

STUDI DI FUNZIONI

- ① dominio
- ② simmetrie (pari, dispari)
- ③ intersezioni con assi
- ④ segno di f
- ⑤ asintoti (verticali, orizzontali, obliqui)
- ⑥ derivata prima di f
- ⑦ segno della derivata
 $\Rightarrow$ crescere e decrescere di f

- ⑧ massimi e minimi
- ⑨ derivata seconda
- ⑩ concavità e convettà
- ⑪ flessi di f
- ⑫ tracciare il grafico

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$$

① Dominio =

$$e^x - 1 \neq 0$$

$$= \mathbb{R} \setminus \{0\} =$$

$$e^x \neq 1$$

$$= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$x = \log(e^x) \neq \log(1) = 0$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad f(-x) &= \frac{e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1} = \frac{\frac{1}{e^x} + 1}{\frac{1}{e^x} - 1} = \frac{\frac{1+e^x}{e^x}}{\frac{1-e^x}{e^x}} = \frac{1+e^x}{1-e^x} \cdot \frac{e^x}{e^x} = \\ &= \frac{1+e^x}{1-e^x} = -f(x) \Rightarrow f \text{ è dispari} \end{aligned}$$

③ Asse y: $x=0$

$x=0$ è escluso
dal dominio



il grafico di f
non interseca
l'asse y

Asse x: $y=0$

$$\begin{cases} y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \Rightarrow e^x + 1 = 0 & e^x = -1 \text{ MAI!} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il grafico di f non interseca l'asse x.

$$\textcircled{4} \quad f(x) > 0 \quad \frac{e^x + 1}{e^x - 1} > 0$$

$$e^x + 1 > 0 \text{ sempre}$$

$$e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1$$

$$\Leftrightarrow x > 0$$

$$N = e^x + 1 > 0$$

$$D = e^x - 1 > 0$$

$$f(x) > 0$$

$$\begin{array}{c} 0 \\ + + | + + \\ - - | + + \\ \hline - | + \end{array}$$

$f(x) > 0$ per $x > 0$ e $f(x) < 0$ per $x < 0$.

$$\textcircled{5} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

quindi esiste un ASINTOTO VERTICALE
 $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ F.I.N.D.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^x} \left(1 + \left(\frac{1}{\cancel{e^x}}\right)^{\rightarrow 0}\right)}{\cancel{e^x} \left(1 - \left(\frac{1}{\cancel{e^x}}\right)^{\rightarrow 0}\right)} = 1$$

Alternativamente:

regola di De l'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} = 1$$

ESISTE
ASINTOTO ORIZZONTALE
DESTRO ($x \rightarrow +\infty$)
 $y = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{1}{-1} = -1$$

ESISTE ASINTOTO ORIZZONTALE
SINISTRO ($x \rightarrow -\infty$)
 $y = -1$

$$f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \quad \left(\frac{h(x)}{g(x)} \right)' = \frac{h'(x)g(x) - h(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - (e^x + 1)e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{\cancel{e^{2x}} - e^x - \cancel{e^{2x}} - e^x}{(e^x - 1)^2} = -\frac{2e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$f'(x) > 0$ $N > 0$ $-2e^x > 0$ MAI
 $D > 0$ $(e^x - 1)^2 > 0$ SEMPRE NEL DOMINIO

N	---	0	---	N
D	++		++	D
$f'(x)$	--		--	$f'(x)$
$f(x)$	↘		↘	$f(x)$

$f(x)$ è sempre decrescente nel dominio

Non esistono punti di massimo e di minimo

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= -2 \frac{e^x(e^x-1)^2 - e^x \cdot 2(e^x-1)e^x}{(e^x-1)^4} = \\
 &= -2 \frac{\cancel{(e^x-1)}(e^x(e^x-1) - 2e^x \cdot e^x)}{(e^x-1)^{4-1}} = -2 \frac{e^{2x} - e^x - 2e^{2x}}{(e^x-1)^3} =
 \end{aligned}$$

$$= -2 \frac{-e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^3} = \frac{2e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^3}$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) > 0 & \quad 2e^x(e^x+1) > 0 \quad \text{sempre} \\
 (e^x-1)^3 > 0 & \Leftrightarrow e^x-1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0
 \end{aligned}$$

$f''(x)$ 0
 $f(x)$ $---$ $++++$
 $\cap$ $\cup$

in 0 non c'è flesso
perché è escluso dal dominio

