STUDI DI FUNZIONI

1. dominio
2. simmetria (pari; dispari)
3. intersezioni con assi
4. segno di f
5. asintoti (verticali, orizzontali, obliqui)
6. derivata prima di f
7. segno della derivata
   $\Rightarrow$ crescenza e decrescenza di f
8. massimi e minimi
9. derivata seconda
10. concavità e convessità
11. flessi di f
12. tracciare il grafico

ASINTOTI OBLIQUI

RETTA

$y = mx + q$ con $m, q \in \mathbb{R}$

Si dice OBLIQUA se <u>non</u> è orizzontale, cioè se $m \neq 0$

Se $m = 0$, $y = q$ è una retta orizzontale

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0 \qquad q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx$$

$$f(x)=\frac{3-x^2}{x+2}$$

① dominio $x+2\neq 0 \iff x\neq -2$

$Dom(f)=\mathbb{R}\setminus\{-2\}=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$

② il dominio non è simmetrico rispetto all'origine quindi la funzione non è pari né dispari

③ $\cap$ asse y : $x=0$ $\quad f(0)=\frac{3-0}{0+2}=\frac{3}{2}$ $\quad P_1=\left(0,\frac{3}{2}\right)$

$\cap$ asse x: $y=0$ $\quad 0=\frac{3-x^2}{x+2}$ $\quad 0=3-x^2$ $\quad x_1=0$ $\quad x^2=3$ $\quad x_2=\sqrt{3}$ $\quad x_3=-\sqrt{3}$

$P_2=(\sqrt{3},0)$ $\quad P_3=(-\sqrt{3},0)$

④ $f(x)>0$ $\qquad \dfrac{3-x^2}{x+2}>0$

$N>0 \qquad 3-x^2>0 \iff x^2-3<0$

-1 è discorde con il verso $>$

$\Downarrow$

è positivo per valori interni

$N>0$ per $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$

$D>0 \qquad x+2>0 \iff x>-2$

		-2		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$	
N	$--$		$--$		$++$		$--$
D	$--$		$++$		$++$		$++$
$f(x)$	$+$		$-$		$+$		$-$

$f(x)>0$ per $x<-2$ e per $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$

$f(x)<0$ per $-2<x<-\sqrt{3}$ e per $x>\sqrt{3}$

⑤ ricerca asintoti

$$\boxed{\lim_{x\to-2} f(x) \text{ NON ESISTE!}}$$

$$\lim_{x\to-2^-} \frac{3-x^2}{x+2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{3-x^2}{x+2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

ESISTE ASINTOTO VERTICALE $x=-2$

ricerca asintoti orizzontali

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3-x^2}{x+2} = \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{3}{x^2}-1\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)} = +\infty\cdot(-1) = -\infty$$

NON ESISTE ASINTOTO ORIZZONTALE

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3-x^2}{x+2} = \frac{\cancel{x^2}\left(\frac{3}{x^2}-1\right)}{\cancel{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)} = -\infty\cdot(-1) = +\infty$$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3-x^2}{x(x+2)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3-x^2}{x^2+2x} = -1$$ per la regola dei gradi

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3-x^2}{x+2} + x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3\cancel{-x^2}\cancel{+x^2}+2x}{x+2} = 2$$

quindi esiste ASINTOTO OBLIQUO $y=-x+2$

⑥ Derivata prima di $f(x)=\dfrac{3-x^2}{x+2}$

$$f'(x)=\frac{-2x(x+2)-(3-x^2)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{-2x^2-4x-3+x^2}{(x+2)^2}=-\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$$

⑦ $f'(x)>0$ $\quad -(x^2+4x+3)=N>0$

$x^2+4x+3=0$

$$\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2}\begin{cases}-1\\-3\end{cases}$$

		-3		-2		-1	
N	$- -$		$+ +$		$+ +$		$- -$
D	$+ +$		$+ +$		$+ +$		$+ +$
$f'(x)$	$-$		$+$		$+$		$-$
$f(x)$	↘		↗		↗		↘

