 1/2, 1, 0)$

(41) $f(x) = \frac{1}{\log^2 x-3)}$ $(x \neq e^{\pm\sqrt{3}},\ x > 0)$

(42) $f(x) = \frac{1}{\log x^2-3}$ $(x \neq \pm e^{\frac{3}{2}},\ x \neq 0)$

(43) $f(x) = \frac{1}{2\log x-3}$ $(x \neq e^{\frac{3}{2}},\ x > 0)$

(44) $f(x) = \frac{1}{2\log|x|-3}$ $(x \neq \pm e^{\frac{3}{2}},\ x \neq 0)$

(45) $f(x) = \frac{1}{\log(|x|+1)}$ $(x \neq 0)$

(46) $f(x) = \frac{1}{\log(|x|-1)}$ $(x < -1, x > 1, x \neq \pm 2)$

(47) $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$ $(x \neq 1)$

(48) $f(x) = \log(e^x - 2)$ $(x > \log 2)$

(49) $f(x) = e^{\frac{\log(x+1)}{x-1}}$ $(x > -1, x \neq 1)$

(50) $f(x) = \frac{\log(|x|)}{x^2-2|x|+1}$ $(x \neq \pm 1, x \neq 0)$

(51) $f(x) = \frac{1}{2e^{-x}-e^x}$ $(x \neq \frac{\log 2}{2})$

(52) $f(x) = \frac{1}{x^2-|x|-2}$ $(x \neq \pm 2)$

- Studiare il segno delle funzioni dell'esercizio precedente.

Osservazione 9.1. Nello studio di funzioni, si procede allo studio del limite destro o sinistro o entrambi nei seguenti casi

(1) quando la funzione e' definita solo a destra o a sinistra di un punto, ossia il dominio contiene intervalli del tipo $x > x_0$, $x < x_0$;
(2) quando il valore x_0 annulla il denominatore.

Per esempio,

(1) la funzione $f(x) = \log(x^2 - 4) + |x - 3|$ ha dominio $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, per cui occorre fare i limiti per $x \to 2^+$ e per $x \to -2^-$.

(2) la funzione $f(x) = \frac{\log x - 1}{log^2 x - 4}$ ha dominio $(0, e^{-2}) \cup (e^2, +\infty)$ per cui occorre fare i limiti per $x \to 0^+$, per $x \to (e^{-2})^-$ e per $x \to (e^2)^+$.

(3) la funzione $f(x) = \frac{1}{e^x - 4}$ e' definita su $\mathbb{R} \setminus \{\log 4\}$ e occorre calcolare il limite per $x \to \log 4^+$ e il limite per $x \to \log 4^-$ perche' il punto $\log 4$ annulla il denominatore;

(4) la funzione $f(x) = \log |e^x - 4|$ e' definita su $\mathbb{R} \setminus \{\log 4\}$ e si fa il limite per $x \to \log 4$.

Tenendo presenti i limiti notevoli relativi a logaritmi ed esponenziale calcolare i seguenti limiti della forma $\frac{\infty}{\infty}$ o $0 \cdot \infty$

(1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log^3 x}{e^x} = 0$;

(2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x^4}{e^{3x}} = 0$;

(3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\log x^4} = +\infty$;

(4) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x^4 + e^x)}{x} = 1$;
(si osservi che $\log(x^4 + e^x) = \log((\frac{x^4}{e^x} + 1)e^x) = \log(\frac{x^4}{e^x} + 1) + \log e^x = ...$)

(5) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1}}{\log^2 x} = +\infty$;

(6) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[4]{e^x + 1}}{x^5 + 1} = +\infty$;

(7) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[4]{e^x} \log x^2 = 0$;

(8) $\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} \log x^2 = 0$;

(9) $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} x^2 = 0$;

(10) $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \log x = 0$;

(11) $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$;

(12) $\lim_{x \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0$;

9.1. **Applicazione del teorema dei carabinieri.** Calcolare i seguenti limiti tenendo presente che **il prodotto di una funzione infinitesima per una limitata é infinitesimo**:

(1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$ (Ris.0)
(2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos(x^4 + 1)}{\log x}$ (Ris.0)
(3) $\lim_{x \to +\infty} e^{-x^4} \sin x$ (Ris.0)
(4) $\lim_{x \to -\infty} \frac{\cos x + 1}{x^2} e^{x^3}$ (Ris.0)

9.2. **Il Teorema di De L'Hopital.** I limiti di funzione che si presentano nella forma indeterminata $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ si possono calcolare ricorrendo al teorema di De L'Hopital.

