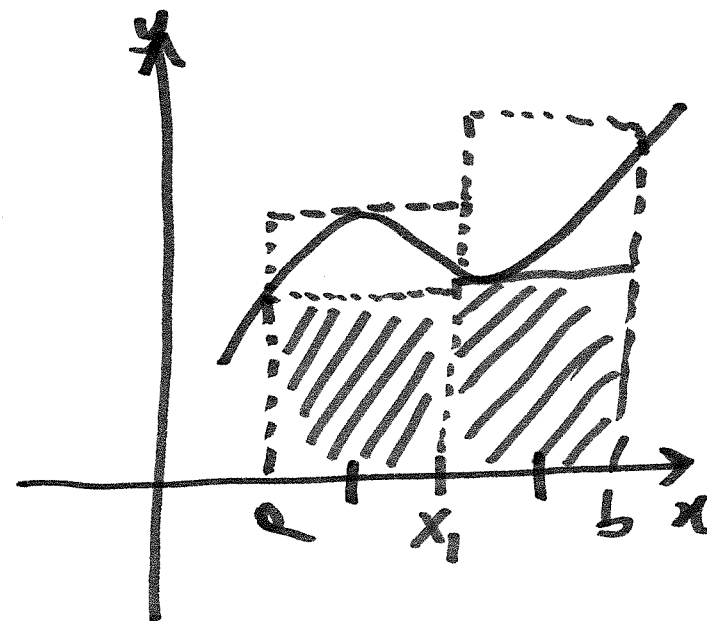
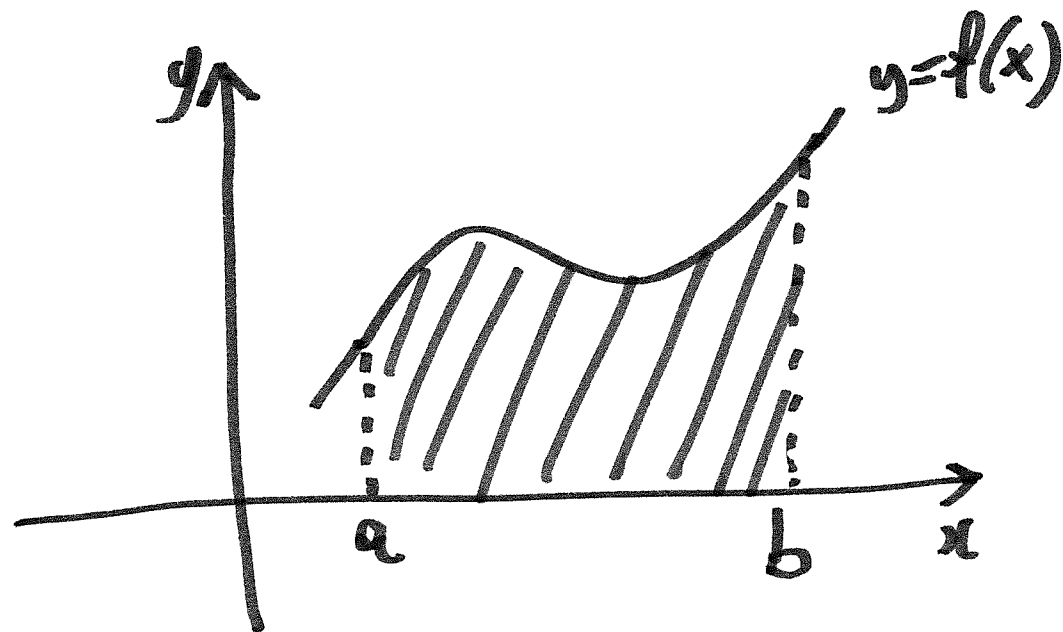


INTEGRALI DEFINITI

INTEGRALE DI RIEMANN



CONSIDERIAMO IL MINIMO DI $f(x)$ sull'intervallo $[a, x_1]$
e il MASSIMO di $f(x)$ sull'intervallo $[a, x_1]$.