$D>0$ $\quad (x+2)^2>0$ sempre nel dominio

$f(x)$ è crescente per $-3<x<-2$ e per $-2<x<-1$

$f(x)$ è decrescente per $x<-3$ e per $x>-1$

in $x_4=-3$ c'è un punto di minimo

in $x_5=-1$ c'è un punto di massimo

⑧ $f(-3)=\frac{3-(-3)^2}{-3+2}=\frac{3-9}{-1}=\frac{-6}{-1}=6$ $P_4(-3,6)$ minimo

$f(-1)=\frac{3-(-1)^2}{-1+2}=\frac{3-1}{1}=2$ $P_5(-1,2)$ massimo

⑨ $f'(x)=-\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}$

$$f''(x)=-\frac{(2x+4)(x+2)^2-(x^2+4x+3)\,2(x+2)\cdot 1}{(x+2)^4}=$$

$$=-\frac{2(x+2)(x+2)^2-2(x+2)(x^2+4x+3)}{(x+2)^4}=$$

$$=-\frac{2\cancel{(x+2)}(\cancel{x^2}+\cancel{4x}+4-\cancel{x^2}-\cancel{4x}-3)}{(x+2)^{\cancel{4}\,3}}=-\frac{2}{(x+2)^3}$$

(10) $f''(x) > 0$ $\qquad -\dfrac{2}{(x+2)^3} > 0$

$N = -2 > 0$ mai

$D > 0 \quad (x+2)^3 > 0 \iff x+2 > 0$

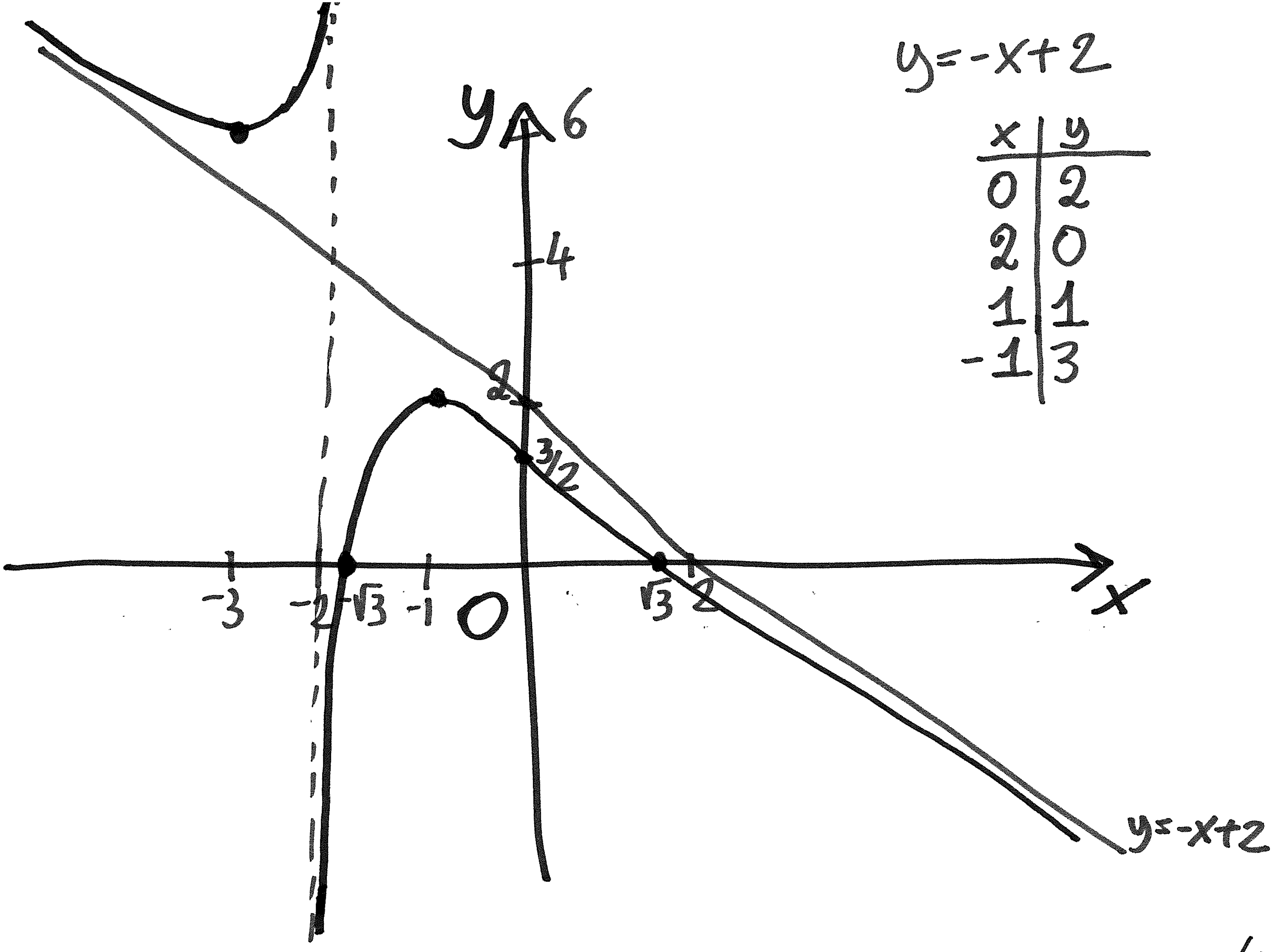
$\Updownarrow$

$x > -2$

	-2	
N	$- - -$	$- - -$
D	$- - -$	$+ + +$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$

$f(x)$ ha concavità verso l'alto per $x < -2$
e concavità verso il basso per $x > -2$

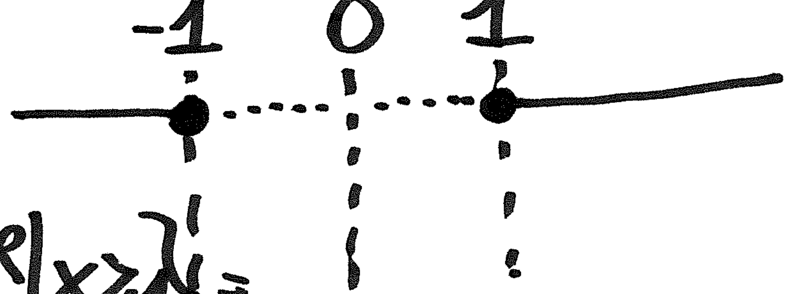
(11) in $x = -2$ non c'è flesso perché -2 è escluso dal dominio



$y=-x+2$

x	y
0	2
2	0
1	1
-1	3

$$f(x)=\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x}$$