Osservazione 9.2.

- Prima di applicare il teorema di De L'Hopital derivando numeratore e denominatore, verificate se una qualche sostituzione vi permette di semplificare i calcoli. Per esempio il limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{2\sqrt{x}}-1}{\sqrt[4]{x}}$$
si calcola piu' facilmente se prima operate la sostituzione $\sqrt[4]{x} = y$ che lo trasforma nel limite
$$\lim_{y\to 0^+} \frac{e^{2y^2}-1}{y}.$$
Derivando numeratore e denominatore si ottiene
$$\lim_{y\to 0^+} \frac{4ye^{2y^2}}{1} = 0.$$
- a volte, dopo aver derivato numeratore e denominatore, il limite si potrebbe ripresentare di nuovo in una forma indeterminata. Si puo' allora riapplicare il Teorema di De l'Hopital. Per esempio se deriviamo numeratore e denominatore nel limite
$$\lim_{y\to 0^+} \frac{e^{2y^2}-1}{3y\sin y}$$
si ottiene
$$\lim_{y\to 0^+} \frac{4ye^{2y^2}}{3\sin y + 3y\cos y}$$
che si presenta ancora nella forma indeterminata $0/0$. Derivando di nuovo numeratore e denominatore si ottiene:
$$\lim_{y\to 0^+} \frac{(4+16y^2)e^{2y^2}}{3\cos y + 3\cos y - 3y\sin y} = 2/3.$$
- Il Teorema di De L'Hopital puo' essere applicato anche ai limiti di prodotti di funzioni $f\cdot g$ che si presentano nelle forme indeterminate $0\cdot\infty$ osservando che
$$f\cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}} = \frac{g}{\frac{1}{f}}.$$
Per esempio il limite $\lim_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x}}$ che si presenta nella forma indeterminata $0\cdot\infty$ puo' essere scritto nella forma
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}$$
che tramite la sostituzione $y = \frac{1}{x}$ diventa
$$\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y}.$$
Derivando numeratore e denominatore si ottiene
$$\lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{1} = +\infty.$$

Ricorrendo eventualmente al Teorema di De L'Hopital calcolare i seguenti limiti

(1) $\lim_{x\to+\infty} x^2\log(1+\frac{1}{x^2}) = 1$ (porre $\frac{1}{x^2} = y$)

(2) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x} = 1/2$

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{\sin^2 3x} = \frac{2}{9}$

(4) $\lim_{x\to +\infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$

(5) $\lim_{x\to 0} \frac{\log \cos x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

(6) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \log \cos x}{\sin x^2} = \frac{3}{2}$

(7) $\lim_{x\to 0} \frac{x \arctan x}{e^{3x^2}-1} = \frac{1}{3}$

(8) $\lim_{x\to 0} (\frac{1}{x\tan x} - \frac{1}{x \sin x}) = -\frac{1}{2}$

(9) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x^2}-1}{x \sin x} = 2$

(10) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+3x^2)}{x \sin x} = 3$

(11) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x \tan x} = 1$

(12) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x^2}{1-\cos 3x} = \frac{2}{9}$

(13) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan 2x}{1-\cos\sqrt{x}} = 4$

(14) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin\sqrt{x}} = 1$

(15) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{\sin x^2} = 1$

(16) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}-1}{x+\sqrt{x}} = 1$

(17) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\sqrt{x}}{e^{\sqrt{x}}-1-\sqrt{x}} = 2$

(18) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}}-1-\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{2}$

(19) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos\sqrt{x}-\frac{1}{2}x}{x^2} = \frac{1}{12}$

(20) $\lim_{x\to +\infty} (x^2+x+1) \sin \frac{2}{x^2} = 2$ (porre $y = \frac{1}{x}$).

