

CALCOLO INTEGRALE

26 / 11 / 2018

PRIMITIVA DI UNA FUNZIONE

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione (D è il dominio).

Una funzione $F(x)$ si dice una primitiva di $f(x)$ se

① $F(x)$ è derivabile.

② $F'(x) = f(x)$.

ESEMPI

① Se $f(x) = 1$ è la funzione costante,
una primitiva di $f(x)$ è la funzione $F(x) = x$.

Infatti $F'(x) = 1 = f(x)$.

② Sia $f(x)=2x$. Allora $F(x)=x^2$, perché $F'(x)=2x$,
è una primitiva di $f(x)$.

③ Una primitiva della funzione $f(x)=\cos(x)$ è $F(x)=\sin(x)$.
Perché $\sin(x)$ ha derivata $\cos(x)$.

PRIMITIVE DI UNA FUNZIONE $f(x)$

Sia $F(x)$ una primitiva di $f(x)$. Allora anche

$$F(x)+C$$

dove C è una costante reale

è primitiva di $f(x)$ perché $(F(x)+C)' = F'(x)+0 = f(x)$

Si può dimostrare che, se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora
tutte le primitive di $f(x)$ sono della forma $F(x)+C$.

Idea se $G(x)$ è un'altro primitivo di $f(x)$, allora
consideriamo $F(x) - G(x)$

lo derivato $(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$.

Si dimostra che $F(x) - G(x) = C$ è costante.

Quindi $F(x) = G(x) + C$.

DEFINIZIONE Si dice INTEGRALE INDEFINITO di $f(x)$
e si scrive

$$\int f(x) dx = \{ \text{primitive di } f(x) \}$$

l'insieme di tutte le primitive di $f(x)$

NOTAZIONE se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, scriviamo

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{dove } C \text{ è una costante}$$

ESEMPI

$$\int 1 dx = x + C \quad \int 2x dx = x^2 + C$$

PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI

$$\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

se $k \in \mathbb{R}$,

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

ESEMPIO

$$\int x dx = \int \frac{1}{2} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int 2x dx = \frac{1}{2} x^2 + C = \frac{x^2}{2} + C$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

$$\int x^2 dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$(x^2)' = 2x^{2-1}$$

$$\int x^2 dx = \frac{1}{2+1} \int (2+1)x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C$$

$$(x^{2+1})' = (2+1)x^2$$

per $2 \neq -1$

$$(\log(x))' = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

$$(\log(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

FUNZIONI COMPOSITE

$$(f(x)^{2+1})' = (2+1)f(x)^2 f'(x)$$

$$\int f(x)^2 f'(x) dx = \frac{1}{2+1} \int (2+1)f(x)^2 f'(x) dx = \frac{f(x)^{2+1}}{2+1} + C$$

$$(\log(f(x)))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = (\log(-f(x)))$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$$

ESEMPIO

$$\int \frac{5x^2 - 3x + 2}{x} dx = \int \frac{5x^2}{x} - \frac{3x}{x} + \frac{2}{x} dx = \int 5x dx - \int 3 dx + \int \frac{2}{x} dx:$$

$$= 5 \frac{x^2}{2} - 3x + 2 \log |x| + C = \frac{5}{2} x^2 - 3x + 2 \log |x| + C$$

$$\int \frac{1}{3x-4} dx = \int \frac{1}{3} \frac{3}{3x-4} dx = \frac{1}{3} \int \frac{3}{3x-4} dx = \frac{1}{3} \log |3x-4| + C$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) + C$$

INTEGRALE
PER PARTI

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

ESEMPIO $\int x \log(x) dx =$

$$= \frac{x^2}{2} \log(x) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$f'(x) = x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$g(x) = \log(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$= \frac{x^2}{2} \log(x) - \frac{x^2}{4} + C$$

è utile fare la VERIFICA!

$$\left(\frac{x^2}{2} \log(x) - \frac{x^2}{4} + C \right)' = x \log(x) + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{2x}{4} = x \log(x)$$

TRUCCHETTO: moltiplico per 1

$$\int \log(x) dx = \int 1 \cdot \log(x) dx =$$

$$= x \log(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= x \log(x) - x + C = x(\log(x) - 1) + C$$

$$\text{VERIFICA: } 1 \cdot \log(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \log(x)$$

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI POLINOMIALI

$$\int 2x^3 - 4x^2 + 5 dx = 2 \int x^3 dx - 4 \int x^2 dx + 5 \int 1 dx =$$

$$= 2 \frac{x^4}{4} - 4 \frac{x^3}{3} + 5x + C = \frac{x^4}{2} - \frac{4}{3}x^3 + 5x + C$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \Rightarrow f(x) = x \\ g(x) &= \log(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

FUNZIONI RAZIONALI

$P(x), H(x)$ polinomi

$$\int \frac{P(x)}{H(x)} dx$$

Esistono polinomi $Q(x)$ e $R(x)$ tali che

$$P(x) = Q(x) H(x) + R(x)$$

con il grado di $R(x)$ minore del grado di $H(x)$.