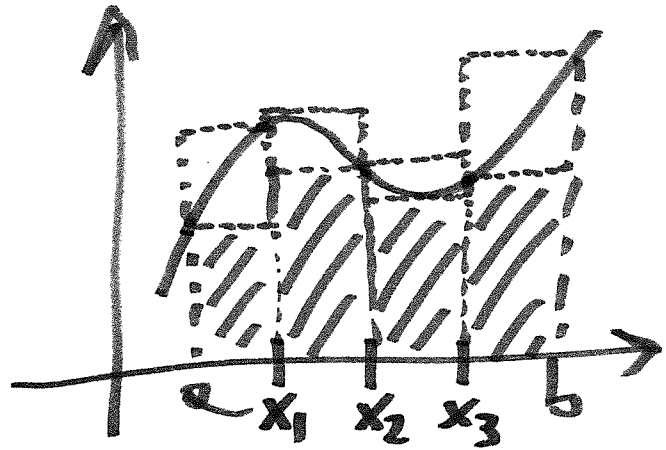
L'area del rettangolo di base $[a, x_1]$ e altezza al minimo è

$$(x_1 - a) f(\min) \leq (x_1 - a) f(\max) \leftarrow \text{area rettangolo}$$

$$(b - x_1) f(\min) \leq (b - x_1) f(\max)$$

di base $[a, x_1]$
e altezza al
minimo

L'area cercata è compresa tra la somma delle aree con il minimo e la somma delle aree con il massimo.



$$(x_1 - a) f(\min_{m \in [a, x_1]}) + \\ (x_2 - x_1) f(\min_{m \in [x_1, x_2]}) + \\ (x_3 - x_2) f(\min_{m \in [x_2, x_3]}) + \\ (b - x_3) f(\min_{m \in [x_3, b]}) =$$

Area $\leq$ area cercata $\leq$ Area envelope con
i punti di massimo

Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n intervallini,

poniamo $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ dove $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$

Su ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$ prendiamo il minimo e

calcoliamo $(b - x_{n-1}) f(\min) + (x_{n-1} - x_{n-2}) f(\min) + \dots + (x_1 - a) f(\min) = A_{\frac{1}{n}}$

Se consideriamo i punti di massimo su ogni intervallo $[x_{i-1}, x_i]$:

calcoliamo $(b - x_{n-1})f(\max) + (x_{n-1} - x_{n-2})f(\max) + \dots + (x_1 - a)f(\max) = A_2$

Allora

$$A_1 \leq \text{area cercata} \leq A_2$$

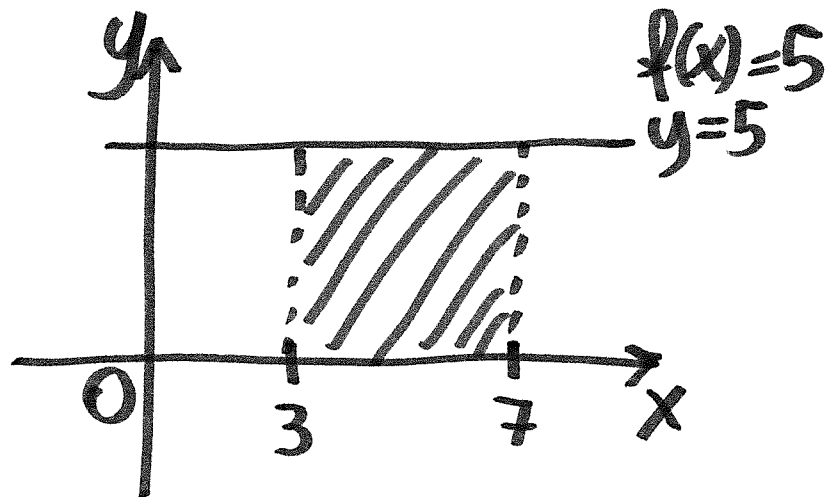
RIEMANN dimostra che se $n \rightarrow +\infty$, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} A_2 = \int_a^b f(x) dx$$