10. **Studio di funzioni**

(1) $f(x) = |x|e^{-x^2}$

Dominio: $\mathbb{R}$;

Segno: poiché $|\cdot|$ e $\exp(\cdot)$ sono funzioni positive, allora $f \geq 0$ su tutto $\mathbb{R}$;

Simmetrie: poiché $f(x) = f(-x)$ il grafico delle funzione é simmetrico rispetto all' asse y ossia la funzione f é una funzione pari. Posso allora studiare f solo per $x \geq 0$ e poi ribaltare rispetto all' asse y il grafico ottenuto su $x \geq 0$;

Asintoti: Non esistono asintoti verticali. Applicando uno dei precedenti limiti notevoli si ha che $\lim_{x\to+\infty} f(x)(= \lim_{x\to-\infty} f(x)) = 0$, ossia $y = 0$ é asintoto orizzontale a destra e a sinistra.

Derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x^2}(1-2x^2) & \text{se } x > 0, \\ \\ e^{-x^2}(2x^2-1) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Nel punto $x = 0$ non si possono applicare le regole di derivazione in quanto, in generale, i punti che annullano una funzione g sono candidati ad essere punti in cui la funzione $|g|$ non é derivabile. Studiando invece il limite della derivata a destra e a sinistra si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{-x^2}(1-2x^2) = 1$$

mentre

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{-x^2}(2x^2-1) = -1$$

ossia $x = 0$ é un punto in cui la funzione non é derivabile (quando esistono $\lim_{x\to x_0^-} f' = l_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x\to x_0^+} f' = l_2 \in \mathbb{R}$ e $l_1 \neq l_2$ il punto x_0 si dice punto angoloso);

Segno della derivata prima: Per $x > 0$ si ha che $f' \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ (mentre per $x < 0$ si ha che $f' \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$). In particolare su $[0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$ e su $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}]$ f é crescente mentre su $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$ e su $[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ f é decrescente. Quindi i punti $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ sono punti di massimo (assoluto) con $f(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{1}{2}}$. Invece $x = 0$ é punto di minimo (assoluto) con $f(0) = 0$.

Derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}(2x^2-3) & \text{se } x > 0, \\ \\ -2xe^{-x^2}(2x^2-3) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Studiando il segno di f'' si deduce che $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ sono punti di flesso (a tangente obliqua).

(2) $f(x) = \sqrt{x^2 + |x+3|} - x$

Dominio: poiché $x^2 + |x+3| \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ il dominio di f é tutto $\mathbb{R}$;

Segno: poiché $\sqrt{x^2+|x+3|} \geq \sqrt{x^2} \geq x$ allora $f \geq 0$ su tutto $\mathbb{R}$;

Asintoti: Non esistono asintoti verticali.

Osserviamo poi che per $x \geq -3$ vale che $|x+3| = x+3$ mentre per $x < -3$ si ha che $|x+3| = -x-3$. Allora

$$f(x) = \begin{cases} (\sqrt{x^2+x+3} - x & \text{se } x \geq -3, \\ \\ (\sqrt{x^2-x-3} - x & \text{se } x < -3. \end{cases}$$

Allora

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x+3}-x)(\sqrt{x^2+x+3}+x)}{\sqrt{x^2+x+3}+x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+3-x^2}{\sqrt{x^2+x+3}+x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+x+3}+x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ossia $y = \frac{1}{2}$ é asintoto orizzontale a sinistra.

Essendo $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, studiamo l'esistenza di un asintoto obliquo a $-\infty$. Vale che

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-x-3}-x}{x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^2-x-3}{x^2}} - 1 = -2 \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} (f(x)+2x) &= \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x-3}+x \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{(\sqrt{x^2-x-3}-x)(\sqrt{x^2-x-3}+x)}{\sqrt{x^2-x-3}-x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x-3-x^2}{\sqrt{x^2-x-3}-x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x-3}{\sqrt{x^2-x-3}-x} = \\ &= \lim_{y\to+\infty} \frac{+y-3}{\sqrt{y^2+y-3}+y} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ossia $y = -2x + \frac{1}{2}$ é asintoto obliquo a destra.