① $x\neq 0 \qquad x^2-1\geq 0$

Dominio $=\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq -1\}\cup\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 1\}=$

$=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

② $f(-x)=\dfrac{2\sqrt{(-x)^2-1}}{-x}=\dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{-x}=-f(x)$ $\qquad$ f è dispari!

③ $\cap$ asse y: $x=0$ non c'è perché $x=0$ è escluso dal dominio

$\cap$ asse x: $y=0$ $\qquad 0=\dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x} \qquad 0=\cancel{2}\sqrt{x^2-1} \qquad x^2-1=0$

$x_1=-1$

$x_2=1$

il profilo di f interseca l'asse x

nei punti $P_1(-1,0)$, $P_2(1,0)$

④ $\dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x}>0$

$N>0$ $\quad 2\sqrt{x^2-1}>0$ per $x<-1$ e per $x>1$

$D>0$ $\quad x>0$

	-1	0	1	
N	$+++$			$+++$
D	$---$			$+++$
$f(x)$	$-$			$+$

$f(x)>0$ per $x>1$

$f(x)<0$ per $x<-1$

⑤ Non esistono asintoti verticali per il dominio

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}= \text{FORMA INDETERMINATA}$$

$$\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases}x & \text{se } x\geq 0\\ -x & \text{se } x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\frac{2\cancel{x}\sqrt{1-\overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}}}{\cancel{x}}=2$$