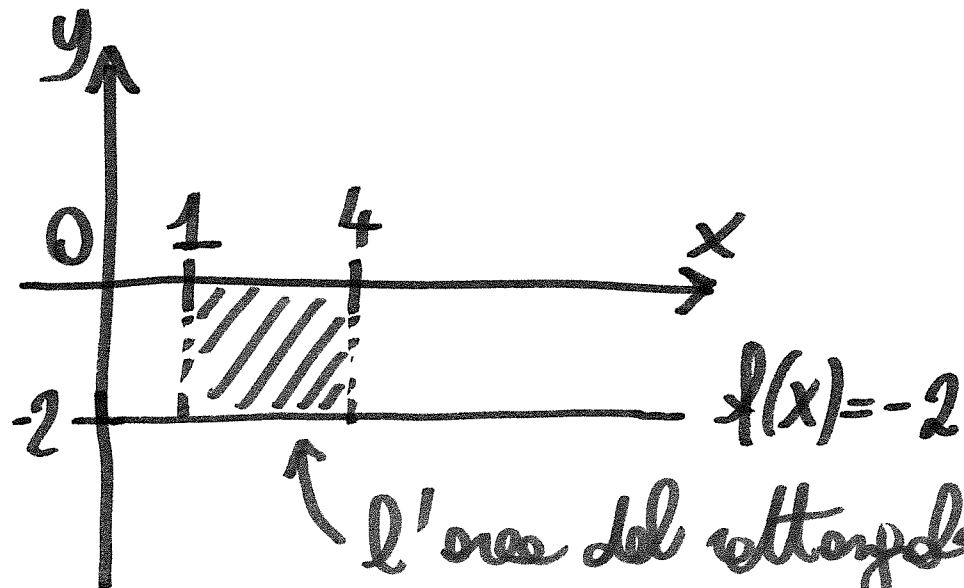
sull'ipotesi che la funzione $f(x)$ sia CONTINUA.

Si dice $\int_a^b f(x) dx$ è l'INTEGRALE DEFINITO di $f(x)$
SULL'INTERVALLO $[a, b]$