ESEMPIO

$$\int \frac{6x^3 + x^2 - 7}{2x - 1}$$

$$P(x) = 6x^3 + x^2 - 7$$

$$H(x) = 2x - 1$$

$$P(x) = (3x^2 + 2x + 1) H(x) - 6$$

$$\begin{array}{r|l}
 6x^3 + x^2 + 0x - 7 & 2x - 1 \\
 \underline{-6x^3 + 3x^2} & \textcircled{3x^2 + 2x + 1} = Q(x) \\
 // & \\
 4x^2 + 0x & \\
 \underline{-4x^2 + 2x} & \\
 // & \\
 2x - 7 & \\
 \underline{-2x + 1} & \\
 // & \textcircled{-6} = R(x)
 \end{array}$$

$$\int \frac{6x^3 + x^2 - 7}{2x - 1} dx = \int 3x^2 + 2x + 1 dx + \int \frac{-6}{2x - 1} dx =$$

perciò $\frac{P(x)}{H(x)} = \frac{Q(x)H(x)}{H(x)} + \frac{R(x)}{H(x)}$

$$= x^3 + x^2 + x - 3 \int \frac{2}{2x-1} dx = x^3 + x^2 + x - 3 \log|2x-1| + C$$

ESEMPIO $\int \frac{x^2-5}{3x-2} dx = \int \frac{x}{3} + \frac{2}{9} dx - \frac{41}{9} \int \frac{1}{3x-2} dx =$

$$= \frac{x^2}{6} + \frac{2}{9}x - \frac{41}{27} \log|3x-2| + C$$

ESEMPIO $\int \frac{5x-3}{2x^2+3x-5} dx$

$$2x^2+3x-5 \text{ ha radici } x_1 = 1$$

$$x_2 = -\frac{5}{2}$$

$$2(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right) = (x-1)(2x+5)$$

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2) \quad \text{se il polinomio ha}$$

radici x_1 e x_2

$$\int \frac{5x-3}{2x^2+3x-5} dx =$$

$$\frac{5x-3}{(x-1)(2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{2x+5} =$$

$$A, B \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{A(2x+5) + B(x-1)}{(x-1)(2x+5)} = \frac{x(2A+B) + (5A-B)}{(x-1)(2x+5)}$$

$$\begin{cases} 2A+B=5 \\ 5A-B=-3 \end{cases}$$

$$B = 5 - 2A = 5 - \frac{4}{7} = \frac{31}{7}$$

$$\frac{7A=2}{A=\frac{2}{7}}$$

$$\frac{5x-3}{2x^2+3x-5} = \frac{\frac{2}{7}}{x-1} + \frac{\frac{31}{7}}{2x+5}$$

$$\int \frac{5x-3}{2x^2+3x-5} dx = \frac{2}{7} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{31}{27} \int \frac{1 \cdot 2}{2x+5} dx =$$

$$= \frac{2}{7} \log|x-1| + \frac{31}{14} \log|2x+5| + C$$

IN MODO ANALOGO, possiamo risolvere gli integrali indefiniti della forma

$$\int \frac{P(x)}{H(x)} dx$$

con $H(x)$ polinomio di 2° grado con $\Delta > 0$.

CASO $\Delta = 0$

$$\int \frac{2x+3}{9x^2-12x+4} dx$$

$$9x^2-12x+4=$$

$$x_1=x_2=\frac{2}{3}$$

$$= 9\left(x-\frac{2}{3}\right)^2 = (3x-2)^2$$

$$\frac{2x+3}{(3x-2)^2} = \frac{A}{3x-2} + \frac{B}{(3x-2)^2} = \frac{A(3x-2)+B}{(3x-2)^2} = \frac{3Ax-2A+B}{(3x-2)^2}$$

13

$$\text{Ans. } 3A=2 \quad A=\frac{2}{3}$$

$$-2A+B=3 \quad B=3+2A=3+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}$$

$$\frac{2x+3}{9x^2-12x+4} = \frac{\frac{2}{3}}{3x-2} + \frac{\frac{13}{3}}{(3x-2)^2}$$

$$\int \frac{2x+3}{9x^2-12x+4} dx = \frac{2}{3 \cdot 3} \int \frac{1 \cdot 3}{3x-2} dx + \frac{13}{3} \int \frac{1}{(3x-2)^2} dx =$$
$$= \frac{2}{9} \log|3x-2| + \frac{13}{3 \cdot 3} \int 3 \cdot (3x-2)^{-2} dx =$$

$$= \frac{2}{9} \log|3x-2| + \frac{13}{9} \cdot \frac{1}{-1} (3x-2)^{-1} + C =$$

$$= \frac{2}{9} \log|3x-2| - \frac{13}{9} \cdot \frac{1}{3x-2} + C$$