Derivata prima:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x+1}{\sqrt{2x^2+x+3}} - 1 & \text{se } x > -3, \\ \\ \frac{2x-1}{\sqrt{2x^2-x-3}} - 1 & \text{se } x < -3. \end{cases}$$

Nel punto $x = -3$ non si possono applicare le regole di derivazione. Studiando invece il limite della derivata a destra e a sinistra si ha che

$$\lim_{x\to-3^+} f'(x) = -\frac{5}{6} - 1$$

mentre

$$\lim_{x\to -3^-} f'(x) = -\frac{7}{6} - 1$$

ossia $x = -3$ é un punto angoloso;

Segno della derivata prima: Per $x > -3$ si ha che

$$f' \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+x+3} \leq x + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x - 1 - 2\sqrt{x^2+x+3} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x+3 \geq 0 \\ x + \frac{1}{2} \geq 0 \\ x^2+x+3 \leq (x+\frac{1}{2})^2 \end{cases}$$

Ora tale sistema é impossibile (controllare!). Quindi per $x > -3$ si ha che $f'(x) \leq 0$. Analogamente si ha che per $x < -3$ $f'(x) \leq 0$ (controllare!). In particolare f é decrescente su tutto $\mathbb{R}$ e non ha né punti di massimo e né punti minimo relativo. In particolare questo implica che la f non ha intersezioni con gli asintoti (altrimenti dovrebbe avere dei minimi). Omettiamo lo studio della derivata seconda.

(3) $f(x) = \frac{1}{x-1} e^{\frac{1}{x-1}}$

Dominio: $x \neq 1$;

Segno: $f(x) \geq 0$ $\forall x > 1$;

Asintoti: si osservi che $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$ mentre $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$. Cosí risulta $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ e $x = 1$ é asintoto verticale. Invece $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ si presenta nella forma indeterminata $\infty \cdot 0$ (in quanto $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$). Attraverso il cambio di variabile $y = \frac{1}{x-1}$ si ottiene $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{y\to -\infty} ye^y = 0$. Essendo poi $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = 0$ si ha che $y = 0$ é asintoto orizzontale (a destra e a sinistra).

Derivata prima: $f'(x) = \frac{-x}{(x-1)^3} e^{\frac{1}{x-1}}$;

Segno della Derivata prima: $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$ ossia f é crescente su $[0, 1)$ e decrescente su $(-\infty, 0]$ e su $(1, +\infty)$. Quindi $x = 0$ é un punto di minimo (assoluto) della funzione, mentre non esitono punti di massimo relativo. Si deduce cosí che non ci sono punti di intersezione con l'asintoto orizzontale. Omettiamo lo studio della derivata seconda.

(4) $f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{1}{x^2}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

Dominio: La funzione é definita su tutto $\mathbb{R}$. Si osservi inoltre che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ ossia f é continua in $x = 0$;

Simmetrie: poiché $f(-x) = -f(x)$ il grafico delle funzione é simmetrico rispetto all'origine;

Segno: $f(x) \geq 0$ $\forall x \geq 0$;

Asintoti: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ quindi non esistono asintoti orizzontali. Invece

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x\to\pm\infty} x(e^{-\frac{1}{x^2}} - 1) = \lim_{y\to 0} \frac{e^{-y^2} - 1}{y}.$$

Usando il teorema di De L'Hopital si ha $\lim_{y\to 0} \frac{-2ye^{-y^2}}{1} = 0$. Quindi $y = x$ é asintoto obliquo (a destra e a sinistra).

Derivata prima: Per ogni $x \neq 0$ $f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}(1 + \frac{2}{x^2})$. Poiché

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1+2y}{e^y} = 0$$

dove si é posto $y = \frac{1}{x^2}$ si ha che la funzione é derivabile in 0 e $f'(0) = 0$.

Segno della derivata prima: $f' > 0$ $\forall x \neq 0$. Quindi f é sempre crescente e $x = 0$ é un punto di flesso (a tangente orizzontale).

Derivata seconda: Per ogni $x \neq 0$ $f''(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}(\frac{4-2x^2}{x^5})$ che é positiva per $x \leq -\sqrt{2}$, $0 < x \leq \sqrt{2}$ e negativa su $-\sqrt{2} \leq x < 0$ e $x \geq \sqrt{2}$. Segue che $x = \pm\sqrt{2}$ sono punti di flesso (a tangente obliqua).