ESEMPIO

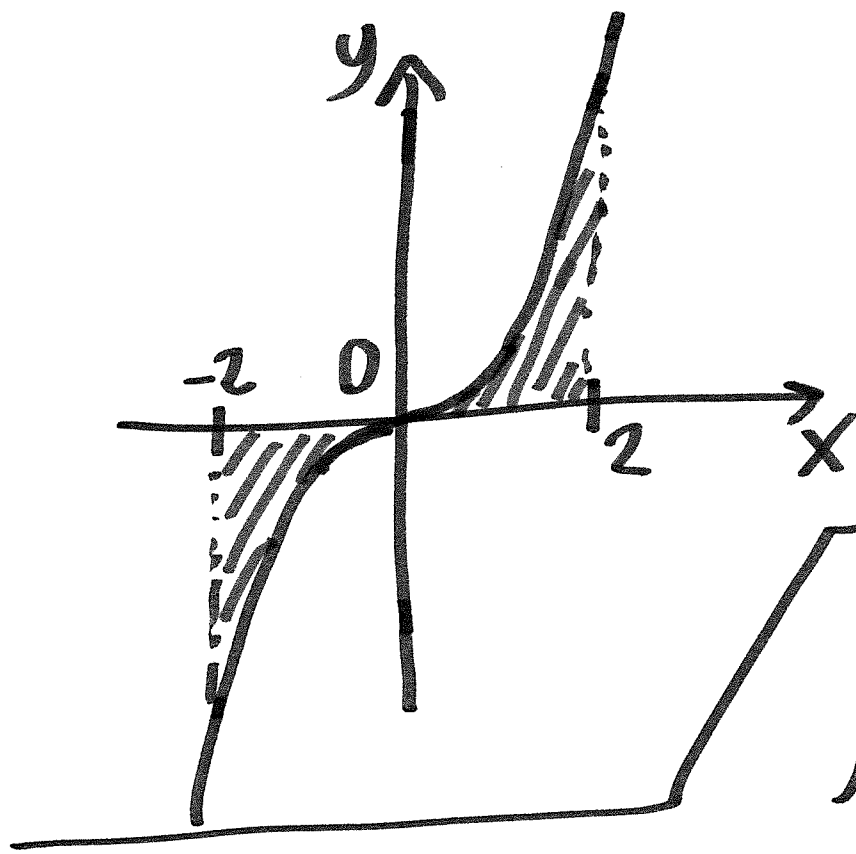


$$\int_3^7 5 \, dx = (7-3) \cdot 5 = 4 \cdot 5 = 20$$



$$\int_1^4 -2 \, dx = (4-1) \cdot (-2) = -6$$

l'area del rettangolo è $-(-6)=6$



$$f(x) = x^3$$

f è una funzione DISPARI

$$\int_{-2}^2 x^3 dx = 0$$

$a > b$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad \text{PER CONVERSIONE}$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

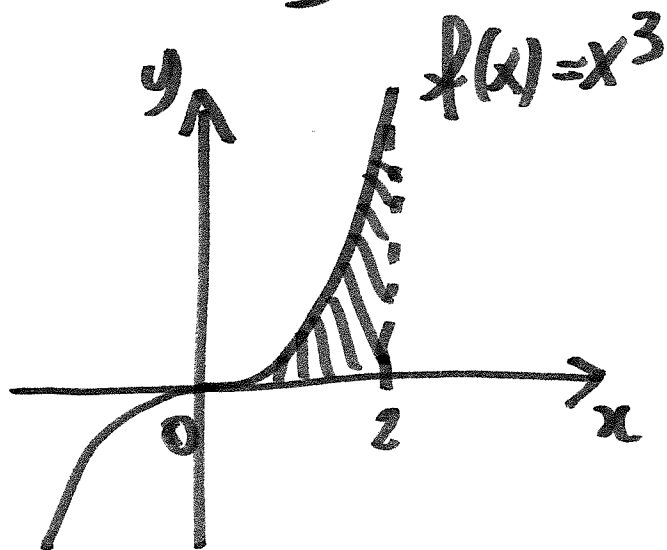
TEOREMA Sia $F(x)$ una PRIMITIVA di $f(x)$. Allora