ESISTE ASINTOTO ORIZZONTALE DESTRO $y=2$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2(-\cancel{x})\sqrt{1-\overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}}}{\cancel{x}}=-2$$

ESISTE ASINTOTO ORIZZONTALE SINISTRO $y=-2$

⑥ $$f'(x) = 2\,\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\cdot x - \sqrt{x^2-1}\cdot 1}{x^2} =$$

$$\left(\sqrt{x^2-1}\right)' = \left((x^2-1)^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{\cancel{2}}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot \cancel{2}x = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$= 2\,\frac{\frac{x^2-(x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2} =$$

$$= 2\,\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

OSS in $x_1=-1$ e in $x_2=1$ la derivata NON è definita

⑦ $f'(x)>0$ $\qquad \dfrac{2}{x^2\sqrt{x^2-1}}>0$

$N=2>0$ sempre

$x^2\sqrt{x^2-1}>0$ per $x<-1$ e per $x>1$

		-1		1	
$f'(x)$	$++$		✗		$++$
$f(x)$	↗				↗

$f(x)$ è crescente per $x<-1$ e per $x>1$

⑧ in $x_1=-1$ c'è un punto di massimo relativo $P_1=(-1,0)$

in $x_2=1$ c'è un punto di minimo relativo $P_2=(1,0)$

⑨ $f'(x)=\dfrac{2}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad\left(\sqrt{x^2-1}\right)'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

$$\left(g(x)h(x)\right)'=g'(x)h(x)+g(x)h'(x)$$

$$f''(x)=2\,\frac{-\left(2x\sqrt{x^2-1}+x^2\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)}{x^4(x^2-1)}=$$

$$=-2\,\frac{\frac{2x(x^2-1)+x^3}{\sqrt{x^2-1}}}{x^4(x^2-1)}=-2\,\frac{2x^3-2x+x^3}{x^4(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=-2\,\frac{\cancel{x}(3x^2-2)}{x^{\cancel{4}3}\sqrt{(x^2-1)^3}}=\frac{2(2-3x^2)}{x^3\sqrt{(x^2-1)^3}}$$