(5) $f(x) = \log(x+1) - \log(x-1)$

Dominio: $\begin{cases} x+1 > 0 \\ \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1;$

Segno: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \log\frac{x+1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} \geq 0$ per ogni $x > 1$

Asintoti: poiché $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ si ha che $x = 1$ é asintoto verticale. Poi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \log 1 = 0$ e quindi $y = 0$ é asintoto orizzontale;

Derivata prima: $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{-2}{x^2-1}$

Segno della derivata prima: $f'(x) < 0$ $\forall x > 1$ e quindi f é decrescente su $(1, +\infty)$;

Derivata seconda: $f'(x) = \frac{4x}{(x^2-1)^2}$ che é positiva su $(1, +\infty)$.

(6) $f(x) = \log\frac{x+1}{x-1}$

Dominio: $\frac{x+1}{x-1} > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$

Segno: $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow \log\frac{x+1}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} \geq 0 \Leftrightarrow x > 1$

Asintoti: poiché

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$$

si ha che $x = 1$ e $x = -1$ sono asintoti verticale. Poi $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \log 1 = 0$ e quindi $y = 0$ é asintoto orizzontale (a destra e a sinistra);

Derivata prima: $f'(x) = \frac{-2}{x^2-1}$

Segno della derivata prima: $f'(x) < 0$ $\forall x \in dom f(x)$ e quindi f é decrescente su $(-\infty, -1)$ e su $(1, +\infty)$;

Derivata seconda: $f'(x) = \frac{4x}{(x^2-1)^2}$ che é positiva su $(1, +\infty)$ ed negativa su $(-\infty, -1)$.

(7) $f(x) = \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \frac{1}{2}x - 4 - \frac{\sqrt{5}}{2}$

Dominio: imponendo $\frac{x+1}{x-1} > 0$ si ha che la funzione é definita su $x < -1$ e $x > 1$;

Segno: verrá dedotto dalle proprietá successive;

Asintoti: poiché $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$ si ha che le rette $x = \pm1$ sono asintoti verticali della funzione. Poi $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ ossia non esistono asintoti orizzontali. Infine

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - \frac{1}{2}x) = -4 - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

ossia esiste l'asintoto obliquo e coincide con la retta $y = \frac{1}{2}x - 4 - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Derivata prima: Per ogni $x < -1 \ \vee \ x > 1$ si ha che

$$f'(x) = -\frac{2}{(x^2-1)} + \frac{1}{2} = \frac{x^2-5}{2(x^2-1)}$$

Segno della derivata prima: $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{5}$ e $x \leq -\sqrt{5}$ da cui $x = \sqrt{5}$ é un punto di minimo relativo della funzione e $x = -\sqrt{5}$ é un punto di massimo relativo della funzione; poiché $f(\sqrt{5}) = \log\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} - 4 < 0$ e $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si deduce che la funzione f deve intersecare l'asse delle x in due punti $1 < x_1 < \sqrt{5}$ e $x_2 > \sqrt{5}$ e che per $1 < x < x_1$ e $x > x_2$ la funzione é positiva. Invece essendo $\sqrt{5}$ punto di massimo relativo con $f(\sqrt{5}) < 0$ si ha che $f < 0$ su $(-\infty, -1)$;

Derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{4x}{(x^2-1)^2}$$

da cui segue che $f''(x) \geq 0$ per $x \geq 0$ ossia la funzione é convessa per $x > 1$.

(8) $f(x) = \sqrt{\frac{\log x}{1+\log x}}$

Dominio:

$$\begin{cases} x > 0 \\ 1 + \log x \neq 0 \\ \frac{\log x}{1+\log x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq \frac{1}{e} \\ x < \frac{1}{e} \vee x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{e} \ \vee \ x \geq 1.$$

Segno: $f \geq 0$ su tutto il suo dominio;

Asintoti: dividendo numeratore e denominatore per $\log x$ si ottiene che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\log x}+1}} = 1$$

Poi $\lim_{x\to \frac{1}{e}^-} f(x) = +\infty$ ossia $x = \frac{1}{e}$ é asintoto verticale. Infine

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\log x}+1}} = 1$$

ossia $y = 1$ é asintoto orizzontale.

