Matematica per Scienze Biologiche

Francesca A. Prinari, Cinzia Bisi, Alberto Calabri

Dipartimento di Matematica e Informatica

Regola di De l'Hôpital

19 novembre 2019

Anno Accademico 2019/2020

http://docente.unife.it/alberto.calabri/matematica-per-biologia

Riassunto

1. Regola di De l'Hôpital per funzioni infinitesime
2. Regola di De l'Hôpital per funzioni infinite
3. Limiti notevoli

Regola di De l'Hôpital per funzioni infinitesime

Siano f e g due funzioni derivabili tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

Supponiamo che

- $g'(x) \neq 0$ per x vicino a x_0, ma non necessariamente in x_0, e che
- esista e sia finito il limite $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Allora si conclude che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Valgono analoghe formule per limiti da destra o da sinistra.

Esempio di uso della regola di De l'Hôpital

Siano $f(x) = e^x - 1$ e $g(x) = x$.

Verifichiamo che f e g soddisfano le ipotesi della regola di De l'Hôpital in $x_0 = 0$:

- sono derivabili: le derivate sono $f'(x) = e^x$ e $g'(x) = 1$,

$$\lim_{x \to 0} e^x - 1 = \lim_{x \to 0} x = 0$$

- $g'(x) \neq 0$ per ogni x,
- esiste ed è finito il limite $\lim_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1$.

Allora troviamo che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1.$$

Altro esempio della regola di De l'Hôpital

Siano $f(x) = x^5 - 1$ e $g(x) = x - 1$.

Verifichiamo che f e g soddisfano le ipotesi della regola di De l'Hôpital in $x_0 = 1$:

- sono derivabili: $f'(x) = 5x^4$ e $g'(x) = 1$,

$$\lim_{x\to 1} x^5 - 1 = \lim_{x\to 1} x - 1 = 0$$

- $g'(x) \neq 0$ per ogni x,
- esiste ed è finito il limite $\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 1} \frac{5x^4}{1} = 5.$

Allora troviamo che:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{5x^4}{1} = 5.$$

La regola di De l'Hôpital si può ripetere

Vogliamo calcolare il limite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^6 - 1 - 6(x-1)}{(x-1)^2}$$

che è una forma indeterminata $0/0$.

Applichiamo la regola di De l'Hôpital in $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^6 - 1 - 6(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{6x^5 - 6}{2(x-1)}$$

che è ancora una forma indeterminata $0/0$.

Applichiamo di nuovo la regola di De l'Hôpital in $x_0 = 1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^6 - 1 - 6(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{6x^5 - 6}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{30x^4}{2} = 15.$$

Regola di De l'Hôpital per funzioni infinite

Siano f e g due funzioni derivabili tali che

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \lim_{x \to x_0} |g(x)| = +\infty.$$

Supponiamo che

- $g'(x) \neq 0$ per x vicino a x_0, ma non necessariamente in x_0, e che
- esista (finito o infinito) il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Allora si conclude che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Valgono analoghe formule per limiti da destra o da sinistra.

Regola di De l'Hôpital all'infinito

Con la regola di De l'Hôpital abbiamo visto come calcolare dei limiti al finito, cioè per x che tende a x_0, dove $x_0 \in \mathbb{R}$.

Analoghe formule valgono per limiti all'infinito, cioè

- per x che tende a $+\infty$;
- per x che tende a $-\infty$.

In tal caso, la condizione che $g'(x) \neq 0$ vicino a x_0 si traduce nella condizione che

- $g'(x) \neq 0$ per x abbastanza grande (se $x \to +\infty$);
- $g'(x) \neq 0$ per x abbastanza negativo (se $x \to -\infty$).

La conclusione è la stessa:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Esempio di uso della regola di De l'Hôpital

Siano $f(x) = e^x$ e $g(x) = x$. Vogliamo calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$$

che è una forma indeterminata del tipo ∞/∞.

Verifichiamo che f e g soddisfano le ipotesi della regola di De l'Hôpital per x che tende a $+\infty$:

- sono derivabili: le derivate sono $f'(x) = e^x$ e $g'(x) = 1$,
- $g'(x) \neq 0$ per ogni x,
- esiste il limite $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$

Allora troviamo che:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

Altro esempio della regola di De l'Hôpital

Siano $f(x) = \log(x)$ e $g(x) = x$. Vogliamo calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{x}$$

che è una forma indeterminata del tipo ∞/∞.

Si verifica che f e g soddisfano le ipotesi della regola di De l'Hôpital per $x \to +\infty$ e si trova che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

In altri termini, quando $x \to +\infty$, la funzione logaritmo $f(x) = \log(x)$ cresce più lentamente della funzione $g(x) = x$.

Allo stesso modo per $x \to +\infty$ la funzione $\log(x)$ cresce più lentamente di qualsiasi funzioni potenza x^{α}, con $\alpha > 0$.

Forma indeterminata $0 \cdot \infty$

Usando la regola di De l'Hôpital si possono risolvere molte (non tutte) forme indeterminate del tipo $0/0$ o ∞/∞.

Non si può applicare direttamente la regola di De l'Hôpital alle forme indeterminate del tipo $0 \cdot \infty$.

Ma si possono trasformare le forme indeterminate del tipo $0 \cdot \infty$ in forme indeterminate del tipo $0/0$ o ∞/∞, portando una delle funzioni al denominatore. Vediamo un esempio:

$$\lim_{x \to +\infty} x e^{-x}$$

è una forma indeterminata $\infty \cdot 0$. Portando e^{-x} al denominatore, possiamo applicare la regola di De l'Hôpital:

$$\lim_{x \to +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Limiti notevoli

Usando la regola di De l'Hôpital si possono dimostrare alcuni limiti notevoli:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{2x} = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1/(1+x)}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1.$$

Per ogni numero reale α,

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1} = \alpha.$$