(10) $f''(x)>0 \quad \frac{2(2-3x^2)}{x^3\sqrt{(x^2-1)^3}}>0$

$N>0 \quad 2-3x^2>0$

$2-3x^2=0$

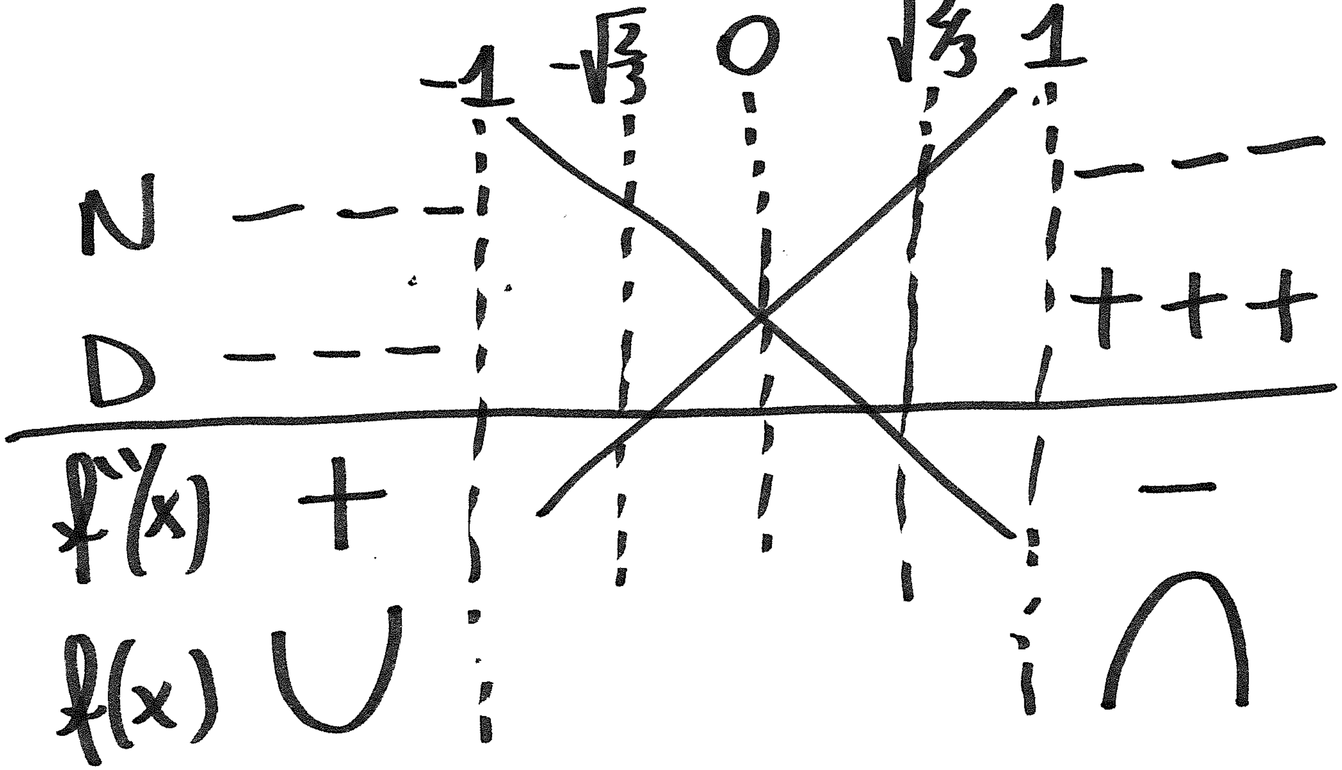
$2=3x^2$

$x^2=\frac{2}{3}$

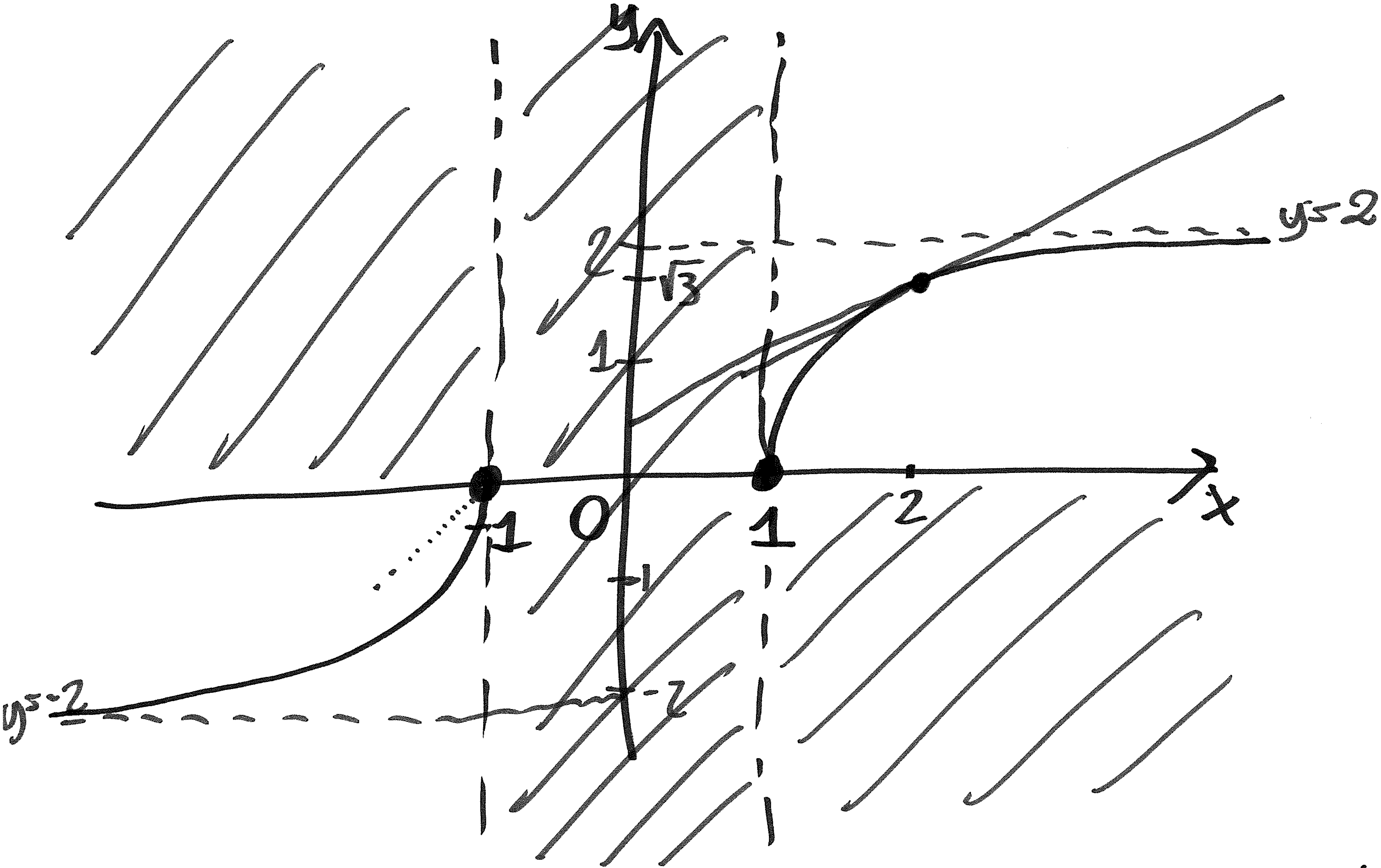
$x_1=\sqrt{\frac{2}{3}}$

$x_2=-\sqrt{\frac{2}{3}}$

$D>0 \quad x^3>0 \quad x>0$



(11) non ci sono flessi


y
x
y=2
2
$\sqrt{3}$
1
-1
O
1
2
-1
-2
y=-2

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

Ciò implica che la retta tangente al grafico in $x_1 = -1$

è una retta verticale.

Sia $(x_0, f(x_0))$ un punto del grafico.

Allora la retta tangente al grafico passa per $(x_0, f(x_0))$ con

COEFFICIENTE ANGOLARE $f'(x_0) = m$

RETTA TANGENTE AL GRAFICO $\quad y - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{=m}(x - x_0)$

ESEMPIO) Sia $f(x) = \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x}$ e sia $x_0 = 2$