Derivata prima: Per ogni $0 < x < \frac{1}{e} \ \vee \ x > 1$ si ha che

$$f'(x) = \frac{1}{2x(1+\log x)^2}\sqrt{\frac{1+\log x}{\log x}}$$

Segno della derivata prima: $f'(x) > 0$ per ogni x nel dominio di f per cui f é crescente su $0 < x < \frac{1}{e}$ e su $x \geq 1$. Inoltre $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{1}{e}^-} f'(x) = +\infty$. Omettiamo lo studio della derivata seconda.

(9) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x$

Dominio: $x \neq 0$;

Segno: dedurremo il segno della funzione dalle proprietá sottostanti;

Asintoti: essendo $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ si ha che $x = 0$ é asintoto verticale (a destra di 0). Invece $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$. Poi $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$. Quindi non esistono asintoti orizzontali. Invece $\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} - 1$ e $\lim_{x\to -\infty} f(x) + x = \lim_{x\to +\infty} f(x) + x = 1$ da cui $y = -x + 1$ é asintoto obliquo (a destra e a sinistra).

Derivata prima: Per ogni $x \neq 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - 1.$$

Segno della derivata prima: Per ogni $x \neq 0$ $f' < 0$ da cui f é decrescente su $(-\infty, 0)$ e su $(0, +\infty)$. In particolare dal comportamento di f a $-\infty$ e a 0^-e dalla continuitá della funzione segue che f é positiva su $(-\infty, 0)$. Invece dal comportamento di f a $+\infty$ e a 0^+ e dalla continuitá della funzione segue che esiste un punto $x_0 > 0$ tale che $f(x_0) = 0$, $f > 0$ su $(0, x_0)$ e $f < 0$ su $(x_0, +\infty)$.

Derivata seconda: Per ogni $x \neq 0$

$$f''(x) = (\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3})e^{\frac{1}{x}}$$

da cui
$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1+2x}{x^4} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$$

10.1. **Esercizi proposti.** Studiare le seguenti funzioni:

(1) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+x-2}}{x}$

(2) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x-2}{x^2-1}}$

(3) $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$

(4) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3-1}}{x}$

(5) $f(x) = \frac{\sqrt{|x^2-2x|}}{x}$

(6) $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x-4}$

(7) $f(x) = e^{\frac{1}{x-2}}$

(8) $f(x) = (x-2)e^{\frac{x}{x-1}}$

(9) $f(x) = \frac{e^{-x}x}{x+1}$

(10) $f(x) = x^2e^{-x}$

(11) $f(x) = xe^{\frac{1}{1-x^2}}$

(12) $f(x) = \frac{e^{2x}-1}{e^{3x}-2}$

(13) $f(x) = x - 1 + \frac{4}{2+|x|}$

(14) $f(x) = \sqrt{|x^2-4|} + x$

(15) $f(x) = \frac{|x-3|}{x^2-1}$

(16) $f(x) = \frac{2|x|-x^2-x}{x+1}$

(17) $f(x) = \log(1+e^{-x})$

(18) $f(x) = \log|x^2-1| + x$

(19) $f(x) = \log^2(x^2-1)$

(20) $f(x) = \frac{1+\log x}{|x|}$

(21) $f(x) = \frac{1+\log|x|}{|x|}$

(22) $f(x) = |\frac{1+\log x}{x}|$

(23) $f(x) = \log(1+x) - \frac{2x}{2+x}$

(24) $f(x) = \frac{1}{\log|x-3|}$

(25) $f(x) = \sqrt{|2\log x - 3|}$

(26) $f(x) = \log(e^x - 1) + x$

(27) $f(x) = \log(e^x + 1) + x$

(28) $f(x) = \log(x^2 - 1) + |x - 2|$

(29) $f(x) = \log\left(\frac{2x-1}{x-4}\right) - 3x + 1$

(30) $f(x) = \log(\frac{2x-1}{x+3}) - x + 1$

(31) $f(x) = e^{\frac{1}{x^3}} - 2x + 1$

(Francesca Prinari) Dipartimento di Matematica e Informatica, Universitá di Ferrara
Email address, Francesca Prinari: `francesca.prinari@unife.it`