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F]_a^b = F \Big|_a^b$$

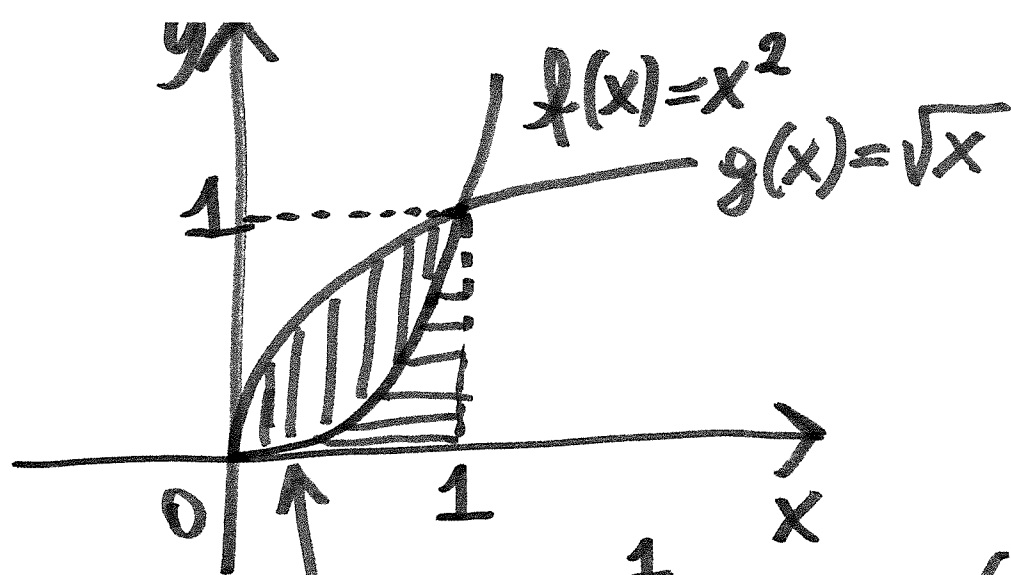
ESEMPIO

$$\int_3^7 5 dx = [5x]_3^7 = 5 \cdot 7 - 5 \cdot 3 = 35 - 15 = 20$$

$$\int_1^4 -2 dx = [-2x]_1^4 = (-2) \cdot 4 - (-2) \cdot 1 = -8 + 2 = -6$$



$$\int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{16}{4} - \frac{0}{4} = 4$$



$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \text{Area } \textcircled{\text{||||}} + \text{Area } \textcircled{\text{|||||}}$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \text{Area } \textcircled{\text{|||||}}$$

$$\text{Area } \textcircled{\text{||||}} = \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx =$$

$$= \left[\frac{2}{3} \sqrt{x^3} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \int \sqrt{x} dx &= \int x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C \end{aligned}}$$

ESEMPIO studiare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{2x^2 + 8}{x}$$

e calcolare l'area compresa tra il grafico e la retta $y=10$.

Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ f è DISPARI $f(-x) = -f(x)$

Non c'è zero intersezione con assi

$f(x) > 0$ per $x > 0$ e $f(x) < 0$ per $x < 0$

ASINTOTO verticale $x=0$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

Non c'è asintoto orizzontale, ma c'è asintoto obliquo $y=2x$ $\begin{cases} m=2 \\ q=0 \end{cases}$