$$f(2) = \frac{\cancel{2}\sqrt{4-1}}{\cancel{2}} = \sqrt{3} \qquad f'(2) = \frac{2}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

La retta tangente al grafico nel punto $(2, \sqrt{3})$ è

$$y - \sqrt{3} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(x-2)$$

$$f(x) = \log\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$$

$N: x+2>0 \iff x>-2$

$D: x+1>0 \iff x>-1$

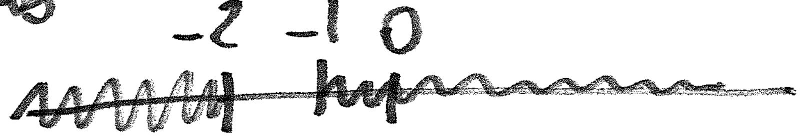
① Dominio $\frac{x+2}{x+1} > 0$

		-2		-1	
N	$- -$		$+ +$		$+ +$
D	$- -$		$- -$		$+ +$
$\frac{N}{D}$	$+$		$-$		$+$

Dominio $= (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$

② f non è pari né dispari per il dominio

$x \leftrightarrow -x$



③ $\cap$ asse y: $x=0$ $f(0) = \log(2)$ $\boxed{P_1(0, \log(2))}$

$\cap$ asse x: $y=0$

$0 = \log\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$ $1 = e^0 = e^{\log\left(\frac{x+2}{x+1}\right)} = \frac{x+2}{x+1}$

NON C'È $\cap$

CON ASSE X

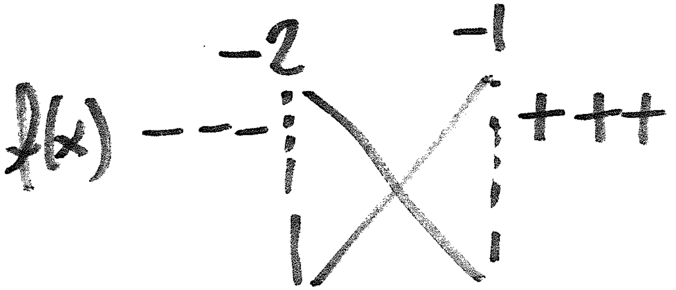
$\frac{x+2}{x+1} - 1 = 0$ $\frac{\cancel{x}+2-\cancel{x}-1}{x+1} = 0$ $\frac{1}{x+1} = 0$ MAI

④ $\log\left(\frac{x+2}{x+1}\right)>0$

$\frac{x+2}{x+1}>1$ nel dominio

$\frac{x+2}{x+1}-1>0$ $\quad \frac{x+2-x-1}{x+1}>0$ $\quad \frac{1}{x+1}>0$

$x>-1$



$f(x)>0$ per $x>-1$

$f(x)<0$ per $x<-2$

⑤ $\lim_{x\to-2^-}\log\left(\frac{x+2}{x+1}\right)=\log\left(\frac{0^-}{-1}\right)=\log(0^+)=-\infty$

ESISTONO ASINTOTI VERTICALI $x=-2$ e $x=-1$

$\lim_{x\to-1^+}\log\left(\frac{x+2}{x+1}\right)=\log\left(\frac{1}{0^+}\right)=\log(+\infty)=+\infty$

ESISTE ASINTOTO ORIZZONTALE $y=0$

$\lim_{x\to\pm\infty}\log\left(\frac{x+2}{x+1}\right)=\log(1)=0$

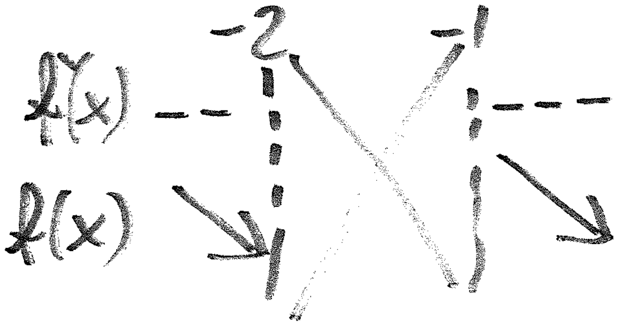
(6) $f(x) = \log\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$

$$\left(\log(g(x))\right)' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{\cancel{x+1}}} \cdot \frac{1\cdot(x+1)-(x+2)\cdot 1}{(x+1)^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{x}+1\cancel{-x}-2}{(x+2)(x+1)} = -\frac{1}{(x+2)(x+1)}$$