Derivato: $f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2}$

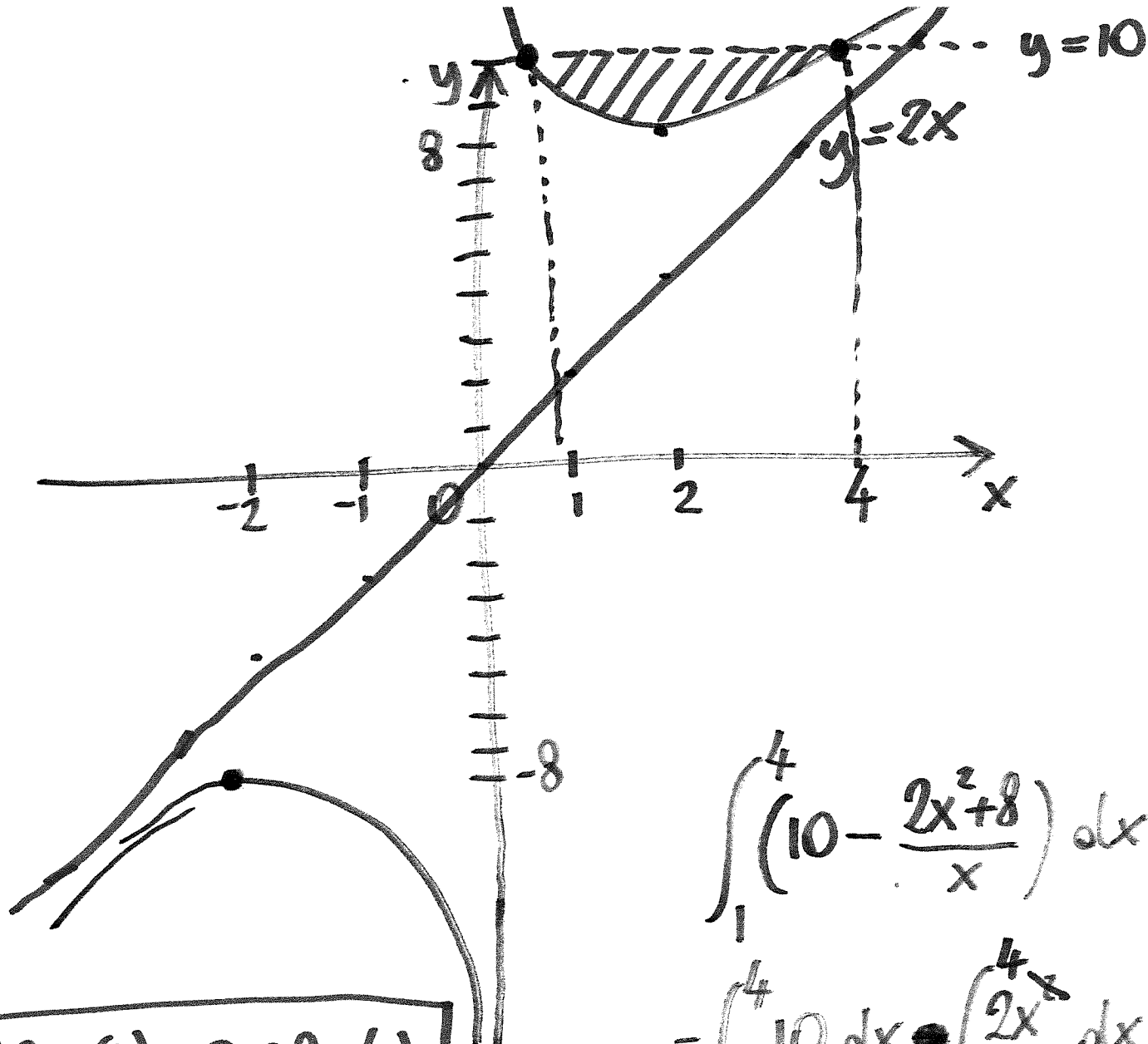
MAX in $(-2, -8)$

min in $(2, 8)$

	-2	0	2	
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$$f''(x) = \frac{16}{x^3}$$

	0	
f''	-	+
f	$\cap$	$\cup$



$$f(x) = \frac{2x^2 + 8}{x} = 10$$

$$\frac{2x^2 + 8}{x} - 10 = 0$$

$$\frac{2x^2 + 8 - 10x}{x} = 0$$

$$x(x^2 - 5x + 4) = 0$$

$$x_1 = 1 \quad x_2 = 4$$

$$\int_1^4 \left(10 - \frac{2x^2 + 8}{x}\right) dx = \int_1^4 \text{---} dx$$

$$= \int_1^4 10 dx - \int_1^4 \frac{2x^2}{x} dx - \int_1^4 \frac{8}{x} dx =$$

$$= [10x]_1^4 - [x^2]_1^4 - 8 [\log|x|]_1^4 = 30 - 15 - 8 \log(4) = 15 - 8 \log(4)$$

$$8 \log(4) = 8 \cdot 2 \log(2) = 16 \log(2)$$

NOTA BENE: integrando per sostituzione un'integrale DEFINITO è necessario cambiare gli estremi di integrazione:

ESEMPIO

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x + 1} dx = (*)$$

$$= \int_1^e \frac{1}{t+1} \cdot \frac{1}{t} dt =$$

$$= \left[\log|t| - \log|t+1| \right]_1^e =$$

$$= \log(e) - \log(e+1) - \log(1) + \log(2) =$$

$$\boxed{= 1 - \log(e+1) + \log(2)} = (*)$$

$$x=0 \Rightarrow t=e^0=1$$

$$x=1 \Rightarrow t=e^1=e$$

$$\int \frac{1}{e^x + 1} dx =$$

$$= \int \frac{1}{t+1} \cdot \frac{1}{t} dt =$$

$$= \int \frac{1}{t(t+1)} dt =$$

$$= \int \frac{1}{t} dt + \int \frac{-1}{t+1} dt =$$

$$= \log|t| - \log|t+1| + C$$

SOSTITUZIONI: poniamo

$$e^x = t$$

$$x = \log(t)$$

$$dx = \frac{1}{t} dt$$

$$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} =$$

$$= \frac{At + A + Bt}{t(t+1)} =$$

$$= \frac{(A+B)t + A}{t(t+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow B=-1$$