(7) $f'(x) > 0$ per nessun x nel dominio

$f(x)$ è sempre decrescente nel dominio

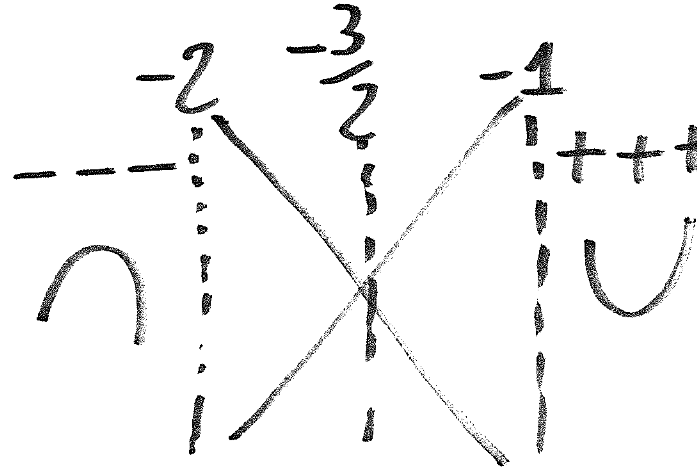


(8) non ci sono massimi o minimi

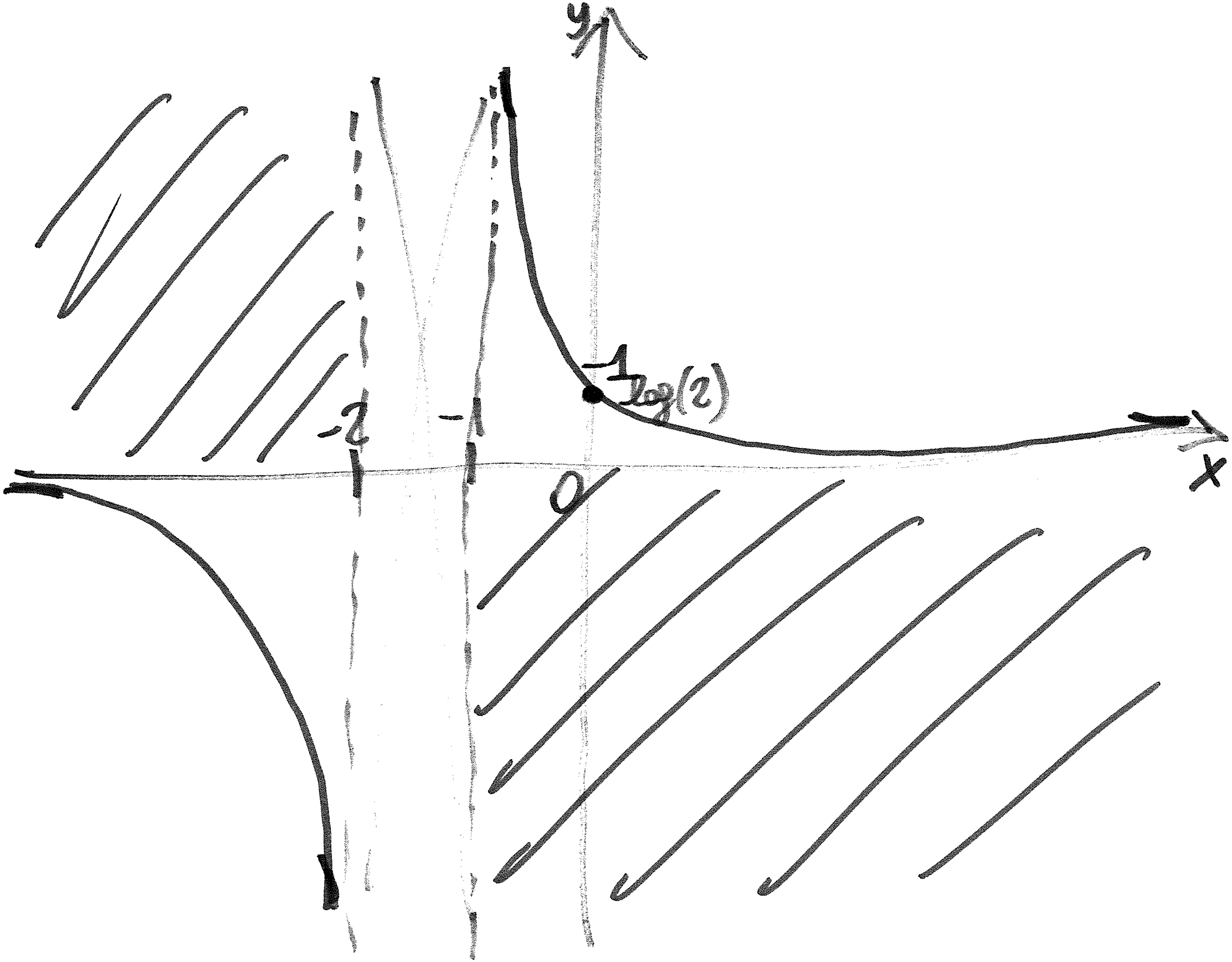
(9) $f''(x) = \frac{2x+3}{(x+2)^2(x+1)^2}$

(10) $f''(x) > 0$

$f(x)$



(11) non ci sono flessi



y
x
0
-2
-1
1
log(2)